

网络控制系统的 H_∞ 状态反馈控制器设计

郭亚锋, 李少远

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

摘要: 研究了对网络控制系统如何设计 H_∞ 状态反馈控制器. 这些网络控制系统中存在不确定的网络时延和数据包丢失. 当网络时延和连续丢包有界时, 可以将系统建模为具有时变输入时滞的系统, 利用Lyapunov-Krasovskii泛函, 推导出网络控制系统渐近稳定的充分条件. 将这些充分条件转化为带等式约束的LMIs, 并对他们进行迭代求解, 就可以构造 H_∞ 控制器. 与现有结果相比, 在推导稳定性条件时本文对交叉项采取了更紧的界定, 并且在设计控制器时无需知道调节参数. 因此, 本文提出的方法具有更低的保守性. 仿真结果说明了本方法的正确性和有效性.

关键词: 网络控制系统; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式; 时延; 数据包丢失

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

H-infinity state-feedback controller design for networked control systems

GUO Ya-feng, LI Shao-yuan

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The H-infinity state-feedback controller design for networked control systems (NCSs) with uncertain network-induced delay and data packet dropout is studied. Given the bound of data packet losses and the bound of network-induced delays, the NCS can be modeled as a system with time-varying input delay. Based on the Lyapunov-Krasovskii functional, the sufficient conditions for asymptotic stability of the NCS are derived. These sufficient conditions are transformed into LMIs with equation constraints, and the H-infinity controller can be constructed by iteratively solving these LMIs. Compared with the existing results, tighter bounding of the cross terms is employed in deriving stability conditions; moreover, the knowledge of tuning parameters is not required in designing the controller. Therefore, the proposed method is less conservative in design. Simulation example shows the validity and feasibility of the results.

Key words: networked control systems; H-infinity control; linear matrix inequality; time-delay; data packet dropout

1 引言(Introduction)

近年来, 随着控制系统规模的日益扩大和控制性能要求的不断提高, 系统中各种传感器、控制器、执行器等部件越来越多, 导致更多的控制系统采用网络连接各种部件. 这种由网络连接控制系统中各种部件、使之成为闭环的反馈系统称为网络控制系统(networked control systems, NCS)^[1]. 与传统的点对点结构相比, NCS可以大大减少各种连接线缆、降低成本、易于维护和扩展. 因此, NCS在汽车、航空航天系统和工业制造领域内得到了广泛的应用. 但是由于网络带宽的限制, 各种节点发送信息时不可避免地出现信息碰撞和数据重发, 使得信息传输存在

延迟甚至丢失. 众所周知, 网络时延和数据包丢失会降低控制系统的性能, 甚至使系统失稳^[1,2]. 因此时延和数据包丢失成为NCS研究中的一个重点.

文献[1]把网络控制系统建模为混杂系统, 给出了当网络时延小于一个采样周期时, 系统稳定的充分条件. 文献[3]研究了时延为随机分布时, 网络控制系统的随机最优控制问题. 文献[4]把文献[3]的结果扩展到了时延大于一个采样周期的情况, 但是文献[4]假定信号传输过程中没有产生时序错乱, 这对于实际的NCS要求过于严格. 文献[5,6]针对网络时延为有限状态的马尔可夫链控制的情况, 研究了NCS的稳定性和控制问题. 注意到以上文献只考

收稿日期: 2006-11-26; 收修改稿日期: 2007-07-09.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60534020, 60604018, 60774015); 国家“863”计划资助项目(2006AA04Z173); 高校博士点基金资助项目(20060248001).

虑了存在时延的NCS控制问题, 而没有考虑数据包丢失的情况. 文献[7]基于脉冲微分系统研究了具有数据包丢失的网络控制系统的稳定性问题, 但是文献[7]假定不存在网络时延. 而在现实的NCS中, 时延和数据包丢失都是普遍存在的. 文献[8,9]考虑了有不确定时延和数据包丢失的情况, 其中文献[8]把NCS描述为时滞微分方程(delay differential equations, DDE), 但是由于文献[8]采用了过于保守的Razumikhin定理研究NCS的稳定性, 以至于得到的最大容许时延过小. 文献[9]利用了保守性较低的Lyapunov-Krasovskii泛函研究了NCS的稳定性, 但是在设计控制器时需要给定调节参数, 从而又增加了设计的保守性.

针对文献[8,9]中存在的问题, 本文基于Lyapunov-Krasovskii泛函, 研究了 H_∞ 状态反馈控制问题, 给出了系统稳定的充分条件和 H_∞ 控制器的设计方法. 与现有文献相比, 在稳定性条件的推导过程中, 本文对交叉项进行了更紧的界定, 并且提出的设计方法不需要给定调节参数, 从而具有更低的保守性.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑图1所示的NCS模型, 假定传感器是时间驱动的, 控制器和执行器是事件驱动的.

设被控对象的动态方程为:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_1w(t), \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u \in \mathbb{R}^m$ 是控制输入, $w \in \mathbb{R}^q$ 是外部扰动, $z \in \mathbb{R}^p$ 是系统输出, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{n \times q}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 是常数矩阵.

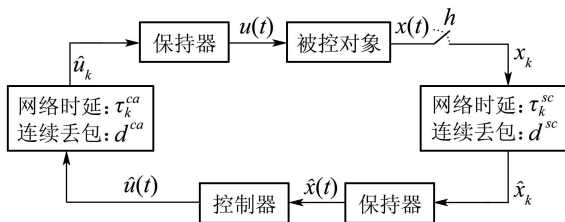


图1 具有网络时延和数据包丢失的NCS结构

Fig. 1 The structure of the NCS with network-induced delay and data packet dropouts

由于在NCS中网络带宽的限制, 以及许多节点共享网络, 以至于在传输信息时不可避免的存在信息的碰撞和重发, 使得信息的传输不可避免地存在着延迟和数据包丢失. 设从传感器到控制器的网络时延为 $\tau_k^{sc} \in [0, \bar{\tau}^{sc}]$, 从控制器到执行器的网络时延为 $\tau_k^{ca} \in [0, \bar{\tau}^{ca}]$, 从传感器到控制器的连续丢包个数为 $d^{sc} \in [0, \bar{d}^{sc}]$, 从控制器到执行器

的连续丢包个数为 $d^{ca} \in [0, \bar{d}^{ca}]$. 由于本文考虑的是无记忆的静态状态反馈控制器, 因此可以等价地把 τ_k^{sc} 和 τ_k^{ca} 直接加起来考虑控制回路的总时延 $\tau_k = \tau_k^{sc} + \tau_k^{ca} \in [0, \bar{\tau}]$, $\bar{\tau} = \bar{\tau}^{sc} + \bar{\tau}^{ca}$. 同理也可以把数据包丢失合并起来考虑 $d = d^{sc} + d^{ca} \in [0, \bar{d}]$, $\bar{d} = \bar{d}^{sc} + \bar{d}^{ca}$. 这样, 图1就可以等效为图2. 下面的分析都将根据图2所示的情况.

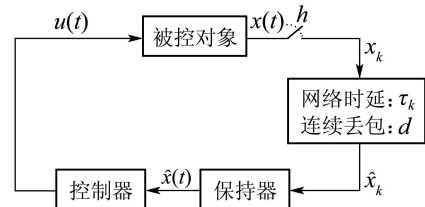


图2 等价的NCS结构

Fig. 2 The equivalent structure of the NCS

当不存在数据包丢失时, kh 时刻的采样信号到达控制器的时刻为 $kh + \tau_k$, 因此有

$$u(t) = Kx(kh), \forall t \in [kh + \tau_k, (k+1)h + \tau_{k+1}]. \quad (2)$$

定义

$$\eta(t) = t - kh, \quad (3)$$

则有

$$kh = t - \eta(t), \quad (4)$$

因此由(2)和(4), 系统(1) 可以重新写成如下的时变时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t - \eta(t)) + B_1w(t), \\ z(t) = Cx(t) + Dw(t), \end{cases} \quad (5)$$

其中时滞 $\eta(t)$ 的变化范围为

$$\eta(t) \in [\min_k \tau_k, h + \max_k \tau_{k+1}] = [0, h + \bar{\tau}], \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

注1 由 $\eta(t)$ 的定义可知, $\eta(t)$ 是分段连续的函数, 每当传感器信号到达控制器时 $\eta(t)$ 发生跳变, 并且除跳变点外, $\dot{\eta}(t) = 1$.

当考虑数据包丢失的影响时, 数据包丢失也可以等价的看作是时滞. 此时 $\eta(t)$ 的范围会扩大为

$$\eta(t) \in [\min_k \tau_k, (\bar{d} + 1)h + \max_k \tau_{k+\bar{d}+1}] = [0, \bar{\eta}], \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (7)$$

其中 $\bar{\eta} = (\bar{d} + 1)h + \bar{\tau}$.

既然具有网络时延和数据包丢失的NCS 可以建模为具有时变时滞 $\eta(t)$ 的系统(5), 其中 $\eta(t)$ 的范围由式(7)给定, 以下我们将针对系统(5)进行研究.

定义 1 给定正常数 $\gamma > 0$, 如果: a) 闭环系统(5)是渐近稳定的; b) 在零初始条件下, 满足约束条件 $\|z(t)\|_2 \leq \gamma \|w(t)\|_2$. 则闭环系统(5)被称为满足 H_∞ 性能指标 γ .

本文的研究目的是构造适当的状态反馈增益 K , 使得闭环系统(5)满足 H_∞ 性能指标 γ .

3 NCS的 H_∞ 性能分析(H_∞ performance analysis for NCS)

本节讨论在有网络时延和数据包丢失的情况下, 闭环系统(5) 渐近稳定和满足 H_∞ 性能指标的充分条件.

为了得到本节的结果, 我们首先给出如下引理.

引理 1^[10] 对于任意适当维数的向量 a, b 和矩阵 N, X, Y, Z , 其中 X, Z 是对称的, 若 $\begin{bmatrix} X & Y \\ Y^T & Z \end{bmatrix} \geq 0$, 则

$$-2a^T N b \leq \inf_{X, Y, Z} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - N \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

下面的定理将给出闭环系统(5)渐近稳定的充分条件.

定理 1 对给定的 $\gamma > 0, \bar{\eta} > 0$ 和控制器 K , 若存在适当维数的矩阵 $P > 0, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2$ 和 $Z > 0$, 满足下面的LMIs, 则闭环系统(5)是渐近稳定的:

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ * & \Psi_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0. \quad (9)$$

其中:

$$\Psi_{11} = PA + A^T P + Y_1 + Y_1^T + \bar{\eta} X_1 + \bar{\eta} A^T Z A,$$

$$\Psi_{12} = PBK - Y_1 + Y_2^T + \bar{\eta} X_2 + \bar{\eta} A^T Z B K,$$

$$\Psi_{22} = -Y_2 - Y_2^T + \bar{\eta} X_3 + \bar{\eta} K^T B^T Z B K,$$

$$X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ * & X_3 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

证 考虑如下的Lyapunov泛函:

$$V(t) = V_1 + V_2, \quad (10)$$

这里:

$$V_1 = x^T(t) P x(t),$$

$$V_2 = \int_{-\bar{\eta}}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds d\theta,$$

其中 $P > 0, Z > 0$.

令

$$\xi^T(t) = [x^T(t) \quad x^T(t - \eta(t))],$$

分别求 V_1 和 V_2 对时间的导数, 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= 2x^T(t) P \dot{x}(t) = \\ &2x^T(t) P \begin{bmatrix} A & B K \end{bmatrix} \xi(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 &= \int_{-\bar{\eta}}^0 \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \dot{x}^T(t + \theta) Z \dot{x}(t + \theta) d\theta = \\ &\bar{\eta} \dot{x}^T(t) Z \dot{x}(t) - \int_{t-\bar{\eta}}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds = \\ &\bar{\eta} \xi^T(t) \begin{bmatrix} A^T \\ K^T B^T \end{bmatrix} Z \begin{bmatrix} A & B K \end{bmatrix} \xi(t) - \\ &\int_{t-\bar{\eta}}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (12)$$

注意到

$$x(t) - x(t - \eta(t)) - \int_{t-\eta(t)}^t \dot{x}(s) ds = 0,$$

因此对适当维数的任意矩阵 $N = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix}$, 总是有下式成立

$$0 = \xi^T(t) N (x(t) - x(t - \eta(t)) - \int_{t-\eta(t)}^t \dot{x}(s) ds), \quad (13)$$

即

$$\begin{aligned} 0 &= 2\xi^T(t) N (x(t) - x(t - \eta(t))) - \\ &2\xi^T(t) N \int_{t-\eta(t)}^t \dot{x}(s) ds. \end{aligned} \quad (14)$$

由引理1并注意到式(14)可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \\ &2\xi^T(t) N (x(t) - x(t - \eta(t))) + \\ &\int_{t-\eta(t)}^t \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} X & Y - N \\ Y^T - N^T & Z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ \dot{x}(s) \end{bmatrix} ds = \\ &2\xi^T(t) Y (x(t) - x(t - \eta(t))) + \\ &\eta(t) \xi^T(t) X \xi(t) + \int_{t-\eta(t)}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds \leq \\ &2\xi^T(t) Y (x(t) - x(t - \eta(t))) + \bar{\eta} \xi^T(t) X \xi(t) + \\ &\int_{t-\bar{\eta}}^t \dot{x}^T(s) Z \dot{x}(s) ds, \end{aligned} \quad (15)$$

由式(11)(12)和(15)得到:

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &\leq \\ &\bar{\eta} \xi^T(t) X \xi(t) + 2\xi^T(t) Y [I \quad -I] \xi(t) + \\ &\bar{\eta} ([A \quad B K] \xi(t))^T Z [A \quad B K] \xi(t) + \\ &2x^T(t) P [A \quad B K] \xi(t) = \\ &\xi^T(t) \Psi \xi(t). \end{aligned} \quad (16)$$

根据Lyapunov-Krasovskii定理, 如果存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\dot{V}(t) \leq -\varepsilon \|x\|^2$, 则系统(5)是渐近稳定的. 因此若式(8)成立, 则闭环系统(5)是渐近稳定的.

证毕.

本文得到的NCS稳定的充分条件比文献[9]的简单: 文献[9]中的NCS稳定的充分条件需要8个待求矩阵; 而本文中只要7个待求矩阵.

注 2 在稳定性分析中, 本文采用了引理1避免了文献[9]中的不等式 $-2a^T b \leq a^T T^{-1} a + b^T T b$, $T > 0$ 中 $-2a^T b \leq 0$ 的情形. 因此得到了较小保守性的结果. 而且从第4节中还可以看出, 本文得到的稳定性条件还具有如下的优点: 基于定理1或如下定理2的控制器设计, 不需要像文献[8]在设计控制器时要人为地给定一些调节参数. 从而减少了保守性的引入.

讨论了NCS的渐近稳定性之后, 下面将给出NCS满足 H_∞ 性能的条件.

定理 2 对给定的 $\gamma > 0$, $\bar{\eta} > 0$ 和控制器 K , 若存在适当维数的矩阵 $P > 0$, X_1 , X_2 , X_3 , Y_1 , Y_2 和 $Z > 0$, 满足下面的LMIs, 则闭环系统(5)满足 H_∞ 性能指标 γ :

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & PB_1 + \bar{\eta}A^T Z B_1 & C^T \\ * & \Psi_{22} & \bar{\eta}K^T B^T Z B_1 & 0 \\ * & * & \bar{\eta}B_1^T Z B_1 - \gamma^2 I & D^T \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} X & Y \\ * & Z \end{bmatrix} \geq 0, \quad (18)$$

其中 Ψ_{11} , Ψ_{12} , Ψ_{22} , X 和 Y 的定义和定理1中相同.

证 由式(17)可推出 $\Psi < 0$, 因此系统(5)是渐近稳定的, 且式(10)是系统(5)的一个Lyapunov泛函.

根据Schur补引理, 式(17)等价于:

$$\Xi = \begin{bmatrix} C^T \\ 0 \\ D^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & PB_1 + \bar{\eta}A^T Z B_1 \\ * & \Psi_{22} & \bar{\eta}K^T B^T Z B_1 \\ * & * & \bar{\eta}B_1^T Z B_1 - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (19)$$

对任意的 $T > 0$, 考虑

$$J_T = \int_0^T \|z(t)\|^2 dt - \gamma^2 \int_0^T \|w(t)\|^2 dt, \quad (20)$$

则在零初始状态条件下,

$$J_T = \int_0^T [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t)] dt =$$

$$\int_0^T [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t)] dt - V(T), \quad (21)$$

根据定理1中 $\dot{V}(t)$ 的推导过程, 并注意到现在 $w(t) \neq 0$, 可得

$$\dot{V}(t) \leq \begin{bmatrix} \xi(t) \\ w(t) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} & PB_1 + \bar{\eta}A^T Z B_1 \\ * & \Psi_{22} & \bar{\eta}K^T B^T Z B_1 \\ * & * & \bar{\eta}B_1^T Z B_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi(t) \\ w(t) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

把式(22)代入(21)中可得

$$J_T \leq \int_0^T \zeta^T(t) \Xi \zeta(t) dt - V(T), \quad (23)$$

其中

$$\zeta^T(t) = [\xi^T(t) \quad w^T(t)].$$

由式(19)和式(23), 可得

$$\int_0^T [z^T(t)z(t) - \gamma^2 w^T(t)w(t) + \dot{V}(t)] dt < 0, \quad (24)$$

进一步利用零初始条件得到

$$V(T) + \int_0^T z^T(t)z(t) dt < \gamma^2 \int_0^T w^T(t)w(t) dt. \quad (25)$$

由 $w(t) \in L_2[0, \infty)$ 及系统的渐近稳定性, 在上式两边令 $T \rightarrow \infty$, 得到

$$\|z\|_2^2 \leq \gamma^2 \|w\|_2^2.$$

证毕.

4 H_∞ 状态反馈控制器设计(H_∞ state-feedback controller design)

当控制器 K 给定时, 定理1和定理2中的条件是LMIs, 因此可以容易的确定闭环系统的稳定性和 H_∞ 性能. 但是当设计控制器时, 控制器参数 K 是待求的变量, 定理1和定理2中的矩阵不等式就变成了双线性矩阵不等式(bi-linear matrix inequality, BMI). 下面将研究如何求解控制器.

利用Schur补变换, 式(17)等价于

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & PB_1 & C^T & A^T \\ * & \Omega_{22} & 0 & 0 & K^T B^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D & B_1^T \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\eta}^{-1} Z^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (26)$$

其中:

$$\Omega_{11} = PA + A^T P + Y_1 + Y_1^T + \bar{\eta}X_1,$$

$$\Omega_{12} = PBK - Y_1 + Y_2^T + \bar{\eta}X_2,$$

$$\Omega_{22} = -Y_2 - Y_2^T + \bar{\eta}X_3.$$

设

$$P^{-1} = Q, \quad (27)$$

$$\Delta_1 = \text{diag}\{Q, Q, I, I, I\}, \quad (28)$$

$$\Delta_2 = \text{diag}\{Q, Q, Q\}. \quad (29)$$

式(26)两边同时左乘 Δ_1 和右乘 Δ_1 , 得到

$$\begin{bmatrix} \tilde{\Omega}_{11} & \tilde{\Omega}_{12} & B_1 & QC^T & QA^T \\ * & \tilde{\Omega}_{22} & 0 & 0 & F^T B^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D & B_1^T \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\eta}^{-1} Z^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (30)$$

其中:

$$\tilde{\Omega}_{11} = AQ + QA^T + \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_1^T + \bar{\eta}\tilde{X}_1,$$

$$\tilde{\Omega}_{12} = BF - \tilde{Y}_1 + \tilde{Y}_2^T + \bar{\eta}\tilde{X}_2,$$

$$\tilde{\Omega}_{22} = -\tilde{Y}_2 - \tilde{Y}_2^T + \bar{\eta}\tilde{X}_3,$$

$$\tilde{Y}_i = QY_iQ, i = 1, 2$$

$$\tilde{X}_j = QX_jQ, j = 1, 2, 3$$

$$F = KQ.$$

式(18)两边同时左乘 Δ_2 和右乘 Δ_2 , 得到

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & \tilde{Y}_1 \\ * & \tilde{X}_3 & \tilde{Y}_2 \\ * & * & QZQ \end{bmatrix} \geq 0. \quad (31)$$

定义新的矩阵变量

$$W \leq QZQ, \quad (32)$$

则矩阵不等式(31)等价于

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & \tilde{Y}_1 \\ * & \tilde{X}_3 & \tilde{Y}_2 \\ * & * & W \end{bmatrix} \geq 0, W \leq QZQ, \quad (33)$$

利用Schur补变换, 式(33)等价于

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & \tilde{Y}_1 \\ * & \tilde{X}_3 & \tilde{Y}_2 \\ * & * & W \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} -Z & Q^{-1} \\ Q^{-1} & -W^{-1} \end{bmatrix} \leq 0. \quad (34)$$

引入新的矩阵变量 $S = Z^{-1}$, $M = W^{-1}$, 并且已知 $P = Q^{-1}$, 则式(30)和式(34)可以重新写为如下的LMIs (35) (36)和等式约束(37):

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & B_1 & QC^T & QA^T \\ * & \Omega_{22} & 0 & 0 & F^T B^T \\ * & * & -\gamma^2 I & D & B_1^T \\ * & * & * & -I & 0 \\ * & * & * & * & -\bar{\eta}^{-1} S \end{bmatrix} < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_1 & \tilde{X}_2 & \tilde{Y}_1 \\ * & \tilde{X}_3 & \tilde{Y}_2 \\ * & * & W \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} -Z & P \\ P & -M \end{bmatrix} \leq 0, \quad (36)$$

$$S = Z^{-1}, M = W^{-1}, P = Q^{-1}. \quad (37)$$

经过以上的变换, 由定理2可以得到如下的定理:

定理 3 对给定的 $\gamma > 0$, $\bar{\eta} > 0$, 若存在适当维数的矩阵 $Q > 0$, $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, Z > 0$, S, M, W 和 P , 满足LMIs (35) (36)和等式约束(37), 则闭环系统(5)满足 H_∞ 性能指标 γ , 并且控制器增益为 $K = FQ^{-1}$.

条件(35)(36)和(37) 虽然仍旧不是单纯的LMIs, 但是和最初的BMIs相比, 式(35) (36)和(37)变换为更容易求解的形式—带矩阵逆约束的LMIs.

下面改进文献[11]提出的CCL(cone complementarity linearization)算法求解定理3中带矩阵逆约束的矩阵不等式.

算法 1 给定性能指标 γ , 求解相应的 H_∞ 控制器.

步骤 1 设 $k = 0$, 找一个初始可行解

$$(Q, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, Z, S, M, W, P, F)_0$$

满足式(35) (36)和如下的(38):

$$\begin{bmatrix} S & I \\ I & Z \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} M & I \\ I & W \end{bmatrix} > 0, \begin{bmatrix} P & I \\ I & Q \end{bmatrix} > 0; \quad (38)$$

步骤 2 如果 $j \leq c$ (c 为预先设定的迭代次数), 转步骤3; 否则, 无可行解, 停止;

步骤 3 求下面的LMI问题:

$$\min \text{tr}(S_j Z + S Z_j + M_j W + M W_j + P_j Q + P Q_j)$$

s.t. 式(35)(36)(38)

$$(Q, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, Z, S, M, W, P, F)_j =$$

$$(Q, \tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{Y}_1, \tilde{Y}_2, Z, S, M, W, P, F);$$

步骤 4 令 $K = F_j Q_j^{-1}$, 求解LMIs (17) (18). 如果式(17)和(18)成立, 则 $K = F_j Q_j^{-1}$, 停止; 否则, $j = j + 1$, 转到步骤3.

如果最小化问题的解是 $6n$, 则式(35)~(37)是可行的. 但是在数值上获得最小解 $6n$ 是非常困难的, 因此我们选择控制器 $K = F_j Q_j^{-1}$ 是否满足LMIs(17)和(18)作为算法停止的条件.

对于最优 H_∞ 控制器求解问题, 我们给出了下面的二分法求解算法.

算法 2 最优 H_∞ 控制器的求解算法.

步骤 1 给定 γ 的范围 $\underline{\gamma} \leq \gamma \leq \bar{\gamma}$, 分别有: $\underline{\gamma}$ 充分小, 使得式(35)~(37) 无可行解; $\bar{\gamma}$ 充分大, 使得

式(35)~(37)有可行解;

步骤2 求 $\underline{\gamma}$ 和 $\overline{\gamma}$ 的中值 γ_{med} :

$$\gamma_{\text{med}} = \frac{\underline{\gamma} + \overline{\gamma}}{2};$$

步骤3 利用算法1求解式(35)~(37). 如果无可行解, $\underline{\gamma} = \gamma_{\text{med}}$; 否则, $\overline{\gamma} = \gamma_{\text{med}}$;

步骤4 如果 $|\overline{\gamma} - \underline{\gamma}| \leq \varepsilon$, (ε 为预先设定的精度), 则此时求得的控制器 K 即为最优 H_∞ 控制器, 相应的最优 H_∞ 性能指标为 $\gamma_{\text{min}} = \overline{\gamma}$, 停止; 否则, 转步骤2.

注3 虽然CCL算法在很大程度上可以找到全局最优解^[12], 但从本质上来说, CCL算法本身并不能保证总是收敛到全局最优, 因此算法2所求解的最优 H_∞ 控制器严格来说是次优的. 这里称为最优, 只是为了强调这是利用该算法能找到的“最优解”.

注4 $\bar{\eta}$ 与系统的稳定性是密切相关的, 对于能保持系统稳定的最大 $\bar{\eta}$ (记为: $\bar{\eta}_{\text{max}}$), 可以用类似于算法2的方法求解, 这里就不再赘述.

5 示例及仿真(Examples and simulation)

例1 考虑如下被控对象^[4]:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t). \quad (39)$$

针对被控对象(39), 文献[4]设计了最优控制器. 但是文献[4]只考虑了网络时延小于一个采样周期的情况. 文献[9]考虑了网络时延大于一个采样周期的情况, 得到了系统能保持稳定的 $\bar{\eta}_{\text{max}} = 0.9700$, 控制器为 $K = [-1.0292 \quad -1.0294]$. 而利用本文的方法, 得到了 $\bar{\eta}_{\text{max}} = 0.9980$, 控制器为 $K = [-1.0018 \quad -1.0020]$. 显然本文的结果比文献[9]的保守性更小. 假定采样周期是 $h = 0.02$ s, 如果没有数据包丢失, 则只要网络时延 $\tau_k \leq 48.8h$, 闭环系统就能保持稳定. 如果网络时延 $\tau_k \leq 10h$, 则最大连续丢包个数 $\bar{d} = 38$ 时, 闭环系统仍是稳定的. 利用本文求解的控制器 $K = [-1.0018 \quad -1.0020]$, 当网络时延为0.99 s, 不存在数据包丢失, 初时状态为 $x_0 = [1.2 \quad -1.8]^T$ 时, 系统状态如图3所示.

在同样时延条件下, 若利用文献[9]求得的控制器的 $K = [-1.0292 \quad -1.0294]$, 则系统状态输出如图4所示. 从图4中可以看出, 闭环系统是不稳定的. 因此仿真结果也说明了本文方法确实具有更小的保守性.

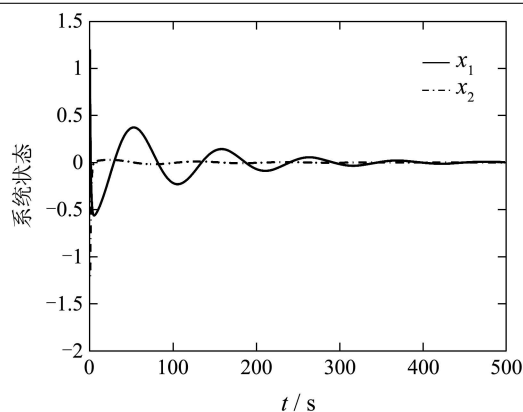


图3 闭环系统状态(利用本文的控制器)

Fig. 3 Closed-loop system states (using the controller in this paper)

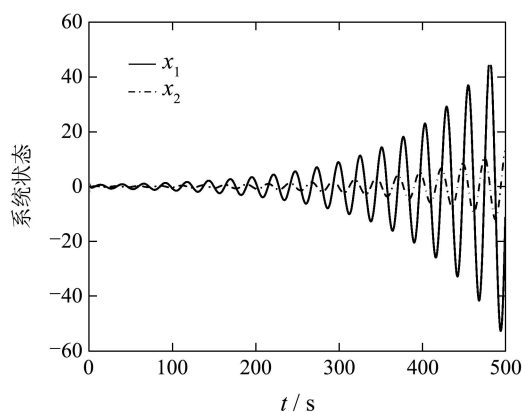


图4 闭环系统状态(利用文献[9]的控制器)

Fig. 4 Closed-loop system states (using the controller in literature [9])

例2 考虑如下被控对象^[8]:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.01 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t). \quad (40)$$

当考虑外部扰动对系统的影响时, 式(40)可以写成

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0.8 & -0.01 \\ 1 & 0.1 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0.05 \\ 0.01 \end{bmatrix} w(t), \\ z(t) = [1 \quad 0]x(t) + 0.01w(t). \end{cases} \quad (41)$$

文献[8]得到控制器 $K = [-0.2115 \quad 2.5004]$ 和 $\bar{\eta}_{\text{max}} = 0.6011$, 即只要 $(1 + \bar{d})h + \bar{\tau} \leq 0.6011$ 成立, 闭环系统就能保持稳定. 与文献[8]相比, 我们的结果有很大的改善. 利用定理3, 我们得到了 $\bar{\eta}_{\text{max}} = 11.1500$, 相应的控制器为 $K = [-0.1834 \quad -0.1630]$. 和文献[8]同样假设采样周期为0.2 s, 网络诱导时延为0, 那么当最大连续丢包个数为54时, 闭环系统仍能保持稳定. 这远

远大于文献[8]中2个的最大连续丢包个数. 利用本文求得的控制器 $K = [-0.1834 \ -0.1630]$, 当网络诱导时延为0, 连续丢包个数为54保持不变, $x_0 = [3.5 \ -2.3]^T$, $w(t) = 10/(t+0.1)^2$ 时, 系统的状态如图5.

图6给出了当控制器为 $K = [-0.1834 \ -0.1630]$ 时, 系统的最优 H_∞ 性能随 $\bar{\eta}$ 变化的曲线. 从图6中可以看出, $\bar{\eta}$ 的变化会显著影响系统的扰动抑制性能. 系统的最优 H_∞ 性能随着 $\bar{\eta}$ (也就是说当最大网络时延或最大连续丢包个数) 变大而下降.

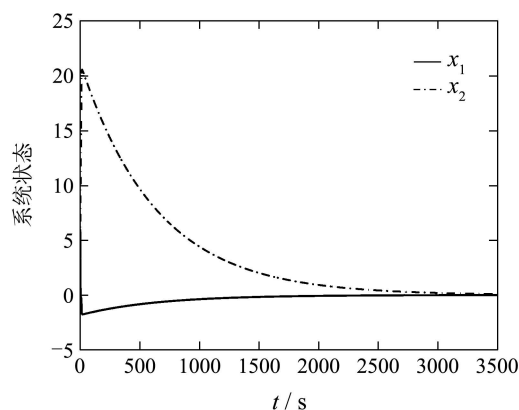


图5 闭环系统状态

Fig. 5 Closed-loop system states

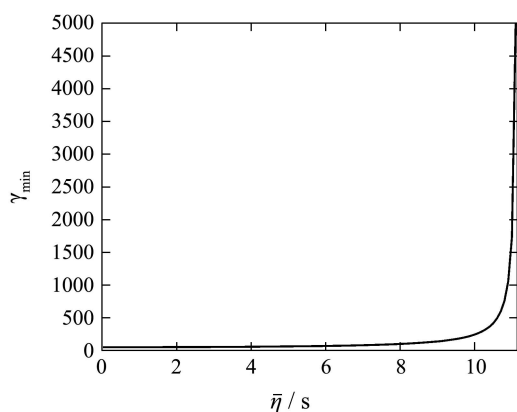


图6 $\bar{\eta}$ 与最优 H_∞ 性能指标 γ_{min} 的关系

Fig. 6 The relationship between $\bar{\eta}$ and optimal H_∞ performance γ_{min}

6 结论(Conclusion)

本文研究了同时具有网络时延和数据包丢失的NCS的 H_∞ 状态反馈控制, 采用Lyapunov-Krasovskii泛函获得了闭环系统稳定的充分条件, 进一步给出了 H_∞ 控制器的设计方法. 仿真算例表明了本文方法具有较小的保守性和良好的有效性.

参考文献(References):

- [1] ZHANG W, BRANIKY M S, PHILLIPS M S. Stability of networked control systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(1): 84 – 99.
- [2] LIAN F L, MOYNE R J, TIBURY D M. Performance evaluation of control networks-Ethernet, ControlNet, and DeviceNet[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 2001, 21(11): 66 – 83.
- [3] NILSSON J, BEMHARDSSON B, WITTENMARK B. Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays[J]. *Automatica*, 1998, 34(1): 57 – 64.
- [4] HU S S, ZHU Q X. Stochastic optimal control and analysis of stability of networked control systems with long delay[J]. *Automatica*, 2003, 39(11): 1877 – 1884.
- [5] LIN X, ARASH H, JONATHAN P H. Control with random communication delays via a discrete-time jump system approach[C] // *Proceedings of the American Control Conference, IEEE*. Chicago, Illinois, USA: IEEE Press, 2000, 2199 – 2202.
- [6] ZHANG L Q, SHI Y, CHEN T W, et al. A new method for stabilization of networked control systems with random delays[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1177 – 1181.
- [7] 黄剑, 关治洪, 王仲东. 基于脉冲微分系统模型的有损网络控制系统研究[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(1): 69 – 73.
(HUANG Jian, GUAN Zhihong, WANG Zhongdong. Research of networked control systems with data packet dropouts based on model of impulsive systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(1): 69 – 73.)
- [8] YU M, WANG L, CHU T G, et al. An LMI approach to networked control systems with data packet dropout and transmission delays[C] // *Proceedings of the Decision and Control Conference, IEEE*. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: IEEE Press, 2004, 3545 – 3550.
- [9] YUE D, HAN Q L, PENG C. State feedback controller design of networked control systems[J]. *IEEE Transaction on Circuits and Systems-II: Express Briefs*, 2004, 51(11): 640 – 644.
- [10] MOON Y S, PARK P, KWON W H, LEE Y S. Delay-dependent robust stabilization of uncertain state-delayed systems[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(14): 1447 – 1455.
- [11] GHAOUI L E, OUSTRY F, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.
- [12] OLIVERIA M C, GEROMEL J C. Numerical comparison of output feedback design methods[C] // *Proceedings of the American Control Conference, IEEE*. Albuquerque, New Mexico, USA: IEEE Press, 1997: 72 – 76.

作者简介:

郭亚锋 (1978—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为网络控制系统、时滞系统, E-mail: yfguo@live.com;

李少远 (1965—), 男, 上海交通大学自动化系教授, 博士生导师, 主要研究领域为自适应预测控制、满意优化控制和网络控制系统的理论、方法和应用, E-mail: syli@sju.edu.cn.