第 25 卷第 3 期
2008 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 3
Jun. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)03−0497−04

基于恒定磁场的电子自旋量子比特系统任意量子态的最优制备

陈宗海, 朱明清, 张陈斌, 李　明

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 借助单量子位的Bloch球面表示, 结合量子门实现量子态幺正演化的量子态调控机制, 以恒定磁场为控制场, 引入开关控制思想, 提出了一种针对电子自旋量子系统任意量子态的最优制备策略. 建立了量子系统及控制场的模型, 并借助李群李代数, 由经典最优控制的思想, 获得任意量子态的最优制备. 理论分析与仿真实验说明了该策略的优越性.

关键词: 电子自旋; 量子调控; 最优控制; 最优制备

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Optimal preparation of arbitrary quantum state of electron spins quantum-bit system based on invariant magnetic field

CHEN Zong-hai, ZHU Ming-qing, ZHANG Chen-bin, LI Ming

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: In the presentation of single quantum state on Bloch sphere, a strategy of optimal preparation of arbitrary quantum state of electron spin quantum systems is proposed. By using the mechanical logic gate, the manipulation of quantum system is realized by way of unitary-evolution. In the course, a switch idea for the control systems is presented. The models of quantum systems and the control systems using invariant magnetic field are then established. With the help of the Lie group and the classical control theory, a strategy of optimal preparation of arbitrary quantum state is also realized. Finally, the theoretical analysis and the simulation of the preparation indicate the advantage of the idea.

Key words: electron spin; manipulation of quantum system; optimal control; optimal preparation

1　引言(Introduction)

量子信息技术利用微观量子态来编码信息, 同经典信息技术相比具有加速计算、保密通信等优点. 量子信息的基本单元称为量子比特, 任何二能级量子系统都可以作为量子比特的物理资源. 量子信息处理实质上就是对量子比特系统的动力学行为进行控制和操纵, 使其按照期望的过程进行演化. 目前对量子比特系统的控制研究多集中于单量子比特系统的控制问题. 如Ruskov和Korotkov利用外部谐振子与内部被控量子比特的同步程度作为反馈, 实现了单固体量子比特的失相抑制[1]; Ralph等研究了单Josephson电荷量子比特的控制, 通过指导规则的设计, 利用标准的量子比特控制场实现了量子比特任意态的驱动控制[2]; Kofman和Kurizki提出一种以实现对量子比特衰减和退相干的优化控制方式[3]; Protopopescu等则研究了单量子比特门的控制问题, 他们从抑制系统的退相干出发, 给出了一种鲁棒控制方案[4]; Romero等研究了单比特量子门的最优控制问题[5]. 本文针对可看成二能级量子系统的电子自旋, 采用恒定磁场作为控制场, 研究封闭状态下量子态调控, 即从控制论、信息论及物理学出发, 引入开关控制思想, 借助李群李代数, 由经典最优控制的思想和约化动力学来获得最优控制, 并结合量子门来实现任意量子态的最优制备. 该方法制备量子态具有速度快、逼真度高、控制脉冲能量小的特点.

2　量子态的幺正演化(Unitary transformation of quantum state)

2.1　Bloch球面表示(Bloch sphere figure)

量子信息中普遍运用的单量子位操作都可以在Bloch球面上表示出来. 设任意单量子态为[6]

$$|\psi\rangle = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}(\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle). \tag{1}$$

收稿日期: 2006−05−17; 收修改稿日期: 2007−04−11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60575033).

其中：θ,ϕ,γ为实数($0\leqslant\theta\leqslant\pi, 0\leqslant\phi\leqslant 2\pi$), 它们共同定义了单位球面上的一个点, 这个球面称为Bloch球面, 如图1所示. 由于全局相位因子$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\gamma}$具有不可观测效应[7], 可以忽略, 故$|\psi\rangle$可表示为

$$|\psi\rangle=\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle. \tag{2}$$

矢量$|\psi\rangle$ 称为Bloch矢量. Bloch球面是使单个量子位可视化的有效办法, 很多工作可在其上展开[9].

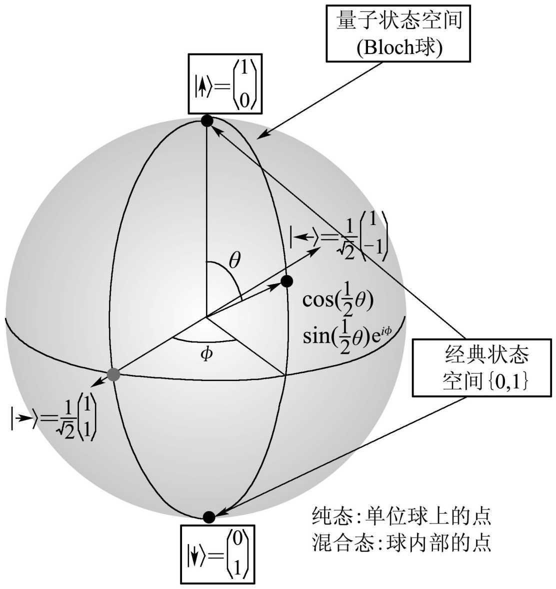


图1 Bloch球

Fig. 1 The Bloch sphere[8]

2.2 任意量子态间的幺正演化(Unitary transformation between arbitrariness quantum state)

任意的2×2 幺正矩阵U 可作如下分解[10]

$$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\beta}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\beta}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\frac{\gamma}{2} & \sin\frac{\gamma}{2}\\ -\sin\frac{\gamma}{2} & \cos\frac{\gamma}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\delta}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\delta}{2}}\end{pmatrix}, \tag{3}$$

其中: $\alpha,\beta,\gamma,\delta$都是实数. 右边第1个和最后一个矩阵可以理解为在不同平面内的旋转; 中间矩阵是普通的旋转. 该分解可以通过选用$\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 的某些特殊值, 实现对任意单量子位逻辑门操作进行精确的描述. 在这种意义下, 任意单量子位幺正门可以基于一个有限集合来组成. 即, 对任意式(1)表示的单量子态, 如果希望通过一系列单量子位幺正门实现其从任意初态$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta\end{pmatrix}$到任意目标态$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\sin\phi\end{pmatrix}$的转化, 可以实现如下:

首先, 将任意初态和目标态表示为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\sin\theta\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+\frac{\varphi}{2})}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\sin\phi\end{pmatrix}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+\frac{\psi}{2})}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\psi}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}. \tag{5}$$

然后, 笔者来设计幺正变换U, 其步骤是

1) 让初态通过门$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}$得到$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+\frac{\varphi}{2})}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$;

2) 再通过门$\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ -\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}$得$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+\frac{\varphi}{2})}\begin{pmatrix}\cos(\theta-\gamma)\\ \sin(\theta-\gamma)\end{pmatrix}$, 令$\gamma=\theta-\phi$, 即有$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+\frac{\varphi}{2})}\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$;

3) 再通过门$\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\psi}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\end{pmatrix}$得$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(y+\frac{\varphi}{2})}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\cos\phi\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\sin\phi\end{pmatrix}$;

4) 最后调整一下相位, 即通过门$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+\frac{\psi}{2}-y-\frac{\varphi}{2})}$, 得到$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+\frac{\psi}{2})}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\cos\phi\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\sin\phi\end{pmatrix}$.

于是, 所设计的幺正变换U为

$$U=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(z+\frac{\psi}{2}-y-\frac{\varphi}{2})}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\psi}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\psi}{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ -\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\end{pmatrix}. \tag{6}$$

3 系统模型(System models)

3.1 电子自旋量子系统模型[11](Model of electron spin quantum-bit system)

设电子自旋量子系统t时刻的状态为$|\psi(t)\rangle$, 本征态分别为$|0\rangle$和$|1\rangle$, 根据态叠加原理, $|\psi(t)\rangle$可表示为本征态的线性组合, 即: $|\psi(t)\rangle=\alpha(t)|0\rangle+\beta(t)|1\rangle$, 复系数$\alpha(t)$, $\beta(t)$满足$|\alpha(t)|^2+|\beta(t)|^2=1$. 另外, $|\psi(t)\rangle$亦可以表示为幺正演化算符$X(t)$对初态$|\psi(0)\rangle$的作用, 即: $|\psi(t)\rangle=X(t)|\psi(0)\rangle$. 结合薛定谔方程$\mathrm{i}\hbar|\dot{\psi}(t)\rangle=H|\psi(t)\rangle$, 可得

$$\mathrm{i}\hbar\dot{X}(t)=HX(t). \tag{7}$$

其中$X(0)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

许多情况下, 系统哈密顿量H可以表示为自由哈密顿H_0和与外部控制场相互作用产生的哈密顿H_I 之和. 对于一组实控制输入$u_k(t)$和厄米线性算符$H_k(k=1,2,\cdots,n)$, 相互作用哈密顿可写为

$$H_I(t)=\sum_{k=1}^{n}H_k u_k(t), \tag{8}$$

从而有

$$\mathrm{i}\hbar\dot{X}(t)=(H_0+\sum_{k=1}^{n}H_k u_k(t))X(t). \tag{9}$$

可见, 在给定初态$|\psi(0)\rangle$, 若确定了演化算符$X(t)$, 便能确定t时刻的量子态$|\psi(t)\rangle$. 对于$X(t)$,

考虑到仅相差相位因子的两个态在物理上不可区分, 其控制问题方程可表示为

$$\dot{X}(t)=AX(t)+\sum_{k=1}^{n}B_kX(t)u_k(t). \tag{10}$$

其中$A, B_k(k=1,2,\cdots,n)$为斜厄米矩阵, 即$A^+=-A$, $B_k^+=-B_k$, $X(t)\subset \mathrm{SU}(2)$. $\mathrm{SU}(2)$表示维数为2的特殊幺正矩阵构成的李群. 为了态制备的需要, 在这里不加证明的给出一个定理:

定理 1 若$k=p+qp(n=1,2,\cdots,+\infty)$, p,q是常数, 且记'[ ]'表示向下取整, '{ }'表示向下取整后余下的小数部分, 则使$|k|$达到最小时n的取值为

$$n=\begin{cases}-[\dfrac{p}{q}]-1, & \{\dfrac{p}{q}\}\geqslant 0.5,\\ -[\dfrac{p}{q}], & \{\dfrac{p}{q}\}<0.5.\end{cases} \tag{11}$$

3.2 控制场模型(Model of control field)

对于恒定磁场的自旋电子, 设电子的磁矩为$M=ks$(k为常系数), 根据量子测量的塌缩原理, 首先对任意量子态进行一次观测, 观测后电子将处于自旋向上态或是自旋向下态. 让电子沿y轴运动, 用y轴方向的恒定磁场作为外部控制场, 即$u=u_0e_y$. 现在利用该系统来制备任意量子态, 规定控制过程必须在T时间内完成, 并希望控制性能指标$J=\int_0^T u^2\mathrm{d}t$达到最小.

根据量子力学知识可得系统的哈密顿算符为:

$$H=-Mu=-ksu_0e_y=-ku_0s_y. \tag{12}$$

其中: $s=\dfrac{\hbar}{2}\sigma$, σ是Pauli矩阵, $se_y=s_y$即s的y方向分量. 于是

$$H=-\frac{ku_0}{2}\hbar\sigma_y. \tag{13}$$

由$|\dot{\psi}(t)\rangle=\mathrm{i}\dfrac{ku}{2}\begin{pmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{pmatrix}|\psi(t)\rangle$, 从而得到演化算符为

$$U(t)=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}k}{2}\left(\begin{smallmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{smallmatrix}\right)\int_0^t u\mathrm{d}t}, \tag{14}$$

其中$U(0)=I$.

4 任意量子态的最优制备(Optimal preparation of arbitrariness quantum state)

令$\int_0^T u\mathrm{d}t=m$, 则有$U(T)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{km}{2}\left(\begin{smallmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{smallmatrix}\right)}$, 再令$y(t)=\int_0^t u\mathrm{d}t$, 那么问题就转化[12]为:

$$\begin{cases}\dot{y}=u,\\ y(0)=0,\\ y(T)=m.\end{cases} \tag{15}$$

这是一个经典控制问题, 记哈密顿函数$H=u^2+\lambda u$, 则有:

$\dfrac{\partial H}{\partial u}=2u+\lambda=0$, 解得$u=-\dfrac{\lambda}{2}$;

$\dot{\lambda}=-\dfrac{\partial H}{\partial y}=0$, 解得$\lambda=c$(常数);

再结合式(15), 解得$c=-\dfrac{2m}{T}$;

从而获得最优控制量为: $u=\dfrac{m}{T}$.

而指标函数$J=\dfrac{m^2}{T^2}\cdot T=\dfrac{m^2}{T}$, 因为$T$是人为设定的, 易知当且仅当$|m|$最小时性能指标$J$最小.

那么m为多少时可以由初态$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$制备出终态$\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$呢? 根据2.2的结论, 任意量子态间的幺正演化$U_T$为:$U_T=\begin{pmatrix}\cos\gamma & \sin\gamma\\ -\sin\gamma & \cos\gamma\end{pmatrix}$, 其中$\gamma=\theta-\phi$. 根据式(14), 当$t=T$时$U(T)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{km}{2}\left(\begin{smallmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{smallmatrix}\right)}=\begin{pmatrix}\cos\dfrac{km}{2} & \sin\dfrac{km}{2}\\ -\sin\dfrac{km}{2} & \cos\dfrac{km}{2}\end{pmatrix}$. 于是, 根据$U_T=U(T)$, 得:

$\dfrac{km}{2}=\gamma+2n\pi, n=1,2,\cdots,+\infty$,

即: $m=\dfrac{2(\gamma+2n\pi)}{k}$, 其中$k$和$\gamma$为常数. 由定理1: 要使$|m|$达到最小, 取

$$n=\begin{cases}-[\dfrac{\gamma}{2\pi}]-1, & \{\dfrac{\gamma}{2\pi}\}\geqslant 0.5,\\ -[\dfrac{\gamma}{2\pi}], & \{\dfrac{\gamma}{2\pi}\}<0.5.\end{cases} \tag{16}$$

这时性能指标J达到最小. 于是在该最优控制驱动下, 就实现了从任意的初态$\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$到$\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$的制备.

再将态$\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}$通过量子门$P(\beta)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\end{pmatrix}$, 就最优的制备出目标态$\cos\phi|0\rangle+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\sin\phi|1\rangle$.

在上述制备过程中对初态是没有任何要求的, 那自然也可以用自旋向上$|0\rangle$或自旋向下$|1\rangle$作为初态. 自旋向上或自旋向下的初态可以这样获得: 在电子自旋系统中对一个任意的量子态进行一次观测, 其必将塌缩到基态, 即自旋向上或自旋向下[13], 然后使用该初态开始上面的制备过程. 这里只要使用一个选择开关来控制这个制备过程就可以了.

5 仿真(Simulation)

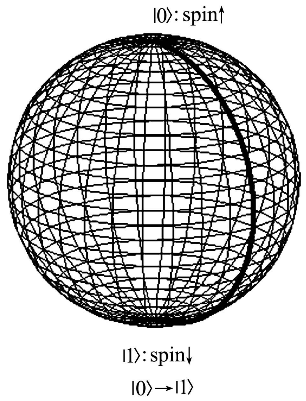
对上述过程进行计算机仿真, 并将结果显示在Bloch球面上, 同时给出量子态$|\psi\rangle=a|0\rangle+b|1\rangle$中概率幅$a,b$模方随控制时间变换的曲线. 这里选择控制时间$T=2$, 控制场参数$k=2$.

1) 当观察到初态为自旋向上$|0\rangle$时, 假若要制备自旋向下态$|1\rangle$, 仿真结果如图2所示.

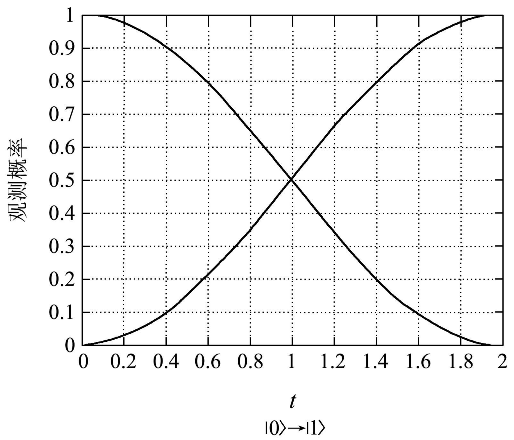
初态为: $|0\rangle$;

终态为: $-0.000028|0\rangle + 0.999776|1\rangle$;

输入最优控制量u为: -0.785398.



(a) Bloch图



(b) 概率幅模方曲线

图2　由自旋向上态制备自旋向下态的仿真结果

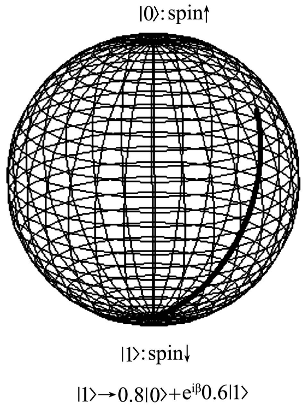
Fig. 2　Simulation result of preparation $|1\rangle$ from $|0\rangle$

2) 当观察到初态为自旋向下$|1\rangle$时, 假若要制备$0.8|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}0.6|1\rangle$, 仿真结果如图3所示.

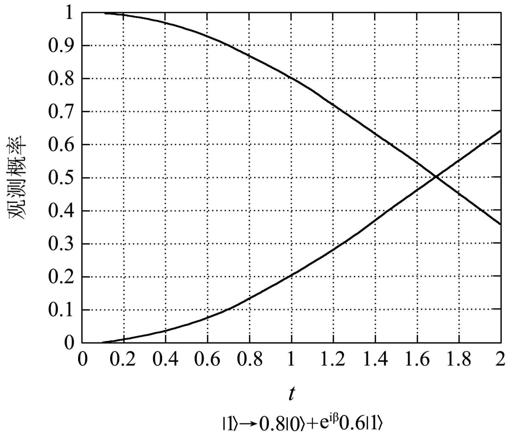
初态为: $|1\rangle$;

终态为: $0.799979|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}0.59998|1\rangle$;

输入最优控制量u为: 0.463648.



(a) Bloch图



(b) 概率幅模方曲线

图3　由自旋向下态制备$0.8|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}0.6|1\rangle$的仿真结果

Fig. 3　Simulation result of preparation $0.8|0\rangle + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}0.6|1\rangle$ from $|1\rangle$

6　结论(Conclusion)

采用开关控制策略, 利用量子测量的坍缩特性, 将观察后得到的自旋向上或自旋向下量子态, 最优控制到任意指定的中间态, 再通过相位门, 实现任意量子态的最优制备. 控制输入量达到最优. 由于最优控制量的输入与控制时间有关, 所以控制时间可以很短, 但在规定了控制时间时, 最优控制量会随着控制时间的缩短而变大. 为减少退相干和环境影响, 控制时间不应过大, 表现出快速性. 从实验结果来看, 由于没有考虑外部干扰因素, 精度高达0.9999, 表明该最优制备策略的优越性.

参考文献(References):

[1] RUSKOV R, KOROTKOV A N. Quantum feedback control of a solid-state qubit[J]. *Physical Review B*, 2002, 66(4): 041 – 401.

[2] RALPH J F, GRIFFITH E J, CLARK T D, et al. Guidance and control in a Josephson charge qubit[J]. *Physical Review B*, 2004, 70(21): 214 – 521.

[3] KOFMAN A G, KURIZKI G. Theory of dynamical control of qubit decay and decoherence[J]. *IEEE Transactions on Nanotechnology*, 2005, 4(1): 116 – 123.

[4] PROTOPOPESCU V, PEREZ R, D'HELON C, et al. Robust control of decoherence in realistic one-qubit quantum gates[J]. *Journal of Physics A-Mathematical and General*, 2003, 36(8): 2175 – 2189.

[5] ROMERO K M F, LAVERDE G U, ARDILA F T. Optimal control of one-qubit gates[J]. *Journal of Physics A -Mathematical and General*, 2003, 36(3): 841 – 849.

[6] IAN Glendinning. The bloch sphere[C] // *QIA Meeting TechGate*. Vienna: [s.n.], 2005.

[7] 李承祖, 黄明球, 陈平形, 等. 量子通信和量子计算[M]. 长沙: 国防科技大学出版社, 2000.
(LI Chengzu, HUANG Mingqiu, CHEN Pingxing, et al. *Quantum Communication and Quantum Computation*[M]. Changsha: National University of Defense Technology Press, 2000.)

[8] http://www.lboro.ac.uk/departments/ph/QIC/Fig%202.1%20Bloch.pdf.

(下转第505页)