文章编号: 1000−8152(2008)03−0407−07

脉冲切换系统的鲁棒H_∞动态输出反馈控制

李 娇[1,2], 刘玉忠[1]

(1. 沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 辽宁 沈阳 110034; 2. 河北北方学院 理学院, 河北 张家口 075000)

摘要: 考虑了脉冲切换系统的鲁棒H_∞控制问题. 该系统的状态矩阵和控制矩阵都有不确定性和扰动. 利用线性矩阵不等式(LMI)、H_∞控制理论、Lyapunov函数和变量替换方法, 对这类系统给出了鲁棒稳定且具有γ鲁棒性能的充分条件. 然后, 使用MATLAB软件设计出H_∞鲁棒动态输出反馈控制器和脉冲控制矩阵. 最后通过一个仿真算例验证了文中结论的有效性.

关键词: 不确定脉冲切换系统; 动态输出反馈; Lyapunov函数; 鲁棒稳定; 线性矩阵不等式(LMI)

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Robust H-infinity dynamic output feedback control for impulsive switched systems

LI Jiao[1,2], LIU Yu-zhong[1]

(1. School of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang Liaoning 110034, China;
2. School of Science, Hebei North University, Zhangjiakou Hebei 075000, China)

Abstract: The problem of robust H-infinity control is considered for impulsive switched systems with disturbances and uncertainties in both states and control matrices. By using linear matrix inequality (LMI), H-infinity control theory, Lyapunov functions and variable transformation, we derived the sufficient conditions for this type of systems to be robustly stable with robust performance. The robust H-infinity dynamic output feedback controllers and impulsive control matrix are then designed by using MATLAB software. The numerical example illustrates the efficacy of the result in this paper.

Key words: uncertain impulsive switched systems; dynamic output feedback; Lyapunov function; robust stabilization; linear matrix inequality (LMI)

1 引言(Introduction)

切换系统是混杂动态系统中颇具代表性的一类系统. 其连续动态由若干子系统单独运行描述; 离散动态指切换策略, 决定某一时刻执行哪个子系统. 它控制和协调整个系统的正常运行, 即使每个子系统均不稳定, 通过构造切换策略, 可以保证整个系统是稳定的; 相反, 即使每个子系统均稳定, 若切换策略选择不当, 也可以使整个系统不稳定. 切换系统有着广泛的实际应用背景, 如: 计算机控制系统、受约机器人、高速公路控制、无线电通讯和电力大系统等. 近几年来, 切换系统已引起控制理论界和工程界的广泛关注[1~5]. 由于切换系统模型的复杂性, 所以研究其稳定性和控制综合问题有着特殊意义. 而关于切换系统稳定性的研究有许多成熟的方法, 如: 文[3]利用单Lyapunov函数和多Lyapunov函数方法对控制器切换的H_∞稳定性进行了研究, 提出了稳定性的充分条件. 文[4]引入多Lyapunov函数法研究了每个子系统都为离散系统的非线性切换系统的渐近稳定性, 得到了判断系统渐近稳定性的两个充分条件. 文[5,6]利用停留时间和平均停留时间的方法. 文[7,8]采用线性矩阵不等式(LMI)技术给出了切换系统的稳定性及其鲁棒性能的判定条件. 近来, 文[9]对离散时间切换系统提出了切换的Lyapunov函数方法, 并且给出了判断系统稳定及其鲁棒性能的线性矩阵不等式(LMI)条件. 文[10]引用切换的Lyapunov函数方法研究了离散时间切换系统基于观测器的静态输出反馈镇定问题, 且得到了能够判断系统鲁棒稳定的充分条件.

然而在实际切换过程中, 系统不可避免地存在着大量的切换脉冲. 近年来, 脉冲动态系统的

收稿日期: 2006−03−20; 收修改稿日期: 2007−05−22.
基金项目: 沈阳师范大学博士启动基金资助项目(054-554405-01).

稳定性问题已经有了较好的结果[11~13]. 文[12]应用Lyapunov函数直接法研究一类脉冲切换系统的鲁棒指数稳定问题, 并且给出状态反馈控制律以使这类脉冲切换系统能够指数镇定. 文[13]利用Lyapunov函数法和LMI法研究一类具有扰动的脉冲切换系统的鲁棒H_∞控制问题, 分析了系统的鲁棒稳定性及其鲁棒性能, 且给出了几个容易判断系统是否鲁棒稳定的充分条件. 但是, 上述文[12,13]均没有考虑系统参数的不确定性, 且它们所获得的结果是建立在系统状态可以完全测量的前提下.

在系统运行中, 系统的不确定性是普遍存在的. 如: 由于测量误差、输入条件的变化、传感器和执行器等部件非正常工作以及来自外界的干扰等均会引起不确定性的出现, 所以系统没有准确的模型与参数, 都会有相应的摄动. 而在许多实际问题中, 系统的状态通常是不能直接测量的, 故难以应用状态反馈控制律来对系统进行控制, 往往需要设计具有物理可实现性的控制器以使系统具有期望的性能, 如以H_∞指标表征的对外界扰动的抑制能力等. 有时即使系统的状态可以直接测量, 但考虑到实施控制的成本和系统的可靠性等因素, 如果用输出反馈能够达到闭环系统的性能要求, 那么选择输出反馈的控制方式更具有可行性. 因此, 输出反馈H_∞控制问题的研究更具有实际意义. 本文将考虑一类具有扰动的不确定脉冲切换系统的鲁棒H_∞动态输出反馈控制问题. 通过动态输出反馈控制和脉冲控制, 给出了闭环系统在参数摄动和外部扰动的情况下鲁棒稳定且具有γ鲁棒性能的充分条件. 同时, 采用变量替换法将该充分条件转化为容易求解的线性矩阵不等式(LMI)问题. 最后得到了基于MATLAB软件的鲁棒H_∞动态输出反馈控制器的设计方法和脉冲控制矩阵, 仿真结果表明该方法具有较少的保守性和更好的性能.

2 系统描述和问题提出(System description and problem statement)

考虑下面具有扰动的不确定脉冲切换系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=(A_i+\Delta A_i)x(t)+(B_i+\Delta B_i)u(t)+ \\ \qquad D_i\omega(t), \quad t\neq t_k, \\ \Delta x(t)=E_kx(t), t=t_k, \\ z(t)=C_i^1x(t), \\ y(t)=C_i^2x(t), \\ x(0)=0, \qquad \forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$是状态向量, $u(t)\in\mathbb{R}^m$是控制输入向量, $z(t)\in\mathbb{R}^p$是受控输出, $y(t)\in\mathbb{R}^p$是测量输出, $\omega(t)\in\mathbb{R}^q$外部扰动; A_i,B_i,D_i,C_i^1,C_i^2是适当维数的实常矩阵; $\Delta A_i,\Delta B_i$ 是表示系统模型中参数不确定性的未知实矩阵; E_k是脉冲矩阵, 当切换规则一定, 它是一系列实常矩阵($k=1,2,\cdots$); $\Delta x(t)=x(t^+)-x(t^-)$是状态跳变, 即切换脉冲, $x(t^-)=\lim\limits_{h\to0^+}x(t-h), x(t^+)=\lim\limits_{h\to0^+}x(t+h)$, t_k是脉冲切换点, 即表示第k次切换时刻, $0<t_1<t_2<\cdots<t_k<\cdots<t_\infty$, $\lim\limits_{k\to\infty}t_k=\infty$, $\lim\limits_{h\to0^+}x(t_k-h)=x(t_k^-)=x(t_k)$; 一切换序列$\{t_k,i_k\}(k=1,2,\cdots)$是指系统在时刻$t_k$进行切换进入另一新的子系统$i_k$.

下面给出在主要结果中所要用到的假设和引理.

假设 1 (A_i,B_i,C_i^2)是能稳能检测的, $\forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}$.

假设 2 $[\Delta A_i,\ \Delta B_i]=M_iF_i\ [N_i^1,\ N_i^2]$.
其中: F_i满足$F_iF_i^{\mathrm T}\leqslant I$, M_i, N_i^1, N_i^2是已知的常阵, $\forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}$.

引理 1[14] 给定适当维数的矩阵Y, D和E, 其中Y是对称的, 则

$$Y+DFE+E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}D^{\mathrm T}<0$$

对所有满足$FF^{\mathrm T}\leqslant I$的矩阵$F$成立, 当且仅当存在一个常数$\varepsilon>0$, 使得

$$Y+\varepsilon DD^{\mathrm T}+\varepsilon^{-1}E^{\mathrm T}E<0.$$

引理 2[15] 存在对称正定矩阵P使之满足

$$P=\begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\mathrm T} & U \end{bmatrix},\ P^{-1}=\begin{bmatrix} X & M \\ M^{\mathrm T} & V \end{bmatrix}$$

的充要条件是

$$\begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix}>0.$$

本文的目的是设计一个具有以下状态空间实现的鲁棒H_∞动态输出反馈控制器:

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t)=A_i^c\hat{x}(t)+B_i^cy(t), \\ u(t)=C_i^c\hat{x}(t)+D_i^cy(t), \end{cases} \forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}. \tag{2}$$

其中: $\hat{x}(t)\in\mathbb{R}^{n_c}$是控制器的状态, A_i^c, B_i^c, C_i^c, D_i^c $(i=1,2,\cdots,N)$是待定的控制器参数矩阵.

将控制器(2)和脉冲控制$\Delta\hat{x}(t)=\widehat{E}_k\hat{x}(t)$应用到系统(1)后得到的闭环系统是:

$$\begin{cases} \dot{\overline{x}}(t)=(\overline{A}_i+\overline{M}_iF_i\overline{N}_i)\overline{x}(t)+\overline{D}_i\omega(t), \\ \qquad t\neq t_k, \\ \Delta\overline{x}(t)=\overline{E}_k\overline{x}(t), t=t_k, \\ z(t)=\overline{C}_i\overline{x}(t), \\ \overline{x}(0)=0, \qquad \forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}. \end{cases} \tag{3}$$

其中:

$$\overline{x}=\begin{bmatrix}x\\ \hat{x}\end{bmatrix},\overline{A}_i=\begin{bmatrix}A_i+B_iD_i^cC_i^2 & B_iC_i^c\\ B_i^cC_i^2 & A_i^c\end{bmatrix},$$

$$\overline{D}_i=\begin{bmatrix}D_i\\ 0\end{bmatrix},\ \overline{M}_i=\begin{bmatrix}M_i\\ 0\end{bmatrix},\ \overline{C}_i=\begin{bmatrix}C_i^1 & 0\end{bmatrix},$$

$$\overline{N}_i=\begin{bmatrix}N_i^1+N_i^2D_i^cC_i^2 & N_i^2C_i^c\end{bmatrix},$$

$$\overline{E}_k=\begin{bmatrix}E_k & 0\\ 0 & \widehat{E}_k\end{bmatrix}.$$

本文所要达到的目标就是使闭环系统(3)满足以下的鲁棒性质:

1) 当$\omega(t)=0$时, 对于给定的切换策略, 闭环系统是鲁棒稳定的.

2) 在零初始条件下, 对于所有的$\omega(t)\neq 0$, 均有

$$\int_0^\infty\|z(t)\|^2\mathrm{d}t\leqslant\gamma^2\int_0^\infty\|\omega(t)\|^2\mathrm{d}t.$$

3 主要结果(Main results)

下面利用Lyapunov函数法给出具有扰动的不确定脉冲切换系统鲁棒稳定且具有γ鲁棒性能的充分条件.

定理 1　对闭环系统(1) (2)在假设1和假设2成立的条件下, 设$\gamma>0$是给定的性能指标, 若存在一系列对称矩阵$\overline{P}_i>0$及常数$\varepsilon_i>0(i=1,2,\cdots,N)$, 使得对任意$i\in W=\{1,2,\cdots,N\}$下式成立

$$\begin{bmatrix}\overline{A}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i+\overline{P}_i\overline{A}_i & * & * & * & *\\ \overline{D}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i & -\gamma^2I & * & * & *\\ \overline{C}_i & 0 & -I & * & *\\ \overline{N}_i & 0 & 0 & -\varepsilon_iI & *\\ \overline{M}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_i^{-1}I\end{bmatrix}<0,\tag{4}$$

且满足

$$(I+\overline{E}_k)^{\mathrm T}\overline{P}_j(I+\overline{E}_k)<\overline{P}_i,k=1,2,\cdots,$$
$$\forall i,j\in W=\{1,2,\cdots,N\}.\tag{5}$$

则在控制器(2)和脉冲控制$\Delta\hat{x}(t)=\widehat{E}_k\hat{x}(t)$作用下系统(1)是鲁棒稳定的, 且满足$\gamma$鲁棒性能, 即闭环系统(3)鲁棒稳定且具有$\gamma$鲁棒性能.

证　定义指标函数:

$$\xi(t)=[\xi_1,\ \xi_2,\cdots,\ \xi_N]^{\mathrm T}.$$

其中: 当切换系统由第i个模式A_i描述时, $\xi_i(t)=1$; 否则, $\xi_i(t)=0,\forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}$.

则闭环系统(3)可以被重写为:

$$\begin{cases}\dot{\overline{x}}(t)=\sum\limits_{i=1}^N\xi_i(t)(\overline{A}_i+\overline{M}_iF_i\overline{N}_i)\overline{x}(t)+\\ \qquad\sum\limits_{i=1}^N\xi_i(t)\overline{D}_i\omega(t),t\neq t_k,\\ \Delta\overline{x}(t)=\overline{E}_k\overline{x}(t),\quad t=t_k,\\ z(t)=\sum\limits_{i=1}^N\xi_i(t)\overline{C}_i\overline{x}(t),\\ \overline{x}(0)=0,\quad \forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}.\end{cases}\tag{6}$$

对系统(6)取Lyapunov函数:

$$V(\overline{x}(t))=\overline{x}^{\mathrm T}(t)\overline{P}(\xi(t))\overline{x}(t).$$

其中: $\overline{P}(\xi(t))=\sum\limits_{i=1}^N\xi_i(t)\overline{P}_i$, 这里的$\overline{P}_i>0$对应于第$i$个模式$\overline{A}_i$, $\forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}$.

当$t\in(t_k,t_k^+)$时, 不妨假设子系统i是激活的, 则$V(\overline{x}(t))$沿系统(6)解轨迹的导数为:

$$\begin{aligned}\dot V(\overline{x}(t))=&\overline{x}^{\mathrm T}(t)[(\sum_{i=1}^N\xi_i(t)(\overline{A}_i+\overline{M}_iF_i\overline{N}_i)^{\mathrm T})\cdot\\ &(\sum_{i=1}^N\xi_i(t)\overline{P}_i)+(\sum_{i=1}^N\xi_i(t)\overline{P}_i)\cdot\\ &(\sum_{i=1}^N\xi_i(t)(\overline{A}_i+\overline{M}_iF_i\overline{N}_i))]\overline{x}(t)+\\ &2\overline{x}^{\mathrm T}(t)(\sum_{i=1}^N\xi_i(t)\overline{P}_i)(\sum_{i=1}^N\xi_i(t)\overline{D}_i)\omega(t)=\\ &\overline{x}^{\mathrm T}(t)[(\overline{A}_i+\overline{M}_iF_i\overline{N}_i)^{\mathrm T}\overline{P}_i+\overline{P}_i(\overline{A}_i+\\ &\overline{M}_iF_i\overline{N}_i)]\overline{x}(t)+2\overline{x}^{\mathrm T}(t)\overline{P}_i\overline{D}_i\omega(t),\\ &\forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}.\end{aligned}\tag{7}$$

根据Schur补性质, 条件(4)可以等价地写成:

$$\begin{bmatrix}\overline{A}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i+\overline{P}_i\overline{A}_i & * & *\\ \overline{D}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i & -\gamma^2I & *\\ \overline{C}_i & 0 & -I\end{bmatrix}+\varepsilon_i^{-1}\begin{bmatrix}\overline{N}_i^{\mathrm T}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\cdot$$
$$\begin{bmatrix}\overline{N}_i\,0\,0\end{bmatrix}+\varepsilon_i\begin{bmatrix}\overline{P}_i\overline{M}_i\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\overline{M}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i\,0\,0\end{bmatrix}<0,$$
$$\forall i\in W=\{1,2,\cdots,N\}.\tag{8}$$

由引理1知: 式(8)成立, 当且仅当对任意$i\in W=\{1,2,\cdots,N\}$下式成立

$$\begin{bmatrix}\overline{A}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i+\overline{P}_i\overline{A}_i & * & *\\ \overline{D}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i & -\gamma^2I & *\\ \overline{C}_i & 0 & -I\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{P}_i\overline{M}_i\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F_i\cdot$$
$$\begin{bmatrix}\overline{N}_i & 0 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{N}_i^{\mathrm T}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F_i^{\mathrm T}\begin{bmatrix}\overline{M}_i^{\mathrm T}\overline{P}_i & 0 & 0\end{bmatrix}<0.\tag{9}$$

即:

$$\begin{bmatrix} \varPi_i & * & * \\ \overline{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{P}_i & -\gamma^2 I & * \\ \overline{C}_i & 0 & -I \end{bmatrix} < 0. \tag{10}$$

其中:

$$\varPi_i = (\overline{A}_i + \overline{M}_i F_i \overline{N}_i)^{\mathrm{T}}\overline{P}_i + \overline{P}_i(\overline{A}_i + \overline{M}_i F_i \overline{N}_i),$$
$$\forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}.$$

由矩阵不等式(10)知: $\varPi_i < 0$.

而 $\overline{P}_i > 0,\ \forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}$.

所以当 $\omega(t) = 0,\ \overline{x}(t) \neq 0$ 时, 由式(7)可知:

$$\dot{V}(\overline{x}(t)) < 0. \tag{11}$$

当$t = t_k^+$时, 不妨假设系统从子系统i切换到子系统j, 由条件式(5), 则有:

$$\begin{aligned} & V(\overline{x}(t_k^+)) = \overline{x}^{\mathrm{T}}(t_k^+)\overline{P}(\xi(t_k^+))\overline{x}(t_k^+) = \\ & \overline{x}^{\mathrm{T}}(t_k)(I + \overline{E}_k)^{\mathrm{T}}(\sum_{i=1}^{N}\xi_i(t_k^+)\overline{P}_i)(I + \overline{E}_k)\overline{x}(t_k) = \\ & \overline{x}^{\mathrm{T}}(t_k)(I + \overline{E}_k)^{\mathrm{T}}\overline{P}_j(I + \overline{E}_k)\overline{x}(t_k) < \\ & \overline{x}^{\mathrm{T}}(t_k)\overline{P}_i\overline{x}(t_k) = V(\overline{x}(t_k)), \\ & \forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}. \end{aligned}$$

所以当$\overline{x}(t) \neq 0$时, 有

$$V(\overline{x}(t_k^+)) - V(\overline{x}(t_k)) < 0, \quad k = 1, 2, \cdots. \tag{12}$$

由不等式(11)(12)可知闭环系统(3)是鲁棒稳定的.

下面证明闭环系统(3)具有γ鲁棒性能.

考虑

$$J = \int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t - \gamma^2 \int_0^{\infty} \|\omega(t)\|^2 \mathrm{d}t.$$

则在零初始状态条件下

$$\begin{aligned} J = & \int_0^{\infty}[z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega + \dot{V}(\overline{x}(t))]\mathrm{d}t - V(\overline{x}(\infty)) = \\ & \int_o^{t_1}[z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega + \dot{V}(\overline{x}(t))]\mathrm{d}t + \\ & \int_{t_1^+}^{t_2}[z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega + \dot{V}(\overline{x}(t))]\mathrm{d}t + \cdots + \\ & \int_{t_k^+}^{\infty}[z^{\mathrm{T}}z - \gamma^2\omega^{\mathrm{T}}\omega + \dot{V}(\overline{x}(t))]\mathrm{d}t - \\ & V(\overline{x}(t))|_0^{t_1} - V(\overline{x}(t))|_{t_1^+}^{t_2} - \cdots - \\ & V(\overline{x}(t))|_{t_k^+}^{\infty} - V(\overline{x}(\infty)) \leqslant \\ & \int_0^{t_1} \begin{bmatrix} \overline{x}^{\mathrm{T}} & \omega^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} (\begin{bmatrix} \overline{C}_i^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_i & 0 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} \varPi_i & * \\ \overline{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{P}_i & -\gamma^2 I \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \omega \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \int_{t_1^+}^{t_2} \begin{bmatrix} \overline{x}^{\mathrm{T}} & \omega^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \cdot \\ & (\begin{bmatrix} \overline{C}_j^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_j & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varPi_j & * \\ \overline{D}_j^{\mathrm{T}}\overline{P}_j & -\gamma^2 I \end{bmatrix}) \begin{bmatrix} \overline{x} \\ \omega \end{bmatrix} \mathrm{d}t + \\ & \cdots - [V(\overline{x}(t_1)) - V(\overline{x}(t_1^+))] - [V(\overline{x}(t_2)) - \\ & V(\overline{x}(t_2^+))] - \cdots - 2V(\overline{x}(\infty)), \\ & \forall i, j \in W = \{1, 2, \cdots, N\}. \end{aligned}$$

根据矩阵的Schur补性质, 式(10)等价于

$$\begin{bmatrix} \overline{C}_i^{\mathrm{T}} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{C}_i & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varPi_i & * \\ \overline{D}_i^{\mathrm{T}}\overline{P}_i & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0, \tag{13}$$
$$\forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}.$$

所以由式(12)(13)可知: $J < 0$, 即

$$\int_0^{\infty} \|z(t)\|^2 \mathrm{d}t < \gamma^2 \int_0^{\infty} \|\omega(t)\|^2 \mathrm{d}t.$$

所以系统(3)具有γ 鲁棒性能. 故定理得证.

注 1 定理1中的矩阵不等式(4)不是线性的, 因此无法应用MATLAB软件求解.

下面将采用变量替换法[14], 将式(4)转化为易于求解的线性矩阵不等式(LMI)形式.

由引理2知: 将矩阵$\overline{P}_i$和$\overline{P}_i^{-1}$进行如下分块:

$$\overline{P}_i = \begin{bmatrix} Y_i & N_{ii} \\ N_{ii}^{\mathrm{T}} & U_i \end{bmatrix},\ \overline{P}_i^{-1} = \begin{bmatrix} X_i & M_{ii} \\ M_{ii}^{\mathrm{T}} & V_i \end{bmatrix}.$$

其中: $X_i,\ Y_i \in \mathbb{R}^{n\times n}$是对称矩阵, 由$\overline{P}_i\overline{P}_i^{-1} = I$可得

$$\overline{P}_i \begin{bmatrix} X_i & I \\ M_{ii}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y_i \\ 0 & N_{ii}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$
$$\forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}.$$

若定义

$$F_i^1 = \begin{bmatrix} X_i & I \\ M_{ii}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix},\ F_i^2 = \begin{bmatrix} I & Y_i \\ 0 & N_{ii}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

则

$$\overline{P}_i F_i^1 = F_i^2, \quad \forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}.$$

定义如下的变量替换公式:

$$\begin{aligned} \widehat{A}_i = & Y_i(A_i + B_i D_i^c C_i^2)X_i + N_{ii}B_i^c C_i^2 X_i + \\ & Y_i B_i C_i^c M_{ii}^{\mathrm{T}} + N_{ii}A_i^c M_{ii}^{\mathrm{T}}, \\ \widehat{B}_i = & Y_i B_i D_i^c + N_{ii}B_i^c, \\ \widehat{C}_i = & D_i^c C_i^2 X_i + C_i^c M_{ii}^{\mathrm{T}}, \\ \widehat{D}_i = & D_i^c, \quad \forall i \in W = \{1, 2, \cdots, N\}. \end{aligned} \tag{14}$$

对不等式(4)左边的矩阵分别左乘矩阵diag$\{F_i^{1^{\mathrm{T}}},$ $I,\ I\}$和右乘矩阵diag$\{F_i^1,\ I,\ I\}$并利用变量替换公式(14)和引理2, 可得矩阵不等式(4)等价于下面的

线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \varLambda_{i1} & * & * & * & * & * \\ \varLambda_{i2} & \varLambda_{i3} & * & * & * & * \\ D_i^{\mathrm{T}} & D_i^{\mathrm{T}}Y_i & -\gamma^2 I & * & * & * \\ C_i^1X_i & C_i^1 & 0 & -I & * & * \\ \varLambda_{i4} & \varLambda_{i5} & 0 & 0 & -\varepsilon_i I & * \\ M_i^{\mathrm{T}} & M_i^{\mathrm{T}}Y_i & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_i^{-1}I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

和

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & Y_i \end{bmatrix} > 0. \quad (16)$$

其中:

$$\varLambda_{i1} = X_iA_i^{\mathrm{T}} + A_iX_i + \widehat{C}_i^{\mathrm{T}}B_i^{\mathrm{T}} + B_i\widehat{C}_i,$$
$$\varLambda_{i2} = \widehat{A}_i + A_i^{\mathrm{T}} + (B_i\widehat{D}_iC_i^2)^{\mathrm{T}},$$
$$\varLambda_{i3} = A_i^{\mathrm{T}}Y_i + Y_iA_i + (\widehat{B}_iC_i^2)^{\mathrm{T}} + \widehat{B}_iC_i^2,$$
$$\varLambda_{i4} = N_i^1X_i + N_i^2\widehat{C}_i,$$
$$\varLambda_{i5} = N_i^1 + N_i^2\widehat{D}_iC_i^2,\ \forall i \in W = \{1,2,\cdots,N\}.$$

由此可得下面的定理.

定理 2 对闭环系统(3)在假设1, 2成立的条件下, 设$\gamma > 0$是给定的性能指标, 如果存在一系列对称矩阵X_i, Y_i, 矩阵$\widehat{A}_i$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$, $\widehat{D}_i$及常数$\varepsilon_i > 0 (i = 1,2,\cdots,N)$使得线性矩阵不等式(15)和(16)是可行的, 且满足:

$$(I+\overline{E}_k)^{\mathrm{T}}\overline{P}_j(I+\overline{E}_k) < \overline{P}_i,$$
$$k = 1,2,\cdots,\ \forall i,j \in W = \{1,2,\cdots,N\}. \quad (17)$$

则闭环系统(3)鲁棒稳定, 且具有γ 鲁棒性能.

注 2 采用Lyapunov函数$V = x^{\mathrm{T}}P(\xi(t))x$与通常取的$V = x^{\mathrm{T}}Px$相比较, 保守性会减少.

综上所述及定理2可得动态输出反馈控制器的设计步骤:

第1步 解线性矩阵不等式(15)(16), 得到对称正定解阵X_i, Y_i和矩阵$\widehat{A}_i$, $\widehat{B}_i$, $\widehat{C}_i$, $\widehat{D}_i$, $\forall i \in W = \{1,2,\cdots,N\}$.

第2步 在得到矩阵X_i, Y_i的值后, 计算矩阵$I - X_iY_i$, 然后把它进行奇异值分解, 即$M_{ii}N_{ii}^{\mathrm{T}} = I - X_iY_i$, 式中$M_{ii}$, N_{ii}为满秩矩阵, $\forall i \in W = \{1,2,\cdots,N\}$.

第3步 解下列矩阵方程, 求对称正定矩阵$\overline{P}_i$.

$$\overline{P}_i \begin{bmatrix} X_i & I \\ M_{ii}^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y_i \\ 0 & N_{ii}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$
$$\forall i \in W = \{1,2,\cdots,N\}.$$

第4步 利用变量替换公式(14), 得到控制器参数矩阵A_i^c, B_i^c, C_i^c, D_i^c.

$$D_i^c = \widehat{D}_i,$$
$$C_i^c = (\widehat{C}_i - D_i^cC_i^2X_i)(M_{ii}^{\mathrm{T}})^{-1},$$
$$B_i^c = N_{ii}^{-1}(\widehat{B}_i - Y_iB_iD_i^c),$$
$$A_i^c = N_{ii}^{-1}[\widehat{A}_i - Y_i(A_i + B_iD_i^cC_i^2)X_i](M_{ii}^{\mathrm{T}})^{-1} - B_i^cC_i^2X_i(M_{ii}^{\mathrm{T}})^{-1} - N_{ii}^{-1}Y_iB_iC_i^c,$$
$$\forall i \in W = \{1,2,\cdots,N\}.$$

第5步 首先令$\widehat{E}_k$为零矩阵, 判断是否满足式(17), 若满足, 则系统不需要进行脉冲控制, 否则, 解满足式(17)的脉冲控制矩阵$\widehat{E}_k$.

4 仿真算例(Simulation example)

考虑系统(1), $i = 1,2$. 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ C_1^1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$
$$C_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$
$$B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ D_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.5 \end{bmatrix},$$
$$C_2^1 = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},\ C_2^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$
$$M_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},\ N_1^1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.6 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$
$$N_1^2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},\ M_2 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$
$$N_2^1 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ -0.8 & 0.3 \end{bmatrix},\ N_2^2 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix},$$
$$F_1 = F_2 = \begin{bmatrix} \sin\ t & 0 \\ 0 & \cos\ t \end{bmatrix},\ E_k = \begin{bmatrix} -0.6 & 0 \\ 0 & -0.6 \end{bmatrix}.$$

解线性矩阵不等式(15)和(16), 得到可行解:

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1.2147 & -0.0648 \\ -0.0648 & 1.0413 \end{bmatrix},$$
$$Y_1 = \begin{bmatrix} 3.1457 & 0.0393 \\ 0.0393 & 2.2772 \end{bmatrix},$$
$$\widehat{A}_1 = \begin{bmatrix} 1.8963 & -0.7105 \\ -0.7105 & 9.2126 \end{bmatrix},$$
$$\widehat{B}_1 = \begin{bmatrix} -0.0187 & -0.3294 \\ -0.3294 & 0.4729 \end{bmatrix},$$
$$\widehat{C}_1 = \begin{bmatrix} 1.2476 & -1.6159 \\ -1.6159 & -1.3650 \end{bmatrix},$$

$$\widehat{D}_1=\begin{bmatrix}0.2318 & -0.1259\\ -0.1259 & -0.2654\end{bmatrix},$$

$$X_2=\begin{bmatrix}1.2322 & 0.1053\\ 0.1053 & 0.6748\end{bmatrix},$$

$$Y_2=\begin{bmatrix}2.2218 & -0.0139\\ -0.0139 & 3.3604\end{bmatrix},$$

$$\widehat{A}_2=\begin{bmatrix}0.2598 & -1.3526\\ -1.3526 & 1.0032\end{bmatrix},$$

$$\widehat{B}_2=\begin{bmatrix}1.6550 & -1.7429\\ -1.7429 & -0.0811\end{bmatrix},$$

$$\widehat{C}_2=\begin{bmatrix}0.3141 & 0.0611\\ 0.0611 & -1.5673\end{bmatrix},$$

$$\widehat{D}_2=\begin{bmatrix}0.2198 & 0.7564\\ 0.7564 & -0.7430\end{bmatrix},$$

$$\varepsilon_1=0.2609,\ \varepsilon_2=0.2559.$$

进一步运用MATLAB-LMI工具箱计算得满秩矩阵:

$$M_{11}=\begin{bmatrix}-2.8172 & 0.1316\\ 0.2744 & 1.3508\end{bmatrix},$$

$$N_{11}=\begin{bmatrix}0.9966 & -0.0819\\ -0.0819 & -0.9966\end{bmatrix},$$

$$M_{22}=\begin{bmatrix}-1.7074 & -0.4613\\ -0.7585 & 1.0385\end{bmatrix},$$

$$N_{22}=\begin{bmatrix}0.8981 & 0.4398\\ 0.4398 & -0.8981\end{bmatrix}.$$

正定对称矩阵:

$$\overline{P}_1=\begin{bmatrix}3.1457 & 0.0393 & 0.9966 & -0.0819\\ 0.0393 & 2.2772 & -0.0819 & -0.9966\\ 0.9966 & -0.0819 & 0.4327 & 0.0231\\ -0.0819 & -0.9966 & 0.0231 & 0.7597\end{bmatrix},$$

$$\overline{P}_2=\begin{bmatrix}2.2218 & -0.0139 & 0.8981 & 0.4398\\ -0.0139 & 3.3604 & 0.4398 & -0.8981\\ 0.8981 & 0.4398 & 0.6490 & 0.0972\\ 0.4398 & -0.8981 & 0.0972 & 0.6100\end{bmatrix}.$$

则满足条件式(17)的解:

$$\widehat{E}_k=\begin{bmatrix}-0.6 & 0\\ 0 & -0.6\end{bmatrix}.$$

由变量替换公式(14)可计算出控制器的参数矩阵:

$$A_1^c=\begin{bmatrix}-3.3876 & -6.3173\\ 0.8854 & -9.6067\end{bmatrix},$$

$$B_1^c=\begin{bmatrix}0.7160 & -0.8003\\ -0.0251 & -1.0101\end{bmatrix},$$

$$C_1^c=\begin{bmatrix}-0.3871 & -1.0095\\ 0.4829 & -0.9101\end{bmatrix},$$

$$D_1^c=\begin{bmatrix}0.2318 & -0.1259\\ -0.1259 & -0.2654\end{bmatrix},$$

$$A_2^c=\begin{bmatrix}-2.3807 & 1.5454\\ -0.1170 & -4.2751\end{bmatrix},$$

$$B_2^c=\begin{bmatrix}-0.5037 & -0.9086\\ 3.6985 & -5.9768\end{bmatrix},$$

$$C_2^c=\begin{bmatrix}0.1205 & -0.3670\\ 0.6367 & -0.6380\end{bmatrix},$$

$$D_2^c=\begin{bmatrix}0.2198 & 0.7564\\ 0.7564 & -0.7430\end{bmatrix}.$$

由此可见, 闭环系统(3)鲁棒稳定且具有γ鲁棒性能, 其状态响应曲线见图1.

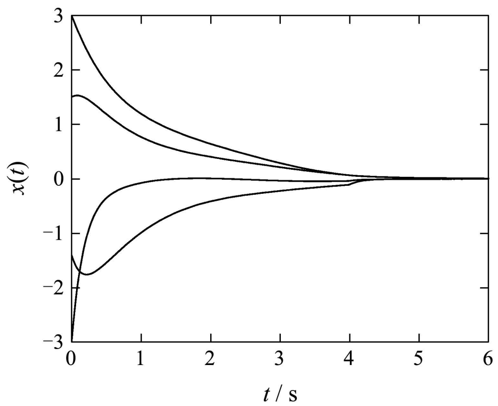

图 1 系统的状态响应曲线

Fig. 1 State response of the system

5 结论(Conclusion)

本文研究了一类具有广泛意义下的不确定脉冲切换系统的鲁棒H_∞控制问题. 利用变量替换法来构造线性矩阵不等式(LMI), 以此为充分条件来验证不确定脉冲切换系统在动态输出反馈和脉冲控制下是鲁棒稳定的, 且满足γ鲁棒性能. 这种检验方法简化了计算过程, 同时采用的Lyapunov函数法也降低了保守性, 并得到了基于MATLAB软件的鲁棒H_∞动态输出反馈控制器的设计方法. 最后仿真算例验证了所得定理是正确有效的.

参考文献(References):

[1] BACK A, GUCKENHEIMER J, MYERS M A. *Dynamical Simulation Facility for Hybrid Systems*[M]. New York: Springer, 1993.

[2] HESPANHA J P, MORSE A S. Switching between stabilizing controllers[J]. *Automatic*, 2002, 38(11): 1905 – 1917.

[3] NIE H, ZHAO J. Hybrid state feedback H_∞ robust control for a class of linear systems with time-varying norm-bounded uncertainty-tions[C] // *Proceedings of the American Control Conference*. Denver: American Automatic Control Council, 2003: 3608 – 3613.

[4] 张霄力, 刘玉忠, 赵军. 一类离散切换系统的渐近稳定性[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(5): 774 – 776.
(ZHANG Xiaoli, LIU Yuzhong, ZHAO Jun. Asymptotic stability of a class of discrete switched systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(5): 774 – 776.)

[5] ISHII H, FRANCIS B A. Stabilizing a linear system by switching control with dwell-time[C] // *Proceedings of American Control Conference*. Arlington, VA, USA: American Automatic Control Council, 2001: 1876 – 1881.

[6] ZHAI G S, HU B, YASUDA K, et al. Stability analysis of switched systems with stable and unstable subsystems: an average dwell time approach[C] // *Proceedings of American Control Conference*. Chicago, lllinois: American Automatic Control Council, 2002: 200 – 204.

[7] PETTERSSON S, LENNARTSON B. Stability and robustness for hybrid systems[C] // *Proceedings of the 35th IEEE Conference on Decision and Control*. Kobe, Japan: IEEE Press, 1996: 1202 – 1207.

[8] 孙文安, 赵军. 基于LMIs 的不确定线性切换系统H_∞ 鲁棒控制[J]. 控制与决策, 2005, 20(6): 650 – 655.
(SUN Wenan, ZHAO Jun. H_∞ robust control of uncertain switched linear systems based on LMIs[J]. *Control and Decision*, 2005, 20(6): 650 – 655.)

[9] DAAFOUZ J, RIEDINGER P, IUNG C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1883 – 1887.

[10] JI Z J, WANG L, XIE G M. Stabilizing discrete-time switched systems via observer-based static output feedback[C] // *IEEE Internet Conference SMS*. Washington: IEEE Press, 2003: 2545 – 2550.

[11] LIU B, LIU X Z, LIAO X Z. Robust stability of uncertain impulsive dynamical systems[J]. *Journal Mathematics Analysis*, 2004, 290(2): 519 – 533.

[12] 许弘雷, 刘新芝. 一类受扰动脉冲切换系统鲁棒指数镇定[J]. 自动化技术与应用, 2004, 23(11): 14 – 16.
(XU Honglei, LIU Xinzhi. Robust exponential stabilization of a class of impulsive switched systems[J]. *Techniques of Automation and Applications*, 2004, 23(11): 14 – 16.)

[13] 张红涛, 刘新芝. 关于一类脉冲切换系统的鲁棒H_∞控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(2): 261 – 266.
(ZHANG Hongtao, LIU Xinzhi. Robust H-infinity control on impulsive switched systems with disturbance[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(2): 261 – 266.)

[14] 俞立. 鲁棒控制–线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control-LMI Method*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

[15] 刘红霞, 胥布工, 朱学峰, 等. 关联时滞大系统的H_∞动态输出反馈控制–LMI方法[J]. 华南理工大学学报, 2001, 29(11): 37 – 41.
(LIU Hongxia, XU Bugong, ZHU Xuefeng, et al. H_∞dynamic output feedback control for interconnected large-scale systems with time-delay[J]. *Journal of South China University of Technology*, 2001, 29(11): 37 – 41.)

作者简介:

李　娇　(1981—), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为切换系统的稳定性、鲁棒控制和观测器设计, E-mail: lijiao198107@yahoo.com.cn;

刘玉忠　(1963—), 男, 教授, 硕士研究生导师, 主要研究方向包括非线性系统、混杂系统和网络控制系统等, E-mail: liuyuzhong@sina.com.