文章编号: 1000−8152(2008)04−0603−05

时变复杂动力学网络的同步控制

王 磊, 戴华平, 孙优贤

(浙江大学 工业控制研究所 工业控制技术国家重点实验室, 浙江 杭州 310027)

摘要: 研究时变复杂动力学网络的同步控制问题. 假定网络模型中的同步轨迹及耦合配置矩阵、内部耦合矩阵的各元素均有界. 当这些界值可以预估或不确定时, 分别应用线性反馈控制和自适应反馈控制策略使该网络实现全局同步. 通过构造Lyapunov函数, 证明了对于任意初始状态的时变复杂动力学网络模型在相应的控制手段下总可以实现渐近同步. 特别是设计的自适应反馈控制策略对网络的拓扑结构、节点间的耦合强度及时滞等因素表现出较强的鲁棒性. 数值仿真证实了上述结论的有效性.

关键词: 同步; 自适应控制; 线性反馈; 复杂网络; 鲁棒性

中图分类号: TP13 **文献标识码**: A

Synchronization control of a time-varying complex dynamical network

WANG Lei, DAI Hua-ping, SUN You-xian

(State Key Laboratory of Industrial Control Technology, Institute of Industrial Control, Zhejiang University, Hangzhou Zhejiang 310027, China)

Abstract: Synchronization control of a time-varying complex dynamical network model is investigated. We assume that the synchronous trajectories, entries of the coupling configuration matrix and inner-coupling matrix of the model are all bounded. When those bounds are a priori known or uncertain, a linear feedback scheme and an adaptive scheme are applied to globally synchronize the network respectively. By constructing the adequate Lyapunov function, we can always let a dynamical network, no matter how it is initialized, achieve asymptotic synchronization under the corresponding control scheme. In particular, the proposed adaptive control scheme shows a high robustness to the uncertainties in topological structure of network, coupling strength between nodes, time delays, etc. Numerical simulations validate the effectiveness of the proposed approach.

Key words: synchronization; adaptive control; linear feedback; complex networks; robustness

1 引言(Introduction)

同步是合作行为的最基本表现形式之一, 许多合作行为背后的基本机制都与同步有着直接的关系. 复杂网络具有“小世界效应”和“无标度特性”的发现[1~3], 进一步表明了同步具有重要的现实研究意义和应用前景, 引起了众多研究者对复杂网络同步的关注. 在这些研究中, Wang, Chen等人提出了一致连结的动力学网络模型, 分别对具有小世界效应和无标度特性的网络进行分析, 给出了无界区域的同步条件[4,5]. 考虑到现实网络更可能具有不同甚至时变的耦合强度和拓扑结构, Lü, Chen等人引入了一个时变的复杂网络模型, 并推导出该模型实现同步的准则[6~8]. 随后许多研究者对上述模型作了进一步的改进或扩展[9~11], 以求对真实网络系统进行更加完美地刻画和分析. 从这些已获得的同步准则来看, 判断复杂动力学网络模型的同步需要相当苛刻的条件. 一方面, 在具有大规模节点的复杂网络中, 节点间的耦合关系错综复杂, 这导致节点间耦合关系难以获知, 尤其在外界噪声等因素的干扰下, 甚至无法确认两节点间是否存在耦合. 另由于传输速率和网络带宽有限而产生的拥塞等原因使得许多复杂网络产生了不可避免的时滞现象. 所有这些不确定或未知因素在建模的过程中或被忽略, 或假设作为先验知识给出, 极大地减弱了这些同步准则的有效性. 另一方面, 即使整个网络已精确建模, 直接运用已获得的同步准则来判断一个大规模复杂网络的计算量和复杂程度也是无法接受的. 值得注意的是, 这些准则仅仅是判断条件, 无法保证网络同步的实现. 对于亟需同步的网络, 引入控制手段必不可少. 因此, 复杂网络的同步控制研究是一项非常有意义

收稿日期: 2006−09−21; 收修改稿日期: 2007−08−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60304018).

的工作.

本文以时变复杂动力学网络为模型, 通过引入反馈控制来实现这类网络的同步. 模型中的耦合配置矩阵及内部耦合矩阵并不需要假设作为先验知识, 只需要满足时变有界即可. 针对该界值在可以预估和难以获知的情况下, 分别采用线性反馈和自适应反馈控制策略来保证网络同步的实现, 并进一步研究了时滞等不确定性因素对这两种控制策略的影响.

2 时变复杂网络模型(A time-varying complex network model)

考虑一个含有N个相同节点的线性耦合系统, 每个节点均可用一个n维动态子系统表示[8]:

$$\dot{\boldsymbol{x}}_i(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}(t)A(t)\boldsymbol{x}_j(t). \tag{1}$$

其中: $i=1,2,\cdots,N$, $\boldsymbol{x}_i=[x_{i1},x_{i2},\cdots,x_{in}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^n$为网络中第$i$个节点的状态变量, $A(t)=[a_{ij}(t)]\in\mathbb{R}^{n\times n}$为网络$t$时刻的内部耦合矩阵, 耦合配置矩阵$C(t)=[c_{ij}(t)]\in\mathbb{R}^{N\times N}$表示网络在$t$时刻的拓扑结构及节点间的耦合强度, 其对角元素定义为

$$c_{ii}(t)=-\sum_{j=1,j\neq i}^{N}c_{ij}(t).$$

函数$\boldsymbol{f}(\cdot)\in\mathbb{R}^n$是连续可微的, 表征了孤立节点的动态特性, 满足假设1.

假设 1 向量函数$\boldsymbol{f}(\cdot)$满足Lipschitz条件, 即$\forall\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^n$, $||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z})||\leqslant\gamma||\boldsymbol{y}-\boldsymbol{z}||$. 其中: $\boldsymbol{y}=[y_1,y_2,\cdots,y_n]^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{z}=[z_1,z_2,\cdots,z_n]^{\mathrm{T}}$, γ为正常数, $||\boldsymbol{y}||=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2}$为向量$\boldsymbol{y}$的2范数.

假设 2 网络模型(1)的耦合阵$A(t)$, $C(t)$的各元素均为连续有界函数, 即满足

$$|a_{ij}(t)|\leqslant a,\ \forall i,\ j=1,2,\cdots,n;$$
$$|c_{pq}(t)|\leqslant c,\ \forall p,\ q=1,2,\cdots,N.$$

其中a, c 均为正常数. 根据矩阵范数的性质，容易推导出$||A(t)||\leqslant Na$, 其中N为网络模型(1)中节点的数目, $||A||=\sqrt{\lambda_M(A^{\mathrm{T}}A)}$为矩阵$A$的2范数, λ_M为对应矩阵的谱半径.

本文的目标是设计合适的反馈控制律$\boldsymbol{u}_i(t)$使得对于任意初始状态$\boldsymbol{X}_0$, 网络(1)总可以实现渐近同步. 即对初始状态$\boldsymbol{X}_0$，有

$$\forall i,\lim_{t\to\infty}||\boldsymbol{x}_i(t,\boldsymbol{X}_0)-\boldsymbol{s}(t)||=0, \tag{2}$$

则称网络(1)在$\boldsymbol{u}_i(t)$的作用下关于$\boldsymbol{x}_i(t)=\boldsymbol{s}(t)$实现了渐近同步, 其中$\boldsymbol{x}_i(t,\boldsymbol{X}_0)$为以$\boldsymbol{X}_0$为初始状态的网络的第$i$个节点的状态变量, $\boldsymbol{s}(t)$为网络的同步轨迹, 满足

$$\dot{\boldsymbol{s}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s}(t)). \tag{3}$$

若记$\boldsymbol{e}_i(t)=\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{s}(t)$, 则带有控制的余差状态方程可描述为

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i(t)=\hat{\boldsymbol{f}}(t)+\sum_{j=1}^{N}c_{ij}(t)A(t)\boldsymbol{e}_j(t)+\boldsymbol{u}_i(t). \tag{4}$$

其中: $\forall i=1,2,\cdots,N$, $\hat{\boldsymbol{f}}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_i)-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{s})$. 显然当$t\to\infty$, $\boldsymbol{e}_i(t)\to 0$时, 系统(4)的零解是渐近稳定的, 同样称网络(1)实现了渐近同步.

3 反馈控制策略(Feedback control schemes)

针对网络的同步轨迹$\boldsymbol{s}(t)$及耦合矩阵$A(t)$, $C(t)$的界值在可以预估和未知的情况下, 分别引入两种常见的控制手段: 线性反馈控制和自适应反馈控制实现时变复杂动力学网络(1)的同步.

若假设1,2中的常数γ, a, c已知, 此时可以简单地采用线性反馈控制策略, 有如下定理.

定理 1 在线性反馈控制$\boldsymbol{u}_i(t)=-k\boldsymbol{e}_i(t)$的作用下, 若$k\geqslant\frac{1}{2}(1+\gamma^2N+2acN^2)+\varepsilon$, 则动力学系统(4)关于零解渐近稳定, 其中: ε为任意正常数, γ, a, c为已知常数.

证 选取Lyapunov函数为

$$V(t)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{e}_i(t), \tag{5}$$

则V沿曲线$\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{s}$关于时间$t$的导数$\dot{V}(t)$满足

$$\dot{V}=\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}(\hat{\boldsymbol{f}}(t)-k\boldsymbol{e}_i)+\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}c_{ij}\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{e}_j.$$

考虑到$\forall\boldsymbol{e}_i,\boldsymbol{e}_j\in\mathbb{R}^n$, $Q\in\mathbb{R}^{n\times n}$为对称正定阵, 有矩阵不等式$2\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{e}_i\leqslant\boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}}Q\boldsymbol{e}_i+\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}Q^{-1}\boldsymbol{e}_j$, 则$V(t)$可进一步改写为

$$\begin{aligned}&\dot{V}\leqslant\\&(\frac{1}{2}-k)\sum_{i=1}^{N}||\boldsymbol{e}_i||^2+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}||\hat{\boldsymbol{f}}(t)||^2+\\&\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(qc_{ij}^2||\boldsymbol{e}_i||^2+\frac{1}{q}\boldsymbol{e}_j^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{e}_j)\leqslant\\&\frac{1}{2}(1+\gamma^2N+c^2qN+a^2N^3q^{-1}-2k)\sum_{i=1}^{N}||\boldsymbol{e}_i||^2.\end{aligned}$$

式中: $Q=qI, q>0, I$为单位阵.

令$\boldsymbol{e}=[\boldsymbol{e}_1^{\mathrm{T}},\boldsymbol{e}_2^{\mathrm{T}},\cdots,\boldsymbol{e}_N^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{nN}$, 并取$q=ac^{-1}N$及$k\geqslant\frac{1}{2}(1+\gamma^2+2acN^2)+\varepsilon$, ε为任意正常数, 则$\dot{V}\leqslant-\varepsilon||\boldsymbol{e}||^2$. 显然, 当且仅当$\boldsymbol{e}=0$时, $\dot{V}=0$. 根据Lyapunov稳定性理论知[12], 动力学系统(4)关于零解渐近稳定. 证毕.

注意该线性反馈控制策略虽然简单有效, 但并

非任意的负反馈都可以保证同步的实现. 定理1给出了反馈增益的一个充分条件, 该条件受到孤立节点的动力学特性、耦合配置矩阵及内部耦合阵等因素的制约. 一般而言, 若反馈系数满足$k \geqslant \mathrm{O}(N^2)$时, 系统可在该线性反馈的作用下实现渐近稳定. 显然对于具有大规模节点的网络, 巨大的反馈增益使得系统的稳定性变差, 且不易于实现. 定理2设计的自适应反馈控制策略, 则可以有效地克服上述线性反馈控制的缺点.

定理 2 若时变动力学网络(1)的各节点采用如下自适应反馈控制律:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_i(t) = -\boldsymbol{k}_i(t) \odot \boldsymbol{e}_i(t), \\ \dot{\boldsymbol{k}}_i(t) = \alpha_i \boldsymbol{e}_i(t) \odot \boldsymbol{e}_i(t), \end{cases} \quad i = 1, 2, \cdots, N, \tag{6}$$

则该系统对于任意初始状态$\boldsymbol{X}_0$总可以关于$\boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{s}(t)$实现渐近同步, 其中$\boldsymbol{k_i}(t) \in \mathbb{R}^n$, α_i为任意正常数, 符号$\odot$定义为

$$\boldsymbol{e}_i \odot \boldsymbol{e}_j = [e_{i1}e_{j1}, e_{i2}e_{j2}, \cdots, e_{in}e_{jn}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,$$
$$\boldsymbol{e}_i = [e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in}]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n.$$

证 选取Lyapunov函数为

$$V = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} ||\boldsymbol{e}_i||^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\alpha_i} ||\boldsymbol{k}_i - l_1 \boldsymbol{E}||^2, \tag{7}$$

式中: l_1 为待定的正常数, $\boldsymbol{E} = [1, \cdots, 1]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{e}}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i} (\boldsymbol{k}_i - l_1 \boldsymbol{E})^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{k}}_i = \\ & \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} (\hat{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{t}) + \boldsymbol{u}_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} c_{ij} \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{e}_j + \\ & \sum_{i=1}^{N} (\boldsymbol{k}_i - l_1 \boldsymbol{E})^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{e}_i \odot \boldsymbol{e}_i). \end{aligned} \tag{8}$$

注意到等式$\boldsymbol{k_i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e_i} \odot \boldsymbol{e_i}) = \boldsymbol{e_i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{k}_i \odot \boldsymbol{e}_i)$成立, 式(8)满足

$$\begin{aligned} \dot{V} = & \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e_i}^{\mathrm{T}} (\hat{\boldsymbol{f}}(t) - l_1 \boldsymbol{e}_i + \sum_{j=1}^{N} c_{ij} A \boldsymbol{e}_j) \leqslant \\ & \frac{1}{2}(1 + \gamma^2 N - 2l_1) \sum_{i=1}^{N} ||\boldsymbol{e}_i||^2 + \\ & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} (c_{ij}^2 ||\boldsymbol{e}_i||^2 + ||A\boldsymbol{e}_j||^2) \leqslant \\ & \frac{1}{2}(1 + \gamma^2 N + c^2 N + a^2 N^3 - 2l_1) \sum_{i=1}^{N} ||\boldsymbol{e}_i||^2. \end{aligned}$$

若取$l_1 = 2^{-1}(1 + \gamma^2 + c^2 N + a^2 N^3) + 1$, 有$\dot{V} \leqslant -||\boldsymbol{e}||^2$. 根据Lyapunov稳定性理论知, 当$t \to \infty$时, $\boldsymbol{e} \to 0$. 因此, 在自适应控制律(6)的作用下, 动力学系统(1)总可以实现同步. 证毕.

若反馈向量$\boldsymbol{k}_i = \kappa_i \boldsymbol{E}$, 其中$\kappa_i \in \mathbb{R}$满足$\dot{\kappa}_i = \alpha_i ||\boldsymbol{e}_i||^2$, 则该控制器与文献[13]提出的控制器一致. 从式(6)可以看出, 采用自适应控制策略并不需要假设中各参数的先验知识, 只需保证初始向量$\boldsymbol{k}_i(0) > 0, \alpha_i > 0$, 系统可以动态地达到期望的控制目标. 另当该系统实现同步时, $\boldsymbol{e}_i = 0$, 根据式(6)知, $\dot{\boldsymbol{k}}_i = 0$, 即$\boldsymbol{k}_i$演化为一个常向量, 此时系统在线性反馈控制的作用下保持同步.

4 反馈控制的鲁棒性分析(Robust analysis of feedback control schemes)

在对现实复杂网络建模的过程中, 网络结构的复杂性、外部扰动的随机性等往往会导致的网络拓扑结构、耦合强度的不确定性, 从而使得系统难以继续维持同步现象, 本节将进一步讨论第 3 节设计的反馈控制器的鲁棒性.

考虑到时滞等不确定性因素, 网络(1)可以余差的形式改写为

$$\dot{\boldsymbol{e}}_i(t) = \hat{\boldsymbol{f}}(t) + \sum_{j=1}^{N} \hat{c}_{ij}(t) \hat{A}(t) \boldsymbol{e}_{\tau j}(t) + \boldsymbol{u}_i(t). \tag{9}$$

其中: $\boldsymbol{e}_{\tau i} = \boldsymbol{e}_i(t + \tau(t))$, $\hat{c}_{ij}(t) = c_{ij}(t) + \delta c_{ij}(t)$, $\hat{A}(t) = A(t) + \delta A(t)$, $\delta A(t) = [\delta a_{ij}(t)]_{n \times n}$和$\delta C(t) = [\delta c_{ij}(t)]_{N \times N}$均为不确定矩阵, $\tau(t)$为不确定时滞, 且满足如下假设:

假设 3 $\delta A(t)$, $\delta C(t)$ 的各元素均为连续可导的时变函数, 且满足$||\delta A(t)|| \leqslant \delta a$, $||\delta C(t)|| \leqslant \delta c$, 其中$\delta a$, δc均为正常数.

假设 4 时滞时变函数$\tau(t)$有界且满足$|\dot{\tau}(t)| \leqslant \sigma < 1$, 其中$\sigma$均为正常数.

若采用定理2中的自适应反馈控制律(6), 并选取Lyapunov泛函为

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} ||\boldsymbol{e}_i||^2 + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2\alpha_i} ||\boldsymbol{k}_i - l_2 \boldsymbol{E}||^2 + \\ & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} \int_{t-\tau}^{t} ||\boldsymbol{e}_i||^2 \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{10}$$

其中m, l_2为待定的正常数. 则

$$\begin{aligned} & \dot{V} = \\ & \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e}_i^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{e}}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\alpha_i} (\boldsymbol{k}_i - l_2 \boldsymbol{E})^{\mathrm{T}} \dot{\boldsymbol{k}}_i + \\ & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} (||\boldsymbol{e}_i||^2 - (1 - \dot{\tau}) ||\boldsymbol{e}_{\tau i}||^2) = \\ & \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{e_i}^{\mathrm{T}} (\hat{\boldsymbol{f}}(t) + \sum_{j=1}^{N} \hat{c}_{ij} \hat{A} \boldsymbol{e}_{\tau j}) - l_2 \sum_{i=1}^{N} ||\boldsymbol{e}_i||^2 + \\ & \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} (||\boldsymbol{e}_i||^2 - (1 - \dot{\tau}) ||\boldsymbol{e}_{\tau i}||^2) \leqslant \\ & \frac{1}{2}(1 + \frac{2}{m} + \gamma^2 N + (c + \delta c)^2 N - 2l_2) \sum_{i=1}^{N} ||\boldsymbol{e}_i||^2 + \\ & \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} (\sum_{j=1}^{N} ||\hat{A}\boldsymbol{e}_{\tau j}||^2 - \frac{1}{m}(1 - \sigma) ||\boldsymbol{e}_{\tau i}||^2). \end{aligned}$$

根据矩阵范数的性质, 有

$$||\hat{A}|| \leqslant ||A|| + ||\delta A|| \leqslant N(a+\delta a).$$

这里, 分别取m, l_2为

$$\begin{cases} m = N^{-3}(1-\sigma)(a+\delta a)^{-2}, \\ l_2 = 2^{-1}(1+\gamma^2 N + 2m^{-1} + (c+\delta c)^2 N) + 1, \end{cases} \tag{11}$$

有$\dot{V} \leqslant -\sum\limits_{i=1}^{N} ||\boldsymbol{e}_i||^2$, 因此不确定系统(9)仍然可以保持渐近同步. 从而有如下定理:

定理 3 若假设3,4成立, 时变不确定动力学系统(9)在自适应反馈控制律(6)的作用下仍可以关于$\boldsymbol{x}_i(t) = \boldsymbol{s}(t)$实现渐近同步.

从上述讨论可以看到, 自适应反馈控制律(6)对网络的拓扑结构、节点间的耦合强度及时滞等因素表现出较强的鲁棒性. 而对于满足定理1条件的线性反馈控制律则难以获得类似的结论. 但若线性反馈系数k足够大时, 如满足条件

$$k \geqslant \frac{1}{2}(1 + N\gamma^2 + 2(c+\delta c)N^2\sqrt{a^2+\delta a^2}) + \varepsilon.$$

此时, 该控制律可以保证不确定时变动力学系统(9)的渐近稳定性. 也就是说, 在稳定裕度允许的范围内，较小的扰动不会破坏系统的同步稳定性.

5 计算示例(An example)

本节通过一个简单的例子来解释上述结果的有效性. 为使运算简单, 仅考虑一个含3个相同节点的线性相互耦合网络, 其中每个节点均为一个Lü系统[14], 描述为

$$\begin{cases} \dot{x}_{i1} = m_1(x_{i2} - x_{i2}), \\ \dot{x}_{i2} = m_2 x_{i2} - x_{i1}x_{i3}, \\ \dot{x}_{i3} = x_{i1}x_{i2} - m_3 x_{i3}. \end{cases} \tag{12}$$

选取参数$m_1 = 36$, $m_2 = 20$, $m_3 = 3$且初始值为$\boldsymbol{x}_0 = [1,1,1]^{\mathrm{T}}$, 该系统有一个吸引子, 其相图如图1所示.

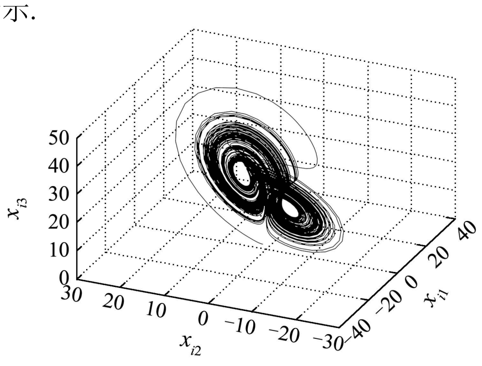

图 1 Lü系统吸引子

Fig. 1 Lü chaotic attractor

另设耦合配置矩阵C及内部耦合矩阵A分别为

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

现对网络(1)分别引入线性反馈控制和自适应控制(6), 控制效果图如图2和图3所示, 这两图给出了系统(4)在相应的控制手段下的余差演化, 其中$e_{ij}(t) = x_{ij}(t) - s_j(t), i,j = 1,2,3$, 表示网络中第$i$个节点的第$j$个状态余差, 线性反馈增益$k = 6.0$, 式(6)中, $k_i(0) = 1.0$, $\alpha_i = 1.0$. 从图2和图3可以看出, 系统(4)在相应控制律的作用下均实现渐近同步. 比较这两种控制方法知, 采用自适应反馈控制可以使得受控网络在受控过程中具有较小的系统余差, 并能够较快地实现同步.

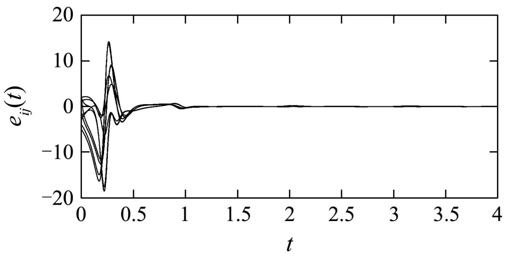

图 2 线性反馈控制下的系统余差轨迹

Fig. 2 Error trajectories under the linear feedback control

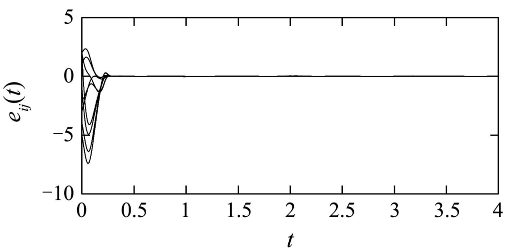

图 3 自适应反馈控制下的系统余差轨迹

Fig. 3 Error trajectories under the adaptive feedback control

若虑到时滞、不确定因素如噪声等, 网络节点间的耦合强度及拓扑结构可能发生如下变化:

$$\delta A(t) = 2\sin\ tA,$$

$$\delta C(t) = \begin{bmatrix} -2r_1 & r_1 & r_1 \\ r_2 & -2r_2 & r_2 \\ r_3 & r_3 & -2r_3 \end{bmatrix}.$$

其中r_1, r_2, r_3为均值为0方差为1的独立随机变量. 另设时滞函数$\tau(t) = 2\boldsymbol{e}^t/(1+\mathrm{e}^t)$, 且假定上述控制策略参数均保持不变. 则在线性反馈控制和自适应控制下的系统余差分别如图4和图5所示. 图4表明线性反馈控制律已经无法保证不确定系统(9)的同步稳定性了, 图5显示自适应反馈控制律(6)仍可以保证在足够的时间后同步误差趋于零. 从上述仿真示例可以看出, 线性反馈控制对于系统存在较大的扰动或噪声时, 容易使得系统同步失控, 且应用时受到

诸多因素限制, 比如受控对容忍的误差、响应时间等有较高要求时则难以采用线性反馈控制. 自适应反馈控制律则使得动力学网络具有非常好的受控效果和较强的鲁棒性.

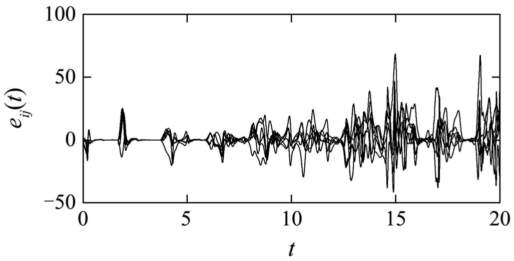

图 4 带有噪声的系统在线性反馈作用下的余差轨迹

Fig. 4 Error trajectories under the linear feedback control in system (9) with noises

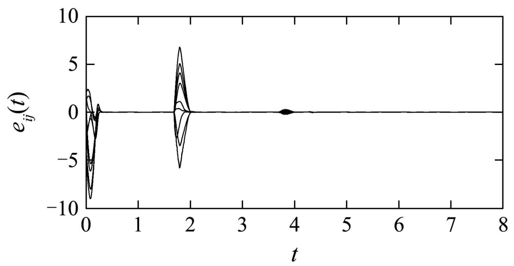

图 5 带有噪声的系统在自适应控制下的余差轨迹

Fig. 5 Error trajectories under the adaptive feedback control in system (9) with noises

6 结论(Conclusion)

本文通过引入反馈控制策略来实现一类时变复杂动力学网络模型的同步. 考虑网络的同步轨迹、拓扑信息等在可以预知和未知两种情况, 分别引入线性反馈控制律和自适应反馈控制律, 并证明了在相应的控制作用下, 时变复杂动力学网络能够实现同步. 随后进一步对这两种控制策略的鲁棒性进行了讨论. 理论及仿真结果表明, 在界值可估和容忍超调量较大的情况下, 可以简单地采用线性反馈控制; 而在界值难以预测的情况下, 首选自适应反馈控制策略, 该策略可以有效地抑制超调量, 改变实现同步的速度, 尤其是对网络节点间的耦合强度、网络的拓扑结构具有非常强的鲁棒性, 且易于在实际中实现.

参考文献(References):

[1] WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of “small-world” networks[J]. *Nature*, 1998, 393(4): 440 – 442.

[2] BARABÁSI A L, ALBERT R. Emergence of scaling in random networks[J]. *Science*, 1999, 286(5439): 509 – 512.

[3] ALBERT R, BARABÁSI A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. *Reviews of Modern Physics*, 2002, 74(1): 47 – 97.

[4] WANG X F, CHEN G R. Synchronization in small-world dynamical networks[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(1): 187 – 192.

[5] WANG X F, CHEN G R. Synchronization in scale-free dynamical networks: robustness and fragility[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* Ⅰ, 2002, 49(1): 54 – 62.

[6] LÜ J, YU X H, CHEN G R. Chaos synchronization of general complex dynamical networks[J]. *Physica A*, 2004, 334(1-2): 281 – 302.

[7] LÜ J, YU X H, CHEN G R, et al. Characterizing the synchronizability of small-world dynamical networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* Ⅰ, 2004, 51(4): 787 – 796.

[8] LÜ J, CHEN G R. A time-varying complex dynamical network model and its controlled synchronization criteria[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(6): 841 – 846.

[9] LI C, CHEN G R. Synchronization in general complex dynamical networks with coupling delays[J]. *Physica A*, 2004, 343: 263 – 278.

[10] ZHOU J, CHEN T. Synchronization in general complex delayed dynamical networks[J]. *IEEE Transactions on Circuit Systems* Ⅰ, 2006, 53(1): 733 – 744.

[11] WANG L, DAI H P, SUN Y X. Synchronization criteria for a generalized complex delayed dynamical network model[J]. *Physica A*, 2007, 383(2): 703 – 713.

[12] HALE J K, VERDUYN LUNEl S M. *Introduction to Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[13] ZHOU J, LU J, LÜ J. Adaptive synchronization of an uncertain complex dynamical network[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(4): 652 – 656.

[14] LÜ J, CHEN G R. A new chaotic attractor coined[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2002, 12(3): 659 – 661.

作者简介:

王 磊 (1981—), 男, 浙江大学控制理论与控制科学在读博士研究生, 研究领域为复杂系统的建模、控制与优化, E-mail: leiwang@iipc.zju.edu.cn;

戴华平 (1969—), 男, 副教授, 研究领域为离散事件动态系统、复杂系统的建模、控制与优化等, E-mail: hpdai@iipc.zju.edu.cn;

孙优贤 (1940—), 男, 教授, 博士生导师, 中国工程院院士, 研究领域为鲁棒控制、容错控制、非线性控制、软测量技术、工业系统模型化与控制等.