第 25 卷第 3 期
2008 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 3
Jun. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)03−0439−07

测量数据丢失的随机不确定离散系统的鲁棒H_2状态估计

王 武, 杨富文, 詹耀清

(福州大学 电气工程与自动化学院, 福建 福州 350108)

摘要: 由于频宽有限, 或者传感器临时损坏, 测量数据在网络中传输时可能会丢失. 本文对一类测量数据丢失的不确定离散系统, 研究了鲁棒H_2状态估计问题. 所有的系统矩阵的参数都属于给定的凸多面体区域. 测量数据的丢失是随机发生的, 认为它是已知概率的Bernoulli随机序列. 对于所有容许的不确定和可能的数据丢失, 采用线性矩阵不等式方法, 给出了全阶和降阶的H_2滤波器存在的充分条件. 数值仿真表明本文所提方法的有效性.

关键词: 数据丢失; 鲁棒H_2滤波; 凸多面体不确定; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Robust H-two state estimation for stochastic uncertain discrete-time system with missing measurements

WANG Wu, YANG Fu-wen, ZHAN Yao-qing

(College of Electrical Engineering and Automation, Fuzhou University, Fuzhou Fujian 350108, China)

Abstract: In the packet-based transmission of data over a network with limited bandwidth or temporary sensor failure, measurement data may be missing. The H-two filtering problem for an uncertain discrete-time system with missing measurement data is considered. The uncertain parameters in the system matrices are assumed to belong to a given convex bounded polyhedral domain. The occurrence of missing measurement data is random and is assumed to be a Bernoulli distributed sequence with known probability. Sufficient conditions are derived in terms of linear matrix inequalities (LMIs) for the existence of a full-and-reduced-order filter ensuring a prescribed H-two performance for all admissible uncertainties and the possible data missing. Numerical example is provided to demonstrate the feasibility of the proposed method.

Key words: missing data; robust H-two filtering; polyhedral uncertainty; LMI

1 引言(Introduction)

对于测量数据可以完全获得的系统(即完全信息系统), 滤波器设计理论与设计方法在过去几十年里取得了很多的成果. 学者们提出了不同的滤波方案, 比如卡尔曼滤波[1]、鲁棒H_∞和H_2滤波[2]等等. 在这些滤波器设计中总是假设观测的数据包含全部有效的信息. 然而, 数据的网络传输以及传感器暂时失效等原因都有可能造成测量数据的丢失, 导致滤波器获得的信息仅含干扰噪声信号, 丢失了重要的对象输出信息, 它将使得滤波性能下降. 因此, 对具有测量数据丢失系统的研究成为近年来的研究热点. 对测量数据丢失的处理, 学者们主要分两种, 一种是采用估计值来替代, 如文献 [3]采用神经网络进行估计的数据来替代丢失的数据; 另一种就是数据发生丢失了就采用“零”数据进行处理, 常用的有Bernoulli序列方法[4~6]、不完全矩阵方法[7]、马尔可夫过程[8]. 其中以Bernoulli序列方法最为简单, 而且物理意义明确, 因此本文采用满足Bernoulli随机变量来描述数据丢失. 研究一类具有测量数据部分丢失的凸多面体不确定离散系统的H_2滤波器设计问题. 运用LMI方法, 给出了全阶和降阶滤波器存在的充分条件. 所设计的滤波器使得滤波误差系统均方指数稳定且具有给定的H_2性能.

2 问题描述(Problem formulation)

符号说明. 对于矩阵A, $\rho(A)$, $\lambda_{\max}(A)$, $\lambda_{\min}(A)$, $\mathrm{tr}(A)$, $\mathrm{st}(A)$分别表示矩阵A的谱半径、最大奇异值、最小奇异值、迹和栈运算.

考虑如下随机离散系统:

$$\begin{cases} x(k+1)=Ax(k)+Bw(k), \\ y(k)=\beta(k)Cx(k)+Dw(k), \\ z(k)=Lx(k), \end{cases} \tag{1}$$

收稿日期: 2006−12−26; 收修改稿日期: 2007−06−18.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60474049, 60604027); 福建省自然科学基金资助项目(A0510009, 2007J0018).

其中$x(k) \in \mathbb{R}^n$是状态向量, $w(k) \in \mathbb{R}^r$为零均值,单位协方差的高斯白噪声信号, $z(k) \in \mathbb{R}^p$是要估计的信号, $y(k) \in \mathbb{R}^m$是系统输出. 测量数据的丢失是通过随机变量$\beta(k) \in \mathbb{R}$进行描述的, 假设它满足Bernoulli分布的序列, 与$w(k)$相互独立, 概率为:

$$\begin{cases} \mathrm{P}\{\beta(k)=1\} = \mathrm{E}\{\beta(k)\} := \bar{\beta}, \\ \mathrm{P}\{\beta(k)=0\} = 1-\mathrm{E}\{\beta(k)\} := 1-\bar{\beta}, \end{cases} \tag{2}$$

其中$\bar{\beta}$是已知的正数. 系统矩阵A, B, C, D, L均为不确定矩阵, 假设可以表达为若干个顶点矩阵的凸组合, 即

$$\begin{cases} \aleph = (A,B,C,D,L) \in \varOmega, \\ \varOmega = \{(A,B,C,D,L)|(A,B,C,D,L) = \\ \sum\limits_{i=1}^{S}\tau_i(A_i,B_i,C_i,D_i,L_i), \tau_i \geqslant 0; \sum\limits_{i=1}^{S}\tau_i = 1\}. \end{cases} \tag{3}$$

设计如下形式的l阶滤波器:

$$\begin{cases} \hat{x}(k+1) = A_f\hat{x}(k) + B_f y(k), \\ \hat{z}(k) = C_f\hat{x}(k), \end{cases} \tag{4}$$

其中: $\hat{x}(k) \in \mathbb{R}^l$为状态估计, A_f, B_f, C_f是要设计的滤波器参数. 当$l = n$时设计的滤波器是全阶滤波器, 当$1 \leqslant l < n$是降阶滤波器.

定义滤波误差和增广的状态向量分别为:

$$z_{cl}(k) = z(k) - \hat{z}(k), x_{cl}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix},$$

那么滤波误差系统为:

$$\begin{cases} x_{cl}(k+1) = (A_{cl0} + (\beta(k)-\bar{\beta})A_{cl1})x_{cl}(k) + \\ \qquad B_{cl}w(k), \\ z_{cl}(k) = C_{cl}x_{cl}(k), \end{cases} \tag{5}$$

其中:

$$A_{cl0} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ \bar{\beta}B_f C & A_f \end{bmatrix}, A_{cl1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_f C & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B \\ B_f D \end{bmatrix}, C_{cl} = \begin{bmatrix} L & -C_f \end{bmatrix}.$$

定义 1 对动态过程$x_{cl}(k)$, 存在$\kappa \geqslant 1$, $0 < \tau < 1$使得

$$\mathrm{E}\left\{\|x_{cl}(k)\|^2\right\} \leqslant \kappa\tau^k \mathrm{E}\left\{\|x_{cl}(0)\|^2\right\}, \forall x_{cl}(0) \neq 0, \tag{6}$$

系统被称为均方意义下指数稳定的.

本文的目标是在系统不确定矩阵(A, B, C, D, L)满足式(3)的情况下, 对于所有容许的测量数据丢失, 设计形如式(4)的滤波器, 使得

a) 在外部扰动$w(k) = 0$情况下, 滤波误差系统(5)是均方指数稳定的;

b) 给定$\gamma > 0$, 滤波误差系统(5)具有H_2性能γ, 即

$$J = \lim_{k\to\infty} \mathrm{E}\{\|z_{cl}(k)\|^2\} < \gamma. \tag{7}$$

3 $\mathrm{H_2}$性能分析(H_2 performance analysis)

为了给出H_2性能, 需要下面的引理:

引理 1 [9] $V(x_{cl}(k)) = x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)Px_{cl}(k)$为Lyapunov函数. 如果存在$\mu > 0, \nu > 0$和$0 < \psi < 1$使得

$$\mu\|x_{cl}(k)\|^2 \leqslant V(x_{cl}(k)) \leqslant \nu\|x_{cl}(k)\|^2, \tag{8}$$

$$\mathrm{E}\{V(x_{cl}(k+1))|V(x_{cl}(k))\} - V(x_{cl}(k)) \leqslant -\psi V(x_{cl}(k)), \tag{9}$$

那么有

$$\mathrm{E}\{\|x_{cl}(k)\|^2\} \leqslant \frac{\nu}{\mu}(1-\psi)^k \mathrm{E}\{\|x_{cl}(0)\|^2\}. \tag{10}$$

引理 2 对于系统

$$x_{cl}(k+1) = (A_{cl0} + (\beta(k)-\bar{\beta})A_{cl1})x_{cl}(k), \tag{11}$$

下列条件等价:

1)

$$\rho(\psi_1) = \rho(\psi_2) < 1, \tag{12}$$

其中

$$\psi_1 = A_{cl0} \otimes A_{cl0} + bA_{cl1} \otimes A_{cl1}, \tag{13}$$

或者

$$\psi_2 = A_{cl0}^{\mathrm{T}} \otimes A_{cl0}^{\mathrm{T}} + bA_{cl1}^{\mathrm{T}} \otimes A_{cl1}^{\mathrm{T}}, \tag{14}$$

其中$\otimes$ 表示Kronecker积, $b = (1-\bar{\beta})\bar{\beta}$.

2) 存在正定对称阵$P = P^{\mathrm{T}} > 0$, 使得

$$A_{cl0}^{\mathrm{T}}PA_{cl0} + bA_{cl1}^{\mathrm{T}}PA_{cl1} - P < 0. \tag{15}$$

3) 存在正定对称阵$Q = Q^{\mathrm{T}} > 0$, 使得

$$A_{cl0}QA_{cl0}^{\mathrm{T}} + bA_{cl1}QA_{cl1}^{\mathrm{T}} - Q < 0. \tag{16}$$

4) 系统(11)是均方指数稳定的.

证 证明的思路取自文献 [10,11]定理的证明思路. 由于$\rho(A_{cl}) = \rho(A_{cl}^{\mathrm{T}})$, 因此式(13)和(14)是等价的.

1) $\Leftrightarrow$ 2): 由式(15), 存在$R > 0$有

$$P = A_{cl0}^{\mathrm{T}}PA_{cl0} + bA_{cl1}^{\mathrm{T}}PA_{cl1} + R, \tag{17}$$

式(17)可以看作下式的稳态解

$$P_{k+1} = A_{cl0}^{\mathrm{T}}P_kA_{cl0} + bA_{cl1}^{\mathrm{T}}P_kA_{cl1} + R, \tag{18}$$

对上式采用栈算子(stack operator), 有

$$\mathrm{st}(P_{k+1}) = \rho(\psi_2)\mathrm{st}(P_k) + \mathrm{st}(R), \tag{19}$$

式(19)收敛的充要条件是$\rho(\psi_2) < 1$.

2) $\Rightarrow$ 4): 定义Lyapunov函数$V(k) = x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)Px_{cl}(k)$, 其中$P = P^{\mathrm{T}} > 0$. 式(17)有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\{V(k+1)|V(k)\}-\mathrm{E}\{V(k)\}=\\&x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)(A_{cl0}^{\mathrm{T}}PA_{cl0}+bA_{cl1}^{\mathrm{T}}PA_{cl1}-P)x_{cl}(k)=\\&-x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)Rx_{cl}(k)\leqslant\\&-\lambda_{\min}(-R)x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)x_{cl}(k)\leqslant\\&-\alpha x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)x_{cl}(k),\end{aligned}\tag{20}$$

其中$0<\alpha\leqslant\lambda_{\min}(-R)$.

必然存在$0<\alpha\leqslant\iota$, 其中$\iota=\lambda_{\max}(P)$, 有

$$\mathrm{E}\{V(k+1)|V(k)\}-V(k)\leqslant-\alpha V(k)/\iota=-\psi V(k).\tag{21}$$

由引理1和定义1, 可知系统是均方指数稳定的.

1) $\Leftrightarrow$ 3): 证明类似与1) $\Leftrightarrow$ 2)的证明.

4) $\Rightarrow$ 1): 由

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\{x_{cl}^{\mathrm{T}}(k+1)x_{cl}(k+1)\}=\\&x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)(A_{cl0}^{\mathrm{T}}A_{cl0}+bA_{cl1}^{\mathrm{T}}A_{cl1})x_{cl}(k)=\\&x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)\varSigma x_{cl}(k),\end{aligned}$$

且系统是均方指数稳定的, 可见$\varSigma$是个稳定的算子. 又因为$\varSigma$是线性的, 因此就有$\rho(\psi_2)<1$. 证毕.

H_2 性能定义为$J=\lim\limits_{k\to\infty}\mathrm{E}\{\|z_{cl}(k)\|^2\}$. 定义$Q_k=\mathrm{E}\{x_{cl}(k)x_{cl}^{\mathrm{T}}(k)\}$, 那么

$$Q_{k+1}=A_{cl0}Q_kA_{cl0}^{\mathrm{T}}+bA_{cl1}Q_kA_{cl1}^{\mathrm{T}}+B_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}},\tag{22}$$

写成栈算子的描述为

$$\mathrm{st}(Q_{k+1})=\rho(\psi_2)\mathrm{st}(Q_k)+\mathrm{st}(B_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}}),\tag{23}$$

如果系统是均方指数稳定的, 由引理2有$\rho(\psi_2)<1$且$Q=\lim\limits_{k\to\infty}Q_k$, 那么式(22)为

$$Q=A_{cl0}QA_{cl0}^{\mathrm{T}}+bA_{cl1}QA_{cl1}^{\mathrm{T}}+B_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}},\tag{24}$$

因此H_2 性能

$$J=\lim_{k\to\infty}\mathrm{E}\{\|z_{cl}(k)\|^2\}=\mathrm{tr}(C_{cl}QC_{cl}^{\mathrm{T}}).$$

另外,

$$P_k=A_{cl0}^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_{cl0}+bA_{cl1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_{cl1}+C_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl},\tag{25}$$

栈算子的描述为

$$\mathrm{st}(P_k)=\rho(\psi_1)\mathrm{st}(P_{k+1})+\mathrm{st}(C_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl}),\tag{26}$$

同样, 如果系统是均方指数稳定的, 由引理2有$\rho(\psi_1)<1$且$P=\lim\limits_{k\to\infty}P_k$, 那么式(25)为

$$P=A_{cl0}^{\mathrm{T}}PA_{cl0}+bA_{cl1}^{\mathrm{T}}PA_{cl1}+C_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl}.\tag{27}$$

由

$$\begin{aligned}&\lim_{k\to\infty}\mathrm{tr}\{Q_{k+1}P_{k+1}-Q_kP_k\}=\\&\lim_{k\to\infty}\mathrm{tr}\{{}^{(A_{cl0}Q_kA_{cl0}^{\mathrm{T}}+bA_{cl1}Q_kA_{cl1}^{\mathrm{T}}+B_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}})P_{k+1}}_{-Q_k(A_{cl0}^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_{cl0}+bA_{cl1}^{\mathrm{T}}P_{k+1}A_{cl1}+C_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl})}\}=\\&0,\end{aligned}\tag{28}$$

有

$$\mathrm{tr}(C_{cl}QC_{cl}^{\mathrm{T}})=\mathrm{tr}(B_{cl}^{\mathrm{T}}PB_{cl}).\tag{29}$$

总结如上的分析, 有下面的定理.

定理 1 如果系统(5)是均方指数稳定的, 那么H_2性能可以描述为

1)

$$J=\mathrm{tr}(B_{cl}^{\mathrm{T}}PB_{cl}),\tag{30}$$

其中$P=P^{\mathrm{T}}>0$为式(27)的解.

或

2)

$$J=\mathrm{tr}(C_{cl}QC_{cl}^{\mathrm{T}}),\tag{31}$$

其中$Q=Q^{\mathrm{T}}>0$为式(24)的解.

下面采用线性矩阵不等式来刻画系统的H_2性能.

定理 2 系统(5)是均方指数稳定的, 那么H_2性能可以描述为

1)

$$J=\mathrm{tr}(B_{cl}^{\mathrm{T}}PB_{cl})<\mathrm{tr}(B_{cl}^{\mathrm{T}}\hat{P}B_{cl}),\tag{32}$$

其中$\hat{P}=\hat{P}^{\mathrm{T}}>0$为以下不等式的解:

$$-\hat{P}+A_{cl0}^{\mathrm{T}}\hat{P}A_{cl0}+bA_{cl1}^{\mathrm{T}}\hat{P}A_{cl1}+C_{cl}^{\mathrm{T}}C_{cl}<0,\tag{33}$$

或

2)

$$J=\mathrm{tr}(C_{cl}QC_{cl}^{\mathrm{T}})<\mathrm{tr}(C_{cl}\hat{Q}C_{cl}^{\mathrm{T}}),\tag{34}$$

其中$\hat{Q}=\hat{Q}^{\mathrm{T}}>0$为以下不等式的解:

$$-\hat{Q}+A_{cl0}\hat{Q}A_{cl0}^{\mathrm{T}}+bA_{cl1}\hat{Q}A_{cl1}^{\mathrm{T}}+B_{cl}B_{cl}^{\mathrm{T}}<0.\tag{35}$$

证 条件1)的证明. 如果式(33)成立, 减去式(27)得

$$-(\hat{P}-P)+A_{cl0}^{\mathrm{T}}(\hat{P}-P)A_{cl0}+bA_{cl1}^{\mathrm{T}}(\hat{P}-P)A_{cl1}<0,\tag{36}$$

由于系统是均方指数稳定的, 由引理2有$\hat{P}-P>0$, 即

$$\mathrm{tr}(B_{cl}^{\mathrm{T}}PB_{cl})<\mathrm{tr}(B_{cl}^{\mathrm{T}}\hat{P}B_{cl}).\tag{37}$$

同理, 也可证明条件2)成立.

证毕.

在定理2中, 条件从等式变为不等式, 更易于求解, 但是H_2性能包含控制器参数和待求矩阵$\hat{P}$(或$\hat{Q}$), 无法求得H_2性能的上界, 因此需要引入新正定对称阵Z来简化计算, 那么就有下面的定理.

定理 3 考虑系统(1), 假定$\aleph\in\varOmega$为任意确定性常值矩阵. 下列条件之一成立, 那么系统(5)是均方指数稳定的, 且满足H_2性能(7).

i) 如果存在正定对称阵$\hat{P}$, Z, 使得

$$\begin{bmatrix} -\hat{P} & * & * & * \\ \hat{P}A_{cl0} & -\hat{P} & * & * \\ b\hat{P}A_{cl1} & 0 & -b\hat{P} & * \\ C_{cl} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{38}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * \\ \hat{P}B_{cl} & -\hat{P} \end{bmatrix} < 0, \tag{39}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma. \tag{40}$$

ii) 如果存在正定对称阵$\hat{Q}$, Z, 使得

$$\begin{bmatrix} -\hat{Q} & * & * & * \\ \hat{Q}A_{cl0}^{\mathrm{T}} & -\hat{Q} & * & * \\ b\hat{Q}A_{cl1}^{\mathrm{T}} & 0 & -b\hat{Q} & * \\ B_{cl}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{41}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * \\ \hat{Q}C_{cl}^{\mathrm{T}} & -\hat{Q} \end{bmatrix} < 0, \tag{42}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma. \tag{43}$$

证 采用Schur补引理就可以完成证明. 证毕.

下面, 给出使得系统(5)均方指数稳定且满足H_2性能约束(7)的另一种充分条件, 该条件和定理3的条件是等价的, 证明的方法可参见文献 [5]定理2的证明.

定理 4 考虑系统(1), 假定$\aleph \in \Omega$为任意确定性常值矩阵. 下列条件之一成立, 那么系统(5)是均方指数稳定的, 且满足H_2性能约束(7).

i) 如果存在正定对称阵$\hat{P}$, Z, 矩阵G使得

$$\begin{bmatrix} -\hat{P} & * & * & * \\ G^{\mathrm{T}}A_{cl0} & \hat{P}-G-G^{\mathrm{T}} & * & * \\ bG^{\mathrm{T}}A_{cl1} & 0 & b(\hat{P}-G-G^{\mathrm{T}}) & * \\ C_{cl} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0, \tag{44}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * \\ G^{\mathrm{T}}B_{cl} & \hat{P}-G-G^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0, \tag{45}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma. \tag{46}$$

ii) 如果存在正定对称阵$\hat{P}$, Z, 矩阵G使得

$$\begin{bmatrix} \hat{P}-G-G^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ A_{cl0}^{\mathrm{T}}G & -\hat{P} & * & * \\ bA_{cl1}^{\mathrm{T}}G & 0 & -b\hat{P} & * \\ B_{cl}^{\mathrm{T}}G & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{47}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * \\ C_{cl}^{\mathrm{T}} & -\hat{P} \end{bmatrix} < 0, \tag{48}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma. \tag{49}$$

注 1 定理3和定理4给出了确定性系统下滤波误差系统均方意义下指数稳定且具有给定H_2性能的充分条件. 这两种条件是等价的. 但是在定理3中由于Lyapunov矩阵与系统矩阵耦合, 因此系统要求存在统一的正定矩阵$\hat{P}$和$\hat{Q}$; 而定理4将系统矩阵和Lyapunov矩阵分离. 这对确定系统来说, 它们设计保守性是一样的, 但是对凸多面体不确定系统, 定理4中Lyapunov矩阵就可以根据凸多面体不同的顶点取不同的值, 势必具有较小保守性.

推论 1 考虑系统(1), 假定$\aleph \in \Omega$为任意不确定性矩阵. 下列条件之一成立, 那么系统(5)是均方指数稳定的, 且满足H_2性能约束(7).

i) 如果存在正定对称阵$\hat{P}_i$, Z, 矩阵G使得

$$\begin{bmatrix} -\hat{P}_i & * & * & * \\ G^{\mathrm{T}}A_{cl0i} & \hat{P}_i-G-G^{\mathrm{T}} & * & * \\ bG^{\mathrm{T}}A_{cl1i} & 0 & b(\hat{P}_i-G-G^{\mathrm{T}}) & * \\ C_{cli} & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0,$$

$$i = 1, 2, \cdots, S, \tag{50}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * \\ G^{\mathrm{T}}B_{cli} & \hat{P}_i-G-G^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} < 0, \tag{51}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma. \tag{52}$$

其中$A_{cl0i}, A_{cl1i}, B_{cli}, C_{cli}$为系统的顶点矩阵.

ii) 如果存在正定对称阵$\hat{P}_i$, Z, 矩阵G使得

$$\begin{bmatrix} \hat{P}_i-G-G^{\mathrm{T}} & * & * & * \\ A_{cl0i}^{\mathrm{T}}G & -\hat{P}_i & * & * \\ bA_{cl1i}^{\mathrm{T}}G & 0 & -b\hat{P}_i & * \\ B_{cli}^{\mathrm{T}}G & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0, i=1,2,\cdots,S, \tag{53}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * \\ C_{cli}^{\mathrm{T}} & -\hat{P}_i \end{bmatrix} < 0, \tag{54}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma, \tag{55}$$

其中$A_{cl0i}, A_{cl1i}, B_{cli}, C_{cli}$为系统的顶点矩阵.

4 H_2滤波器设计(H_2 filter design)

首先给出确定系统的滤波器存在的充分条件, 然后根据凸多面体不确定系统的内在特性给出不确定系统的鲁棒H_2滤波器存在的充分条件.

定理 5 考虑系统(1), 假定$\aleph \in \Omega$为任意确定性常值矩阵. 给定常数$\gamma > 0$. 如果存在正定对称阵$\bar{P}_1$和$\bar{P}_3$, 矩阵$\bar{P}_2, V_1, V_2, V_3, \hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\bar{P}_1 & * & * & * & * & * & * \\ -\bar{P}_2^{\mathrm{T}} & -\bar{P}_3 & * & * & * & * & * \\ V_1^{\mathrm{T}}A+\bar{\beta}E\hat{B}_fC & E\hat{A}_f & \Xi_1 & * & * & * & * \\ V_3^{\mathrm{T}}A+\bar{\beta}\hat{B}_fC & \hat{A}_f & \Xi_2 & \Xi_3 & * & * & * \\ bE\hat{B}_fC & 0 & 0 & 0 & b\Xi_1 & * & * \\ b\hat{B}_fC & 0 & 0 & 0 & b\Xi_2 & b\Xi_3 & * \\ L & -\hat{C}_f & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0, \tag{56}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ V_1^{\mathrm{T}}B+E\hat{B}_fD & \varXi_1 & * \\ V_3^{\mathrm{T}}B+\hat{B}_fD & \varXi_2 & \varXi_3 \end{bmatrix}<0, \tag{57}$$

$$\mathrm{tr}(Z)<\gamma \tag{58}$$

成立, 其中:

$$E=\begin{bmatrix} I_{l*l} \\ 0_{(n-l)*l} \end{bmatrix},$$
$$b=(1-\bar{\beta})\bar{\beta},$$
$$\varXi_1=\bar{P}_1-V_1-V_1^{\mathrm{T}},$$
$$\varXi_2=\bar{P}_2^{\mathrm{T}}-V_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-V_3^{\mathrm{T}},$$
$$\varXi_3=\bar{P}_3-V_2-V_2^{\mathrm{T}},$$

那么系统(5)是均方指数稳定的且具有H_2性能约束(7). 进而, 控制器参数可由下式求取:

$$A_f=V_2^{-1}\hat{A}_f, B_f=V_2^{-1}\hat{B}_f, C_f=\hat{C}_f. \tag{59}$$

证　由定理4可知系统(5)是均方指数稳定的, 且满足H_2性能约束(7)的充分条件是存在正定对称阵$\hat{P}$, Z, 矩阵G使得式(44)(45)和式(46)成立.

采用文献 [12]的矩阵构造方法, 即定义

$$G=\begin{bmatrix} V_1 & V_3M^{-1}G_{22} \\ ME^{\mathrm{T}} & G_{22} \end{bmatrix}, \tag{60}$$

其中:

$$E=\begin{bmatrix} I_{l*l} \\ 0_{(n-l)*l} \end{bmatrix}, V_1\in\mathbb{R}^{n*n},$$
$$V_3\in\mathbb{R}^{n*l}, M\in\mathbb{R}^{l*l}, G_{22}\in\mathbb{R}^{l*l}.$$

令

$$V_2=M^{\mathrm{T}}G_{22}^{-1}M, J_1=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & G_{22}^{-1}M \end{bmatrix},$$
$$J_1^{\mathrm{T}}\hat{P}J_1=\begin{bmatrix} \bar{P}_1 & \bar{P}_2 \\ \bar{P}_2^{\mathrm{T}} & \bar{P}_3 \end{bmatrix},$$

取变换阵$\mathrm{diag}\{J_1,J_1,J_1,I\}$和$\mathrm{diag}\{I,J_1\}$分别是对式(44)和式(45)施加合同变换, 得

$$\begin{bmatrix} -J_1^{\mathrm{T}}\hat{P}J_1 & * & * & * \\ J_1^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}A_{cl0}J_1 & J_1^{\mathrm{T}}(\hat{P}-G-G^{\mathrm{T}})J_1 & * & * \\ bJ_1^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}A_{cl1}J_1 & 0 & bJ_1^{\mathrm{T}}(\hat{P}-G-G^{\mathrm{T}})J_1 & * \\ C_{cl}J_1 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0, \tag{61}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * \\ J_1^{\mathrm{T}}G^{\mathrm{T}}B_{cl} & J_1^{\mathrm{T}}(\hat{P}-G-G^{\mathrm{T}})J_1 \end{bmatrix}<0, \tag{62}$$

整理得

$$\begin{bmatrix} -\bar{P}_1 & * & * & * & * & * & * \\ -\bar{P}_2^{\mathrm{T}} & -\bar{P}_3 & * & * & * & * & * \\ V_1^{\mathrm{T}}A+\bar{\beta}EM^{\mathrm{T}}B_fC & EM^{\mathrm{T}}A_fG_{22}^{-1}M & \varXi_1 & * & * & * & * \\ V_3^{\mathrm{T}}A+\bar{\beta}M^{\mathrm{T}}B_fC & M^{\mathrm{T}}A_fG_{22}^{-1}M & \varXi_2 & \varXi_3 & * & * & * \\ bEM^{\mathrm{T}}B_fC & 0 & 0 & 0 & b\varXi_1 & * & * \\ bM^{\mathrm{T}}B_fC & 0 & 0 & 0 & b\varXi_2 & b\varXi_3 & * \\ L & -C_fG_{22}^{-1}M & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix}<0, \tag{63}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ V_1^{\mathrm{T}}B+EM^{\mathrm{T}}B_fD & \varXi_1 & * \\ V_3^{\mathrm{T}}B+M^{\mathrm{T}}B_fD & \varXi_2 & \varXi_3 \end{bmatrix}<0, \tag{64}$$

其中: $\varXi_1=\bar{P}_1-V_1-V_1^{\mathrm{T}}, \varXi_2=\bar{P}_2^{\mathrm{T}}-V_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}}-V_3^{\mathrm{T}}, \varXi_3=\bar{P}_3-V_2-V_2^{\mathrm{T}}$.

上式中令

$$\hat{A}_f=M^{\mathrm{T}}A_fG_{22}^{-1}M, \hat{B}_f=M^{\mathrm{T}}B_f,$$
$$\hat{C}_f=C_fG_{22}^{-1}M,$$

即可得到式(56)和式(57).

由滤波器传递函数

$$\begin{aligned} T_f=&C_f(zI-A_f)^{-1}B_f= \\ &\hat{C}_f(zM^{\mathrm{T}}G_{22}^{-1}M-\hat{A}_f)^{-1}\hat{B}_f= \\ &\hat{C}_f(zI-V_2^{-1}\hat{A}_f)^{-1}V_2^{-1}\hat{B}_f, \end{aligned} \tag{65}$$

那么, 滤波器的参数可取为

$$A_f=V_2^{-1}\hat{A}_f, B_f=V_2^{-1}\hat{B}_f, C_f=\hat{C}_f.$$

证毕.

推论 2 考虑系统(1), 假定$\aleph \in \Omega$为任意不确定性矩阵. 给定常数$\gamma > 0$. 如果存在正定对称阵$\bar{P}_{1i}$和$\bar{P}_{3i}$, 矩阵$\bar{P}_{2i}, V_1, V_2, V_3, \hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f$, 使得

$$\begin{bmatrix} -\bar{P}_{1i} & * & * & * & * & * & * \\ -\bar{P}_{2i}^{\mathrm{T}} & -\bar{P}_{3i} & * & * & * & * & * \\ V_1^{\mathrm{T}}A_i+\bar{\beta}E\hat{B}_fC_i & E\hat{A}_f & \Xi_{1i} & * & * & * & * \\ V_3^{\mathrm{T}}A_i+\bar{\beta}\hat{B}_fC_i & \hat{A}_f & \Xi_{2i} & \Xi_{3i} & * & * & * \\ bE\hat{B}_fC_i & 0 & 0 & 0 & b\Xi_{1i} & * & * \\ b\hat{B}_fC_i & 0 & 0 & 0 & b\Xi_{2i} & b\Xi_{3i} & * \\ L_i & -\hat{C}_f & 0 & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0,$$

$$i = 1,2,\cdots,S, \tag{66}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & * & * \\ V_1^{\mathrm{T}}B_i + E\hat{B}_fD_i & \Xi_{1i} & * \\ V_3^{\mathrm{T}}B_i + \hat{B}_fD_i & \Xi_{2i} & \Xi_{3i} \end{bmatrix} < 0, \tag{67}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{68}$$

成立, 其中:

$$E = \begin{bmatrix} I_{l*l} \\ 0_{(n-l)*l} \end{bmatrix}, b = (1-\bar{\beta})\bar{\beta},$$

$$\Xi_{1i} = \bar{P}_{1i} - V_1 - V_1^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{2i} = \bar{P}_{2i}^{\mathrm{T}} - V_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} - V_3^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_{3i} = \bar{P}_{3i} - V_2 - V_2^{\mathrm{T}},$$

那么系统(5)是均方指数稳定的且具有H_2性能约束(7). 进而, 控制器参数可由式(59)求取.

类似于定理5的证明方法, 由定理4的充分条件(ii)可以得到滤波器存在另一种充分条件.

定理 6 考虑系统(1), 假定$\aleph \in \Omega$为任意确定性常值矩阵. 给定常数$\gamma > 0$. 如果存在正定对称阵$\bar{P}_1$和$\bar{P}_3$, 矩阵$\bar{P}_2, V_1, V_2, V_3, \hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Xi_1 & \Xi_2^{\mathrm{T}} & V_1^{\mathrm{T}}A+\bar{\beta}E\hat{B}_fC & E\hat{A}_f & bE\hat{B}_fC & 0 & V_1^{\mathrm{T}}B+E\hat{B}_fD \\ * & \Xi_3 & V_3^{\mathrm{T}}A+\bar{\beta}\hat{B}_fC & \hat{A}_f & b\hat{B}_fC & 0 & V_3^{\mathrm{T}}B+\hat{B}_fD \\ * & * & -\bar{P}_1 & -\bar{P}_2 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -b\bar{P}_1 & -b\bar{P}_2 & 0 \\ * & * & * & * & * & -b\bar{P}_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, \tag{69}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & L & -\hat{C}_f \\ * & -\bar{P}_1 & -\bar{P}_2 \\ * & * & -\bar{P}_3 \end{bmatrix} < 0, \tag{70}$$

$$\mathrm{tr}(Z) < \gamma \tag{71}$$

成立, 其中:

$$E = \begin{bmatrix} I_{l*l} \\ 0_{(n-l)*l} \end{bmatrix},$$

$$b = (1-\bar{\beta})\bar{\beta},$$

$$\Xi_1 = \bar{P}_1 - V_1 - V_1^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_2 = \bar{P}_2^{\mathrm{T}} - V_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} - V_3^{\mathrm{T}},$$

$$\Xi_3 = \bar{P}_3 - V_2 - V_2^{\mathrm{T}},$$

那么系统(5)是均方指数稳定的且具有H_2性能约束(7). 进而, 控制器参数可由下式求取:

$$A_f = V_2^{-1}\hat{A}_f, B_f = V_2^{-1}\hat{B}_f, C_f = \hat{C}_f. \tag{72}$$

推论 3 考虑系统(1), 假定$\aleph \in \Omega$为任意不确定性矩阵. 给定常数$\gamma > 0$. 如果存在正定对称阵$\bar{P}_{1i}$和$\bar{P}_{3i}$, 矩阵$\bar{P}_{2i}, V_1, V_2, V_3, \hat{A}_f, \hat{B}_f, \hat{C}_f$, 使得

$$\begin{bmatrix} \Xi_{1i} & \Xi_{2i}^{\mathrm{T}} & V_1^{\mathrm{T}}A_i+\bar{\beta}E\hat{B}_fC_i & E\hat{A}_f & bE\hat{B}_fC_i & 0 & V_1^{\mathrm{T}}B_i+E\hat{B}_fD_i \\ * & \Xi_{3i} & V_3^{\mathrm{T}}A_i+\bar{\beta}\hat{B}_fC_i & \hat{A}_f & b\hat{B}_fC_i & 0 & V_3^{\mathrm{T}}B_i+\hat{B}_fD_i \\ * & * & -\bar{P}_{1i} & -\bar{P}_{2i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -\bar{P}_{3i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -b\bar{P}_{1i} & -b\bar{P}_{2i} & 0 \\ * & * & * & * & * & -b\bar{P}_{3i} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0, i = 1,2,\cdots,S, \tag{73}$$

$$\begin{bmatrix} -Z & L_i & -\hat{C}_f \\ * & -\bar{P}_{1i} & -\bar{P}_{2i} \\ * & * & -\bar{P}_{3i} \end{bmatrix} < 0, \tag{74}$$

$$\operatorname{tr}(Z) < \gamma \tag{75}$$

成立, 其中:

$$E = \begin{bmatrix} I_{l*l} \\ 0_{(n-l)*l} \end{bmatrix}, b = (1-\bar{\beta})\bar{\beta},$$

$$\varXi_{1i} = \bar{P}_{1i} - V_1 - V_1^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{2i} = \bar{P}_{2i}^{\mathrm{T}} - V_2^{\mathrm{T}}E^{\mathrm{T}} - V_3^{\mathrm{T}},$$

$$\varXi_{3i} = \bar{P}_{3i} - V_2 - V_2^{\mathrm{T}},$$

那么系统(5)是均方指数稳定的且具有H_2性能约束(7). 进而, 控制器参数可由式(72)求得.

注 2　推论2和推论3中矩阵不等式均为线性矩阵不等式, 因此可以通过选择矩阵E的形式, 求解以下的凸优化问题来设计系统(1)的全阶和降阶H_2滤波器:

$$\begin{cases} \min\limits_{\bar{P}_{1i},\bar{P}_{3i},\bar{P}_{2i},V_1,V_2,V_3,\hat{A}_f,\hat{B}_f,\hat{C}_f} \operatorname{tr}(Z) \\ \text{s.t.} \quad \text{LMI}(66),(67), \\ \text{或} \\ \min\limits_{\bar{P}_{1i},\bar{P}_{3i},\bar{P}_{2i},V_1,V_2,V_3,\hat{A}_f,\hat{B}_f,\hat{C}_f} \operatorname{tr}(Z) \\ \text{s.t.} \quad \text{LMI}(73),(74). \end{cases} \tag{76}$$

5 数值例子(Numerical simulation)

考虑的系统如下:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0.2 & \rho \\ 0.1 & -0.5 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} w(k),$$

$$y(k) = \beta(k)[-1\ \ 2]x(k) + w(k),$$

$$z(k) = [1\ \ 0]x(k),$$

其中ρ代表系统中的不确定参数, $|\rho| \leqslant 0.8$, 数据丢失的概率$\mathrm{P}\{\beta(k)=0\} = 1-\bar{\beta} = 0.2$.

选取$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 采用MATLAB LMI Toolbox, 求解优化问题(76), 可得最优H_2上界为4.7002时, 得到全阶滤波器为

$$A_f = \begin{bmatrix} 0.1388 & 0.1016 \\ 0.0376 & -0.2414 \end{bmatrix}, B_f = \begin{bmatrix} 0.1065 \\ 0.1400 \end{bmatrix},$$

$$C_f = \begin{bmatrix} -1.0000 & -0.0000 \end{bmatrix}.$$

那么选取$E = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$得最优$H_2$上界为4.7174时, 得到一阶滤波器为

$$A_f = 0.1798, B_f = 0.1014,$$

$$C_f = -0.9999.$$

6 结论(Conclusion)

本文对具有测量数据丢失的凸多面体不确定随机离散系统的鲁棒H_2滤波问题进行了研究. 采用线性矩阵不等式方法, 给出了全阶和降阶的鲁棒H_2滤波器存在的充分条件. 所设计的滤波器使得滤波误差系统是均方指数稳定并满足给定的H_2指标.

参考文献(References):

[1] LU X, ZHANG H, WANG W, et al. Kalman filtering for multiple time-delay systems[J]. *Automatica*, 2005, 41(8): 1455 – 1461.

[2] XIE L, LU L, ZHANG D, et al. Improved robust H_2 and H_∞ filtering for uncertain discrete-time systems[J]. *Automatica*, 2004, 40(5): 873 – 880.

[3] CHEN Y M, HUANG H C. Multisensor data fusion for manoeuvring target tracking[J]. *International Journal of Systems Science*, 2001, 32(2): 205 – 214.

[4] WANG Z, YANG F, HO D W C, et al. Robust H_∞ filtering for stochastic time-delay systems with missing measurements[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2006, 54(7): 2579 – 2587.

[5] 王武, 杨富文. 具有测量数据部分丢失的离散系统的H_∞滤波器设计[J]. 自动化学报, 2006, 32(1): 107 – 111.
(WANG Wu, YANG Fuwen. H_∞ filter design for discrete-time systems with missing measurements[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2006, 32(1): 107 – 111.)

[6] 王武, 林琼斌, 杨富文. 具有数据丢失的网络控制系统的H_∞输出反馈控制[J]. 信息与控制, 2007, 36(3): 285 – 292.
(WANG Wu, LIN Qiongbin, YANG Fuwen. H_∞ output feedback control for networked control system with data missing[J]. *Information and Control*, 2007, 36(3): 285 – 292.)

[7] SAVKIN V, PETERSEN I R. Robust filtering with missing data and a deterministic description of noise and uncertainty[J]. *International Journal of System Science*, 1997, 28(4): 373 – 390.

[8] SMITH S C, SEILER P. Estimation with lossy measurements: jump estimators for jump systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(12): 2163 – 2171.

[9] 王武, 杨富文. 具有随机通讯时延的离散网络化系统的H_∞滤波器设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 366 – 370.
(WANG Wu, YANG Fuwen. H_∞ filter design for discrete-time networked systems with random communication delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 366 – 370.)

[10] YAZ Y I, YAZ E E. On LMI formulations of some problems arising in nonlinear stochastic system analysis[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1999, 44(4): 813 – 816.

[11] YANG F, WANG Z, HO D W C, et al. Robust H_2 filtering for a class of systems with stochastic nonlinearities[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems－II: Express Briefs*, 2006, 53(3): 235 – 239.

[12] GAO H, WANG C. A delay-dependent approach to robust H_∞ filtering for uncertain discrete-time state-delayed systems[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(6): 1631 – 1640.

作者简介:

王　武　(1973—), 男, 副教授, 博士, 目前研究方向为网络化系统的控制与滤波、非脆弱控制, E-mail: wangwu@fzu.edu.cn;

杨富文　(1963—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为鲁棒控制、鲁棒滤波、迭代学习控制等, E-mail: fwyang@fzu.edu.cn;

詹耀清　(1982—), 男, 硕士研究生, 目前研究方向为网络化控制系统设计.