

基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制

宋立忠, 李槐树, 姚琼荟

(海军工程大学 电气与信息工程学院, 湖北 武汉 430033)

摘要: 对变结构控制设计中的离散趋近律方法进行深入研究, 提出了“理想趋近律”与“鲁棒趋近律”的概念. 基于这些概念可以将离散趋近律区分为两类. 研究了采用不同类型趋近律求取变结构控制时的异同及鲁棒性保证机理. 澄清了使用趋近律方法设计变结构控制时存在的混乱和误解.

关键词: 离散时间系统; 变结构控制; 趋近律; 鲁棒性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Discrete-time variable-structure control based on reaching-law approach

SONG Li-zhong, LI Huai-shu, YAO Qiong-hui

(College of Electrical and Information Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan Hubei 430033, China)

Abstract: The reaching-law approach, which is widely used in designing the discrete-time variable-structure controller, is thoroughly studied in this paper. Based on the new concepts of the “Ideal Reaching Law” and the “Robust Reaching Law” proposed here, we classify the reaching-laws into two types. The mechanisms of robust controller designed based on these two types of reaching-laws are different. The similarities and differences are analyzed so that the confusion and misapprehension on reaching-law approach can be clarified.

Key words: discrete-time systems; variable structure control; reaching law; robustness

1 引言(Introduction)

变结构控制(VSC)因其鲁棒性强的优点而受到重视^[1]. 对离散时间系统进行的变结构控制设计, 比较简单有效的是离散趋近律方法, 其主要思路在于首先确定满足到达条件的趋近律, 再利用趋近律求取变结构控制. 目前基于趋近律方法的离散变结构控制研究都是以高为炳先生的研究成果为基础^[2], 文献[2]提出的离散趋近律为:

$$s(k+1) = (1 - \delta T)s(k) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k), \quad (1)$$

式中 T 为采样周期, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ 且 $\delta T < 1$. 基于离散趋近律(1)设计的变结构控制系统有一个缺点, 即受采样周期及趋近律自身参数的影响, 即使对于名义系统, 系统状态轨迹也只能稳定于原点邻域的某个抖振, 而不能期待原点的稳定性^[3]. 为此, 众多学者基于式(1)展开研究, 提出了多种新形式的离散趋近律^[3~6], 在削弱抖振方面取得了良好的效果. 本文对离散趋近律方法本身进行深入研究, 从新的角度看待趋近律(1), 提出理想趋近律与鲁棒趋近律的概

念, 并对基于不同类型趋近律的变结构控制设计方法及鲁棒性保证机理进行研究, 不仅可以简化变结构控制律的形式, 且澄清了基于趋近律方法的变结构控制设计过程中存在的混乱和误解.

2 传统的离散趋近律方法(Conventional discrete reaching law approach)

考虑如下的单输入不确定离散时间系统:

$$x(k+1) = (A + \Delta A)x(k) + bu(k) + f(k), \quad (2)$$

式中 $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, A 为 $n \times n$ 矩阵, b 为 n 维列向量且 $(A \ b)$ 可控, ΔA 代表参数不确定性, $f(k)$ 为外部干扰, 并假设不确定部分满足匹配条件且有界. 定义线性切换函数

$$s(x) = cx(k), \quad (3)$$

系数矩阵 c 的选择应满足 $cb \neq 0$ 且保证准滑模运动具有渐近稳定性和良好的动态品质. 利用离散趋近律方法由式(1)~(3)联立即可求得变结构控制律:

$$u(k) = -(cb)^{-1}[cAx(k) - (1 - \delta T)s(k) +$$

$$\varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) + cf(k) + c\Delta Ax(k)], \quad (4)$$

若控制律(4)可实现, 则在它作用下的系统(2)的滑模运动方程为

$$\begin{aligned} s(k+1) &= cx(k+1) = \\ c(A + \Delta A)x(k) + cbu(k) + cf(k) &= \\ (1 - \delta T)s(k) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k), \end{aligned} \quad (5)$$

显然, 滑模运动方程(5)与趋近律(1)完全相同.

由于含有不确定项, 控制律(4)无法实现. 由假设条件知, 不确定部分有界:

$$d_l \leq c\Delta Ax(k) + cf(k) \leq d_u, \quad (6)$$

式中 d_l , d_u 为已知常数, 定义扰动均值 $d_0 = (d_u + d_l)/2$ 与扰动偏差 $\delta_d = (d_u - d_l)/2$, 用 $d_0 + \delta_d \operatorname{sgn} s(k)$ 代替式(4)中的不确定项, 即得可实现的离散变结构控制律^[2]:

$$\begin{aligned} u(k) &= -(cb)^{-1}[cAx(k) - (1 - \delta T)s(k) + \\ &\quad \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) + d_0 + \delta_d \operatorname{sgn} s(k)]. \end{aligned} \quad (7)$$

在控制律(7)作用下, 系统(2)的实际滑模运动方程为

$$\begin{aligned} s(k+1) &= cx(k+1) = \\ c(A + \Delta A)x(k) + cbu(k) + cf(k) &= \\ (1 - \delta T)s(k) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) + \\ [c\Delta Ax(k) + cf(k)] - [d_0 + \delta_d \operatorname{sgn} s(k)]. \end{aligned} \quad (8)$$

比较式(5)与式(8)可知, 理想情况下的系统滑模动态完全由趋近律决定; 而在实际的控制律中, 由于 $d_0 + \delta_d \operatorname{sgn} s(k)$ 不可能完全准确地补偿不确定因素的影响, 致使系统的实际滑模动态与期望滑模动态出现偏离.

3 理想趋近律与鲁棒趋近律的概念(Ideal reaching law and robust reaching law)

从趋近律方法的设计思想来看, 趋近律应理解为是一种人为预先规定的期望滑模动态. 显然, 作为一种期望的理想滑模动态, 趋近律自身不应有抖振. 因为我们设计变结构控制的最终目的是追求理想滑动模态, 尽管由于存在不确定性以及空间或时间上的滞后等因素的影响, 使得这种理想滑动模态在实际系统中可能无法实现, 只能产生以抖振为特征的准滑动模态, 但作为一种设计目标, 理想的滑模动态应是无抖振且能有限时间到达并稳定于滑模面上产生滑动运动的, 如图1(a)所示. 从这个角度讲, 趋近律(1)是有缺陷的, 如图1(b)所示. 但图1(b)的动态特性非常逼真地反映了变结构控制系统的基本特征, 因此可以认为, 趋近律(1)应理解为是一种反映变结构控制鲁棒特征的期望滑模动态轨迹, 它本身就包

含了对不确定性的抑制项— $\varepsilon T \operatorname{sgn} s(k)$, 选择 ε 为适当的值, 即可以保证变结构控制系统的鲁棒稳定性. 因此, 可以发展理想趋近律与鲁棒趋近律的概念.

理想趋近律: 理想趋近律是一种人为预先规定的理想滑模动态轨迹. 它具备如下特点: 从任意初始状态出发的运动均能在有限时间内到达理想滑模面, 转为滑动运动, 如图1(a)所示.

鲁棒趋近律: 鲁棒趋近律是一种人为预先规定的反映变结构控制鲁棒特征的滑模动态轨迹. 它具备如下特点: 从任意初始状态出发的运动均能在有限时间内到达准滑模区, 然后转为穿越滑模面的抖动, 准滑模区的宽度与不确定因素有关, 如图1(b)所示. 正是这种以高频切换为特征的抖动, 保证了变结构控制系统对参数不确定性及外界干扰所具有的理论上的不变性, 或说强鲁棒性.

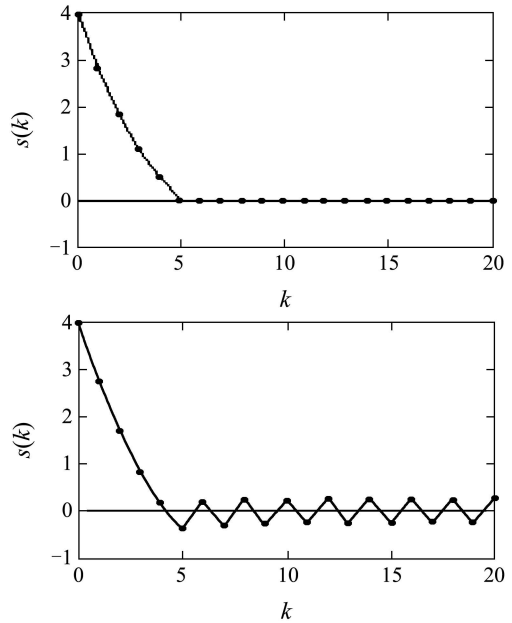


图1 理想趋近律与鲁棒趋近律

Fig. 1 Ideal reaching law and robust reaching law

对照定义易知, 趋近律(1)属于鲁棒趋近律的范畴. 而对于图1(a)所示的理想趋近律, 可以有多种具体的描述形式, 这里提出如下的理想趋近律:

$$\begin{aligned} s(k+1) &= F(\mu)s(k), \\ F(\mu) &= \begin{cases} \mu, & |s(k)| > \Omega \\ 0, & |s(k)| \leq \Omega \end{cases}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中: $0 < \mu < 1$ 为衰减系数, $\Omega > 0$ 表示理想滑模面的某个小的邻域, 在设计中可根据实际情况选取, 比如可取为 $\Omega = \eta|s(0)|$, $0 < \eta < 1$, $s(0) = cx(0)$ 表示滑模函数的初值. 易验证, 式(9)满足有限时间内到达滑模面的要求.

理想趋近律与鲁棒趋近律在概念上是不同的,

基于二者的变结构控制设计思想也必然不同. 因此, 采用趋近律方法求取变结构控制可通过两种途径: 第1种是采用具有理想滑模动态轨迹特征的趋近律, 即理想趋近律, 趋近律本身并不考虑鲁棒性问题, 但在控制律中要额外增加不确定性抑制项; 第2种是采用具有鲁棒性质的趋近律, 如趋近律(1), 可直接根据系统名义模型求得控制律, 通过设计恰当的 ε 值即可保证鲁棒稳定性, 而不必再在控制律中单独考虑不确定性补偿问题.

4 基于理想趋近律的变结构控制(VSC based on ideal reaching law)

理想趋近律是一种期望的理想滑模动态轨迹, 它本身并未考虑鲁棒性的要求. 因此, 在采用理想趋近律对不确定系统进行设计时, 不能直接基于名义模型求得控制律, 还应增加不确定性抑制项. 若采用理想趋近律(9), 可求得不确定系统(2)的变结构控制:

$$u(k) = -(cb)^{-1}[cAx(k) - F(\mu)s(k) + D(k)], \quad (10)$$

此时闭环系统的实际滑模动态为

$$\begin{aligned} s(k+1) &= cx(k+1) = \\ c(A + \Delta A)x(k) + cbu(k) + cf(k) &= \\ F(\mu)s(k) + [c\Delta Ax(k) + cf(k)] - D(k). \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $D(k)$ 为补偿项, 用以抑制不确定因素的影响. 显然, 若 $D(k) = c\Delta Ax(k) + cf(k)$, 则系统对参数不确定性和外界干扰具有不变性, 此时的实际滑模动态即为期望的理想滑模动态. 但由于 $c\Delta Ax(k) + cf(k)$ 的未知及时变特性, 这样的 $D(k)$ 是无法得到的, 因而这种理想的不变性也无法实现, 本文所能追求的只能是满足某种条件下的鲁棒性. 仍然采用上确界方法^[2], 则式(10)(11)可分别写为:

$$u(k) = -(cb)^{-1}[cAx(k) - F(\mu)s(k) + d_0 + \delta_d \operatorname{sgn} s(k)], \quad (12)$$

$$s(k+1) = F(\mu)s(k) + [c\Delta Ax(k) + cf(k)] - [d_0 + \delta_d \operatorname{sgn} s(k)]. \quad (13)$$

定理1 对于有界不确定离散时间系统(2), 取变结构控制律(12), 则闭环系统鲁棒稳定. (证明略).

5 基于鲁棒趋近律的变结构控制(VSC based on robust reaching law)

根据定义, 鲁棒趋近律本身就反映了变结构控制的鲁棒性特征, 因此可直接基于不确定系统(2)对应的名义模型进行设计, 而不必在控制律中再增加不确定性补偿项. 采用鲁棒趋近律(1)时的变结构控制

律为:

$$u(k) = -(cb)^{-1}[cAx(k) - (1 - \delta T)s(k) + \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k)]. \quad (14)$$

只要 ε 的值选取适当, 即可保证闭环系统的鲁棒稳定性. 在控制律(14)作用下的闭环系统滑模动态表达式为:

$$\begin{aligned} s(k+1) &= cx(k+1) = \\ c(A + \Delta A)x(k) + cbu(k) + cf(k) &= \\ (1 - \delta T)s(k) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) + \\ c\Delta Ax(k) + cf(k) &= \\ (1 - \delta T)s(k) - \varepsilon T \operatorname{sgn} s(k) + W(k). \end{aligned} \quad (15)$$

定理2 对于有界不确定离散时间系统(2), 取变结构控制律(14), 只要 ε 按下式取值:

$$\varepsilon T \geq \max\{|d_u|, |d_l|\}, \quad (16)$$

则闭环系统鲁棒稳定. (证明略)

由定理可知, 对于鲁棒趋近律, 只要选择 εT 为适当的值, 即可保证所设计的变结构控制器具有鲁棒性, 而无须另外在控制律中考虑不确定性问题. 这样不仅简化了设计过程, 且求得的控制形式也大为简化. 但是, 目前各文献中基于鲁棒趋近律(1)的变结构控制, 大都采用了基于理想趋近律的设计途径: 将 ε 视为常数, 再在控制律中额外增加不确定性补偿项. 显然, 这种方法有重复补偿的弊端, 必然会产生大的抖振, 且 ε 越大, 抖振越大. 尽管许多文献中都通过减小 ε 来削弱抖振, 但从机理上讲, 这种方法只能减小由于重复补偿而导致的那部分抖振, 只要 ε 不为0, 其效果就必然不如采用理想趋近律的情况. 而许多文献中提出的各种针对趋近律(1)的改进措施, 大都是变相地消除了趋近律(1)本身所特有的鲁棒特征, 应该属于或近似属于理想趋近律的范畴.

6 仿真研究(Simulations)

采用两种不同设计途径的不确定系统仿真结果分别如图2、3所示. 图4则显示采用传统设计方法时的仿真结果. 由图可看出, 两种设计途径所得结果很接近; 而传统方法由于存在重复补偿的弊端, 其抖振幅值相对较大. 仿真参数如下:

$$A = \begin{bmatrix} 1.2 & 0.1 \\ 0.0 & 0.6 \end{bmatrix}, b = [0 \quad 1]^T, c = [5 \quad 1],$$

$$x(0) = [0.8 \quad 0.5]^T, \varepsilon T = 0.5, \delta T = 0.8,$$

$$\mu = 0.2, \Omega = 0.5,$$

$$d(k) = [0 \quad 0.1 + 0.1 \times \sin(2\pi k/50)]^T.$$

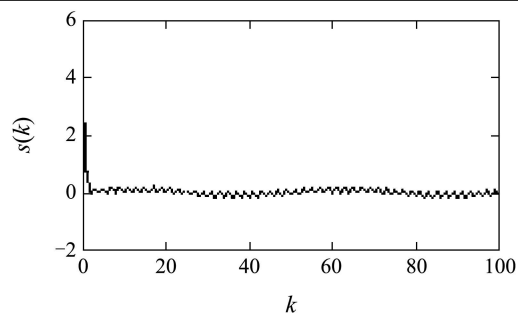


图2 基于理想趋近律的变结构控制仿真结果
Fig. 2 Simulation results of VSC system based on ideal reaching law

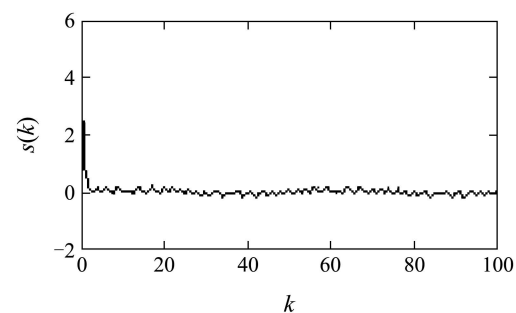


图3 基于鲁棒趋近律的变结构控制仿真结果
Fig. 3 Simulation results of VSC system based on robust reaching law

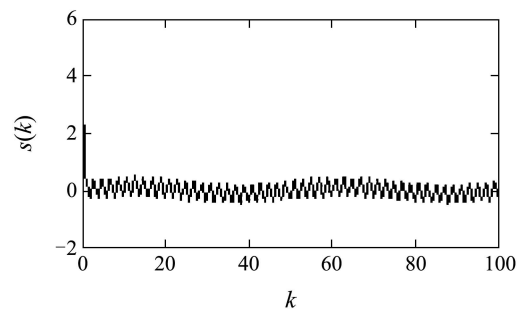


图4 基于传统设计方法的变结构控制仿真结果
Fig. 4 Simulation results of VSC system based on conventional design method

7 小结(Conclusions)

基于趋近律对不确定系统求取变结构控制可通过两种途径: 1) 采用具有理想滑动模态特性的趋近

律(即理想趋近律)进行设计, 通过控制律中的补偿项保证系统鲁棒性; 2) 采用具有鲁棒特性的趋近律(即鲁棒趋近律), 通过设计恰当的趋近律参数保证鲁棒稳定性, 而不必在控制律中增加不确定性补偿项. 理想趋近律与鲁棒趋近律概念的提出, 有利于加深对趋近律方法本质特征的认识, 澄清基于趋近律方法的变结构控制设计过程中可能出现的混乱和误解.

参考文献(References):

- [1] 顾建忠, 武玉强. 带有干扰的时变系统的变结构鲁棒控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 475 – 478.
(GU Jianzhong, WU Yuqiang. Variable structure robust controller for linear time-varying systems with disturbances[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(3): 475 – 478.)
- [2] GAO W B, WANG Y, HOMAIFA A. Discrete-time variable structure control systems [J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 1995, 42(2): 117 – 122.
- [3] 翟长连, 吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计[J]. 自动化学报, 2000, 26(2): 184 – 191.
(ZHAI Changlian, WU Zhiming. Variable structure control design for uncertain discrete time systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2000, 26(2): 184 – 191.)
- [4] 于双和, 强文义, 傅佩琛. 无抖振荡离散准滑模控制[J]. 控制与决策, 2001, 16(3): 380 – 382.
(YU Shuanghe, QIANG Wenyi, FU Peichen. Chattering-free discrete quasi-sliding mode controller[J]. *Control and Decision*, 2001, 16(3): 380 – 382.)
- [5] 李文林. 离散时间系统变结构控制的趋近律问题[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 1267 – 1270.
(LI Wenlin. Reaching law of discrete-time variable structure control systems[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(11): 1267 – 1270.)
- [6] 宋立忠, 陈少昌, 姚琼荃. 滑模预测离散变结构控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(5): 826 – 829.
(SONG Lizhong, CHEN Shaochang, YAO Qionghui. Discrete variable structure control algorithm based on sliding mode prediction[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(5): 826 – 829.)

作者简介:

宋立忠 (1969—), 男, 博士, 副教授, 研究领域为控制理论与控制工程、电力系统及其自动化等, E-mail: lzshg406@sina.com;

李槐树 (1965—), 男, 博士, 副教授, 研究领域为电气传动、电力系统自动化、智能控制等;

姚琼荃 (1946—), 男, 博士生导师, 教授, 研究领域为数字控制系统、变结构控制等.