

时滞离散系统正弦扰动的最优抑制

唐功友¹, 王笑寒¹, 王海红²

(1. 中国海洋大学 信息科学与工程学院, 山东 青岛 266100; 2. 青岛科技大学 信息科学技术学院, 山东 青岛 266061)

摘要: 研究状态和控制都含时滞的线性离散系统在正弦扰动下的减振控制问题. 首先提出一种变量代换, 并利用此代换将原系统转换为不含控制时滞的系统. 然后利用逐次逼近法将最优控制问题转化为求解一族无时滞的线性两点边值序列问题. 得到的最优控制律由解析的状态反馈, 前馈和具有记忆的控制项以及时滞补偿序列的极限组成. 通过截取时滞补偿序列的有限项, 可以得到系统的次优减振控制律. 仿真结果表明, 该方法容易实现, 设计的控制器对正弦扰动有较强的抑制能力.

关键词: 离散系统; 时滞; 最优控制; 正弦扰动; 逐次逼近法

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Optimal damping of sinusoidal disturbances in discrete-time systems with time-delays

TANG Gong-you¹, WANG Xiao-han¹, WANG Hai-hong²

(1. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao Shandong 266100, China;

2. College of Information Technology, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao Shandong 266061, China)

Abstract: We consider the damping of sinusoidal disturbances in discrete-time systems with time-delays in states and inputs. Through a variable substitution, the original system is transformed into a form without time-delay in inputs. Then, by using the successive approximation approach, the optimal control problem is transformed into a sequence of linear two-point-boundary-value problems. The optimal control law consists of the analytic state feedback, feedforward, control with memory terms, and the limit of a sequence of vectors for time-delay compensation. By carrying out a finite-step iteration of a compensation sequence, a suboptimal damping control law is also obtained. Simulations demonstrate the easy realization of the algorithm, and the strong ability in sinusoidal disturbances rejection.

Key words: discrete-time systems; time-delay; optimal control; sinusoidal disturbances; successive approximation approach

1 引言(Introduction)

在实际的控制系统中, 时滞现象普遍存在. 虽然时滞离散系统可经过扩维变成无时滞系统, 但是对于系统阶数较高和/或时滞较大的系统, 扩维后系统的阶数可能变得很高, 引起“维数灾难”问题. 另外, 对于控制含时滞的离散系统经扩维后, 其状态反馈控制律是物理不可实现的. 所以, 扩维方法仅适合于仅状态含有时滞, 且时滞不大及阶数较低的系统. 由于时滞系统二次型性能指标最优控制问题往往导致求解含有时滞项的两点边值问题, 直接求最优控制律的精确解非常困难, 因此求解时滞系统的近似最优控制律是重要的研究课题. 时滞系统的最优控制一直受到科技工作者的重视^[1,2]. 控制含时滞在实

际系统是常见的, 相对于状态含时滞的系统而言, 一般控制含时滞的系统无论从理论上还是在实际工程中是更难解决的课题^[3].

严格地讲, 几乎所有的系统都是在外部扰动下工作的. 正弦扰动是一类常见的外部扰动形式, 例如飞机姿态控制系统中, 机翼受谐波为正弦的风的剪切力扰动^[4], 海洋平台振动控制系统^[5,6]和轮船减振控制系统^[7]长期受基波为正弦的海浪力扰动, 高性能磁盘驱动器的减振控制系统受周期性的机械力作用^[8]等. 对于正弦扰动抑制问题, 有几种可行的解决方法, 包括内模控制^[9~11]、自适应反馈控制^[7,8,12,13]及前馈-反馈最优控制^[5,6,14~16]等. 到目前为止, 多数研究工作还只是针对无时滞线性系统

开展的^[5~9,12~15]. 最近, 唐功友等研究了非线性系统^[16]和状态含有时滞的系统^[10,11]的正弦扰动抑制问题. 对于控制含有时滞的系统的扰动抑制问题, 多为在 H_∞ 意义下的控制器的优化设计问题^[17]. 至今笔者还没有见到针对控制含有时滞的系统研究正弦扰动抑制的论文发表.

本文研究控制变量和状态变量都含时滞的线性离散系统在正弦扰动下的最优减振控制问题. 首先通过变换将原系统化为不含控制时滞的系统, 然后利用逐次逼近方法^[18]得到了最优减振控制律的迭代算法.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑如下形式的线性离散时滞系统

$$\begin{cases} x(k+1) = Ax(k) + A_1x(k-\tau) + \\ Bu(k-h) + Dv(k), \\ x(k) = \varphi(k), k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ u(k) = 0, k = -h, -h+1, \dots, -1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u \in \mathbb{R}^r$ 为控制输入, $v \in \mathbb{R}^m$ 为外部扰动向量, A, A_1, B 及 D 是适当维数的常量矩阵, $\varphi(k)$ 是已知的初始状态, 时滞 h, τ 是正整数. 假设 v 为由下式描述的正弦扰动:

$$v(k) = \begin{bmatrix} v_1(k) \\ v_2(k) \\ \vdots \\ v_m(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\omega_1 k + \phi_1) \\ \sin(\omega_2 k + \phi_2) \\ \vdots \\ \sin(\omega_m k + \phi_m) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中 ω_i 和 ϕ_i 分别为第 i 个扰动分量的频率和初相位.

由于系统(1)中包含控制时滞项 $u(k-h)$, 对于常规的二次型性能指标而言, 其物理可实现的最优控制是不存在的. 为了方便设计系统(1)的某种最优意义下的控制律 $u(k)$, 先对系统(1)作适当的变量代换. 由式(1)可以得到

$$\begin{aligned} x(k) = & A^k x(0) + \sum_{i=0}^{k-1} A^{k-i-1} (A^{-h} B u(i) + \\ & A_1 x(i-\tau) + D v(i)) - \\ & \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-1} A^{-h} B u(i). \end{aligned} \quad (3)$$

令状态变量

$$z(k) = x(k) + \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-1} \bar{B} u(i), \quad (4)$$

其中 $\bar{B} = A^{-h} B$, 则系统(1)转化为如下形式:

$$\begin{cases} z(k+1) = \\ Az(k) + \bar{B}u(k) + A_1x(k-\tau) + Dv(k), \\ x(k) = \varphi(k), k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ u(k) = 0, k = -h, -h+1, \dots, -1, \\ z(0) = x(0), \\ x(k) = z(k) - \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-1} A^{-h} B u(i). \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)的状态方程中仅有 x 含有时滞项, 而状态变量为 z . 所以在用迭代方法求解时, 可以视 $x(k-\tau)$ 为状态方程中的外部激励. 因此, 对于系统(5)有限时间的最优控制问题, 可以选取如下形式的有限时间二次型性能指标:

$$\begin{aligned} J = & \frac{1}{2} z^T(N) Q_N z(N) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [z^T(k) Q z(k) + u^T(k) R u(k)]. \end{aligned} \quad (6)$$

其中: $Q, Q_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为半正定矩阵, $R \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 为正定矩阵. 对于系统(5)无限时间的最优控制问题, 由于正弦扰动的存在, 控制向量 $u(k)$ 和状态向量 $z(k)$ 不可能同时趋向于零. 如果选取常规的二次型性能指标, 则性能指标是不收敛的. 所以可以选取如下形式的二次型平均性能指标:

$$J = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N [z^T(k) Q z(k) + u^T(k) R u(k)]. \quad (7)$$

经过上述变量代换, 将系统(1)的最优减振控制问题转化为在系统(5)中寻找控制 $u^*(k)$, 使由式(6)或(7)定义的性能指标在约束(5)下取极小值问题.

3 预备引理(Preliminary lemmas)

为了方便主要结果的证明, 首先引入几个有用的引理.

引理 1^[2] 下列不等式成立:

$$\sum_{i=1}^k i^j \leq \frac{(k+1)^{j+1}}{j+1}, \quad j = 0, 1, 2, \dots; k = 1, 2, \dots. \quad (8)$$

考虑含有正弦扰动的离散时滞系统

$$\begin{cases} y(k+1) = G(k)y(k) + H(k)x(k-\tau) + \\ f(v(k)), k = 0, 1, 2, \dots, \\ x(k) = y(k) = \xi(k), k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ x(k) = \sum_{i=0}^h G_i(k)y(k-i), k = 0, 1, 2, \dots. \end{cases} \quad (9)$$

其中: $x, y \in \mathbb{R}^n$, f 为 v 的一致有界向量函数, $v \in \mathbb{R}^m$ 为由式(2)定义的外部正弦扰动, $\xi(k)$ 为初始条件, $G(k), G_i(k)$ 及 $H(k)$ 是适当维数的一致有界时

变矩阵.

定义函数向量序列 $\{y^{(j)}(k)\}$ 如下:

$$\left\{ \begin{aligned} y^{(0)}(k) &= \prod_{m=1}^k G(k-m)\xi(0) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left[\prod_{m=1}^{k-i-1} G(k-m) \right] f(v(i)) \right\}, \\ y^{(j)}(k) &= \prod_{m=1}^k G(k-m)\xi(0) + \\ &\quad \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left[\prod_{m=1}^{k-i-1} G(k-m) \right] [f(v(i)) + \right. \\ &\quad \left. H(i)x^{(j-1)}(i-\tau)] \right\}, \quad k=1, 2, \dots, N, \\ x^{(j)}(k) &= y^{(j)}(k) = \xi(k), \\ k &= -h, -h+1, \dots, 0, \\ x^{(0)}(k) &= \prod_{m=1}^k G(k-m)\xi(0), \\ x^{(j)}(k) &= \sum_{i=0}^h G_i(k)y^{(j)}(k-i), \quad j=1, 2, \dots, \end{aligned} \right. \quad (10)$$

其中规定 $\prod_{m=1}^0 G(k-m) = I$, I 为单位矩阵.

引理 2 由式(10)定义的序列 $\{y^{(j)}(k)\}$ 一致收敛于系统(9)的解.

证 令

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha &= \max \left\{ \sup_{k \in [0, N]} \left\| \prod_{m=1}^{k-i-1} G(k-m) \right\|, \right. \\ &\quad \left. i=0, 1, \dots, k-1 \right\}, \\ b &= \sup_{k \in [0, N]} \|H(k)\|, \\ c &= \sup \{ \|\xi(k)\|, \quad k = -h, -h+1, \dots, 0 \}, \\ d &= \max \left\{ \sup_{k \in [0, N]} \|G_i(k)\|, \quad i=0, 1, 2, \dots, h \right\}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

由式(10)可以得到

$$\begin{aligned} \|y^{(1)}(k) - y^{(0)}(k)\| &= \\ \sum_{i=0}^{k-1} \left\{ \left[\prod_{m=1}^{k-i-1} G(k-m) \right] [H(i)x^{(0)}(i-\tau)] \right\} &\leq \\ \alpha^2 b c k. \end{aligned} \quad (12)$$

由式(10)和引理1得到

$$\begin{aligned} \|y^{(2)}(k) - y^{(1)}(k)\| &\leq \\ \alpha b \sum_{i=0}^{k-1} \|x^{(1)}(i) - x^{(0)}(i)\| &\leq \\ \alpha b d (h+1) \sum_{i=0}^{k-1} \|y^{(1)}(i) - y^{(0)}(i)\| &\leq \\ \frac{1}{2!} \alpha^3 b^2 c d (h+1) k^2. \end{aligned} \quad (13)$$

其余的证明过程与文献[2]中引理2的证明类似. 此处证略. 证毕.

3.1 有限时间最优控制(Finite horizon optimal control)

由于系统(5)中含有时滞项 $x(k-\tau)$, 求解最优控制的精确解比较麻烦. 在本节中, 将时滞项 $x(k-\tau)$ 视为外部激励, 给出一种最优控制的逐次逼近近似解法.

引入系统(5)的迭代序列

$$\left\{ \begin{aligned} z^{(j)}(k+1) &= Az^{(j)}(k) + \bar{B}u^{(j)}(k) + \\ &\quad A_1x^{(j-1)}(k-\tau) + Dv(k), \\ x^{(j)}(k) &= \varphi(k), \quad k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ u^{(j)}(k) &= 0, \quad k = -h, -h+1, \dots, -1, \\ x^{(j)}(k) &= z^{(j)}(k) - \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-1} A^{-h} B u^{(j)}(i), \\ z^{(j)}(0) &= \varphi(0), \quad j=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (14)$$

和性能指标 (6) 的迭代序列

$$\begin{aligned} J^{(j)} &= \frac{1}{2} z^{(j)T}(N) Q_N z^{(j)}(N) + \\ &\quad \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [z^{(j)T}(k) Q z^{(j)}(k) + \\ &\quad u^{(j)T}(k) R u^{(j)}(k)], \quad j=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (15)$$

其中 $x^{(-1)}(k) \equiv 0$.

在系统(14)中, 注意到 $x^{(j-1)}(k-\tau)$ 在第 j 次迭代中是已知的. 所以在第 j 个状态方程中, 可以将 $x^{(j-1)}(k-\tau)$ 视为附加扰动输入. 根据极大值原理得到的最优控制的必要条件知, 系统(14)关于二次型性能指标(15)的最优控制律可表达为

$$\left\{ \begin{aligned} u^{(j)}(k) &= -R^{-1} \bar{B}^T \lambda^{(j)}(k+1), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, N-1, \quad j=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (16)$$

其中 $\lambda^{(j)}(k+1)$ 为以下两点边值问题的解:

$$\left\{ \begin{aligned} z^{(j)}(k+1) &= Az^{(j)}(k) + \bar{B}u^{(j)}(k) + \\ &\quad A_1x^{(j-1)}(k-\tau) + Dv(k), \\ \lambda^{(j)}(k) &= Qz^{(j)}(k) + A^T \lambda^{(j)}(k+1), \\ z^{(j)}(k) &= \varphi(k), \quad k = -h, -h+1, \dots, 0, \\ \lambda^{(j)}(N) &= Q_N z^{(j)}(N), \\ j &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (17)$$

为了求解两点边值问题(17), 令

$$\begin{aligned} \lambda^{(j)}(k) &= P(k)z^{(j)}(k) + P_1(k)v(k) + \\ &\quad P_2(k)v_\omega(k) + g^{(j)}(k). \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$v_{\omega}(k) = \begin{bmatrix} v_1(k + \frac{\pi}{2\omega_1}) \\ v_2(k + \frac{\pi}{2\omega_2}) \\ \vdots \\ v_m(k + \frac{\pi}{2\omega_m}) \end{bmatrix}, \quad (19)$$

容易得到 $v(k)$ 和 $v_{\omega}(k)$ 满足下面关系式:

$$\begin{aligned} v(k+1) &= \Omega_1 v(k) + \Omega_2 v_{\omega}(k), \\ v_{\omega}(k+1) &= \Omega_1 v_{\omega}(k) - \Omega_2 v(k). \end{aligned} \quad (20)$$

其中:

$$\begin{cases} \Omega_1 = \text{diag}\{\cos \omega_1, \cos \omega_2, \dots, \cos \omega_m\}, \\ \Omega_2 = \text{diag}\{\sin \omega_1, \sin \omega_2, \dots, \sin \omega_m\}. \end{cases} \quad (21)$$

将式(17)代入式(18), 比较 $z^{(j)}(k)$, $v(k)$ 和 $v_{\omega}(k)$ 的系数可得如下方程:

$$\begin{cases} P(k) = Q + A^T T(k+1)P(k+1)A, \\ P(N) = Q_N, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (22)$$

其中:

$$\begin{aligned} T(k) &= I - P(k)\bar{B}L^{-1}(k)\bar{B}^T, \\ L(k) &= R + \bar{B}^T P(k)\bar{B}, \end{aligned}$$

$P(k)$ 为矩阵Riccati差分方程的唯一半正定解;
 $P_1(k)$ 和 $P_2(k)$ 分别为矩阵差分方程:

$$\begin{cases} P_1(k) = A^T T(k+1)S_1(k+1), \\ P_1(N) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (23)$$

和

$$\begin{aligned} P_2(k) &= A^T T(k+1)S_2(k+1), \\ P_2(N) &= 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (24)$$

的唯一解; 伴随向量 $g^{(j)}(k)$ 为差分方程

$$\begin{cases} g^{(j)}(k) = A^T T(k+1)[g^{(j)}(k+1) + \\ \quad P(k+1)A_1 x^{(j-1)}(k-\tau)], \\ g^{(j)}(N) = 0, \\ k = 0, 1, \dots, N-1, \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (25)$$

的唯一解. 显然, 通过求解以上矩阵差分方程可得到 $P(k)$, $P_1(k)$ 和 $P_2(k)$. 进一步, 由最优控制律、两点边值问题(17)和(18), 式(19)可得状态向量序列与最优控制律分别为

$$\begin{cases} z^{(j)}(k+1) = \\ T(k+1)[Az^{(j)}(k) + A_1 x^{(j-1)}(k-\tau)] - \\ \bar{B}L^{-1}(k+1)\bar{B}^T g^{(j)}(k+1) + \\ [D - \bar{B}L^{-1}(k+1)\bar{B}^T S_1(k+1)]v(k) - \\ \bar{B}L^{-1}(k+1)\bar{B}^T S_2(k+1)v_{\omega}(k), \\ k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ z^{(j)}(k) = \varphi(k), \quad k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0, \\ j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (26)$$

和

$$\begin{cases} u^{(j)}(k) = \\ -L^{-1}(k+1)\bar{B}^T\{P(k+1)[Az^{(j)}(k) + \\ A_1 x^{(j-1)}(k-\tau)] + g^{(j)}(k+1) + \\ S_1(k+1)v(k) + S_2(k+1)v_{\omega}(k)\}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (27)$$

其中

$$x^{(j)}(k) = z^{(j)}(k) - \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-1} A^{-h} B u^{(j)}(i), \quad (28)$$

且

$$\begin{aligned} S_1(k) &= P(k)D + P_1(k)\Omega_1 - P_2(k)\Omega_2, \\ S_2(k) &= P_1(k)\Omega_2 + P_2(k)\Omega_1. \end{aligned} \quad (29)$$

由式(25)知, 式(26)中的 $g^{(j)}$ 是 $x^{(j-1)}$ 的线性向量函数. 取系统(5)的控制律为

$$\begin{cases} u(k) = -L^{-1}(k+1)\bar{B}^T\{P(k+1)[Az(k) + \\ A_1 x(k-\tau)] + g(k+1) + \\ S_1(k+1)v(k) + S_2(k+1)v_{\omega}(k)\}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (30)$$

其中 $g(k)$ 由下式确定:

$$\begin{cases} g(k) = A^T T(k+1)[g(k+1) + \\ P(k+1)A_1 x(k-\tau)], \\ g(N) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (31)$$

则系统(5)的闭环系统为

$$\begin{cases} z(k+1) = \\ T(k+1)[Az(k) + A_1 x(k-\tau)] - \\ \bar{B}L^{-1}(k+1)\bar{B}^T g(k+1) + \\ [D - \bar{B}L^{-1}(k+1)\bar{B}^T S_1(k+1)]v(k) - \\ \bar{B}L^{-1}(k+1)\bar{B}^T S_2(k+1)v_{\omega}(k), \\ k = 0, 1, 2, \dots, N-1, \\ z(k) = \varphi(k), \quad k = -\tau, -\tau+1, \dots, 0. \end{cases} \quad (32)$$

根据引理2, 系统(25)的解序列一致收敛于系统(31)的解. 所以, 最优控制序列(27)一致收敛于控制律(30), 即由式(30)确定的控制律就是系统(5)关于性能指标(6)的最优控制. 综上所述, 可以总结为下述定理:

定理 1 系统(1)满足性能指标(6)的前馈-反馈最优控制律:

$$\begin{cases} u^*(k) = \\ -L^{-1}(k+1)(A^{-h}B)^T\{P(k+1)[Ax(k)+ \\ \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-h-1}Bu(i) + A_1x(k-\tau)] + \\ g^{(\infty)}(k) + S_1(k+1)v(k) + S_2(k+1)v_\omega(k)\}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (33)$$

其中: $P(k)$, $P_1(k)$ 和 $P_2(k)$ 由矩阵差分方程组(22)(23)和(24)确定, v_ω 和 $S_1(k)$, $S_2(k)$ 分别由式(19)和(29)定义, $g^{(\infty)}(k)$ 是伴随方程(25)解序列的极限.

3.2 无限时间最优控制(Infinite horizon optimal control)

定理 2 考虑由式(1)描述的线性离散时滞系统关于二次型平均性能指标(7)的最优控制问题. 设 (A, B) 可控, (A, Q) 可观测, 则前馈-反馈最优控制律唯一存在, 即

$$\begin{aligned} u^*(k) = & -L^{-1}(A^{-h}B)^T\{P[Ax(k) + \\ & \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-h-1}Bu(i) + A_1x(k-\tau)] + \\ & g^{(\infty)}(k) + S_1v(k) + S_2v_\omega(k)\}. \end{aligned} \quad (34)$$

其中:

$$\begin{aligned} S_1 &= PD + P_1\Omega_1 - P_2\Omega_2, \\ S_2 &= P_1\Omega_2 + P_2\Omega_1, \end{aligned}$$

P 为下列离散Riccati矩阵方程的唯一正定解:

$$P - Q - A^TTPA = 0. \quad (35)$$

这里:

$$\begin{aligned} L &= R + (A^{-h}B)^TP(A^{-h}B), \\ T &= I - P(A^{-h}B)L^{-1}(A^{-h}B)^T, \end{aligned}$$

P_1, P_2 是下列矩阵方程的唯一解:

$$A^TT[P_1 \ P_2]H - [P_1 \ P_2] = [-A^TTPD \ 0]. \quad (36)$$

其中

$$H = \begin{bmatrix} \Omega_1 & \Omega_2 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 \end{bmatrix}. \quad (37)$$

$g^{(\infty)}(k) = \lim_{j \rightarrow \infty} g^{(j)}(k)$, 且解序列 $\{g^{(j)}(k)\}$ 满足

$$\begin{cases} g^{(j)}(k) = A^TT[g^{(j)}(k+1) + \\ \quad PA_1x^{(j)}(k-\tau)], \\ g^{(0)}(k) = 0, \ g^{(j)}(\infty) = 0, \\ k = 0, 1, 2, \dots; \ j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (38)$$

证 类似于定理1的推导, 可以得到离散Riccati代数方程(35)和

$$\begin{aligned} A^TTP_1\Omega_1 - P_1 &= A^TT(P_2\Omega_2 - PD), \\ A^TTP_2\Omega_1 - P_2 &= -A^TTP_1\Omega_2. \end{aligned} \quad (39)$$

由 (A, B) 可控、 (A, Q) 可观测知Riccati矩阵方程(35)有唯一正定解 P . 下面只需证明矩阵方程(36)有唯一解 P_1 和 P_2 . 易知式(39)可改写为式(36). 注意到 H 为正交矩阵, 即 H 的所有特征值 $\lambda_i(H)$ 满足 $|\lambda_i(H)| = 1$. 由 (A, B) 的可控性、 (A, Q) 的可观测性及线性离散系统最优控制理论知 $|\lambda_j(A^TT)| < 1$. 从而有

$$\begin{aligned} \lambda_i(H)\lambda_j(A^TT) &\neq 1, \\ i &= 1, 2, \dots, 2m; \ j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (40)$$

由参考文献[19], 可知矩阵方程(36)有唯一解 $[P_1 \ P_2]$. 证毕.

4 次优控制律的实现算法(Design of the sub-optimal control law)

事实上, 笔者无法求得最优控制律(33)和(34)中的 $g^{(\infty)}(k)$, 实际应用中可用 $g^{(M)}(k)$ (M 为某确定的自然数)取代. 从而分别得到有限时间和无限时间最优控制问题的 M 阶次优控制律为

$$\begin{cases} u_M(k) = \\ -L^{-1}(k+1)(A^{-h}B)^T\{P(k+1)[Ax(k)+ \\ \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-h-1}Bu(i) + A_1x(k-\tau)] + \\ g^{(M)}(k) + S_1(k+1)v(k) + S_2(k+1)v_\omega(k)\}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (41)$$

和

$$\begin{cases} u_M(k) = -L^{-1}(A^{-h}B)^T\{P[Ax(k)+ \\ \sum_{i=k-h}^{k-1} A^{k-i-h-1}Bu(i) + A_1x(k-\tau)] + \\ g^{(M)}(k) + S_1v(k) + S_2v_\omega(k)\}, \\ k = 0, 1, \dots, N-1. \end{cases} \quad (42)$$

注 1 次优控制律(41)及(42)中的第3、第4项是前馈控制补偿项. 它的作用是补偿外界正弦扰动对系统性能的影响.

注 2 次优控制律(41)与(42)中的 $x(k)$ 和 $x(k-\tau)$ 是系

统状态的精确值, 只有其中的 $g^{(M)}(k)$ 是用第 M 次逼近的结果代替 $g^{(\infty)}(k)$. 因此该次优控制律 $u_M(k)$ 比第 M 次迭代得到的结果 $u^{(M)}(k)$ 更接近于最优控制律 $u^*(k)$.

算法1 次优控制律(41)的计算过程:

1) 分别由式(22)(23)及(24)求出 $P(k)$, $P_1(k)$ 和 $P_2(k)$. 令 $M = 0$, $j = 0$, 给定 $\varepsilon > 0$;

2) 令 $M = j$, 由式(25)得到 $g^{(j)}(k)$, 代入式(41)中求出 $u_M(k)$;

3) 由下式计算出 J_M :

$$J_M = \frac{1}{2} z^T(N) Q_N z(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [z^T(k) Q z(k) + u_M^T(k) R u_M(k)]; \quad (43)$$

4) 当 $|(J_M - J_{M-1})/J_M| < \varepsilon$, 输出 $u_M(k)$, 结束; 否则, 由式(26)计算 $z^{(j)}(k)$, 令 $j = j + 1$, 转至2).

求次优控制律(42)的计算过程与求次优控制律(41)的计算过程相似, 只要将求解矩阵差分方程(22)(23)和(24)改为求解矩阵代数方程(35)和(36).

5 算例仿真(An illustrative example)

考虑由式(1)和(2)描述的2阶离散时滞系统和有限时间二次型性能指标(6), 其中:

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} 1 & -0.15 \\ 0.15 & 0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \\ A_1 = \begin{bmatrix} -0.1 & 0 \\ -0.15 & 0.15 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.1 \\ 0 & -0.4 \end{bmatrix}, \\ x(k) = [0 \ 0]^T, k = -h, -h+1, \dots, 0, \\ v(k) = \left[\sin\left(\frac{\pi}{50}k + \frac{\pi}{2}\right) \ \sin\left(\frac{\pi}{20}k\right) \right]^T, \\ Q_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, Q = Q_N, R = 3. \end{cases} \quad (44)$$

表1列出了迭代次数 M 不同时的性能指标值 J_M . 图1给出了时滞 $\tau = 15$, $h = 15$ 时, 迭代次数分别为0和3时前馈-反馈次优控制律的控制量 u 和状态变量 x 的仿真结果.

令 $\varepsilon = 0.1$. 在表1中, 由于 $|(J_3 - J_2)/J_3| < \varepsilon$, 从而 $u_3(k)$ 可作为前馈-反馈最优控制律 $u^*(k)$. 从图1~3中可以看到, 前馈-反馈次优控制对外界正弦扰动的鲁棒性较好, 且迭代次数越多, 所得的次优控制律对最优控制律的逼近程度越高.

表1 $\tau = 15, h = 15$ 时不同迭代次数
性能指标值比较

Table 1 Performance indices when $\tau = 15, h = 15$

M	0	1	2	3
J_M	2508.2	2145.1	2062.2	1952

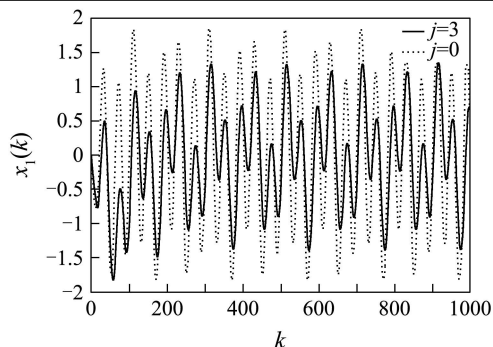


图1 $\tau = 15, h = 15$ 时状态变量 x_1 的曲线

Fig. 1 Simulation curves of the system when $\tau = 15, h = 15$

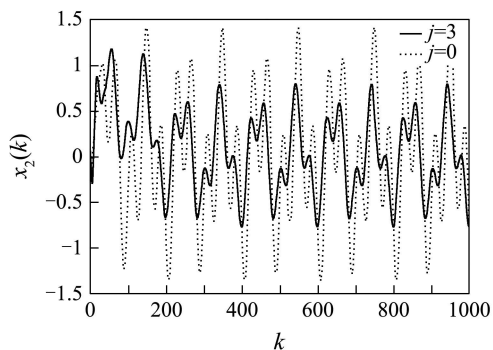


图2 $\tau = 15, h = 15$ 时状态变量 x_2 的曲线

Fig. 2 Simulation curves of the system when $\tau = 15, h = 15$

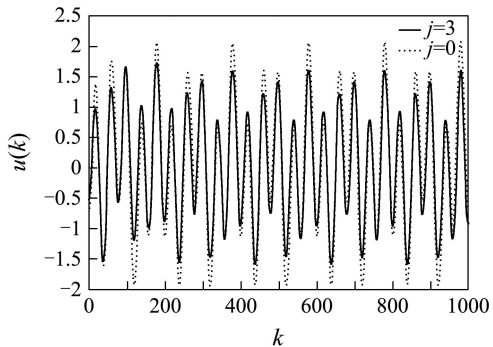


图3 $\tau = 15, h = 15$ 时最优控制律 u 的曲线

Fig. 3 Simulation curves of the system when $\tau = 15, h = 15$

6 结论(Conclusion)

本文提出了一种变量代换方法, 将状态和控制都含时滞的离散系统化为了不含控制时滞的系统. 并利用逐次逼近法^[18]给出了状态和控制都含时滞的离散系统在正弦扰动下的最优减振的近似控制算法. 通过示例的仿真研究表明, 该方法容易实现, 且设计的控制器对正弦扰动有较强的抑制能力.

参考文献(References):

- [1] LEE T T, SHIH C L. Discrete-time optimal control for linear time-delay systems with deterministic disturbances[J]. *IEEE Proceedings Part D: Control Theory and Applications*, 1991, 138(6): 573–578.
- [2] TANG G Y, WANG H H. Suboptimal control for discrete linear systems with time-delay: a successive approximation approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2005, 31(3): 419–426.

- [3] YUE D, HAN Q L. Delayed feedback control of uncertain systems with time-varying input delay[J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 233 – 240.
- [4] MULGUND S S, STENGEL R F. Optimal nonlinear estimation for aircraft flight control in wind shear[J]. *Automatica*, 1996, 32 (1): 3 – 13.
- [5] MA H, TANG G Y, ZHAO Y D. Feedforward and feedback optimal control for offshore structures subjected to irregular wave forces[J]. *Ocean Engineering*, 2006, 33(8/9): 1105 – 1117.
- [6] WANG W, TANG G Y. Feedback and feedforward optimal control for offshore jacket platforms[J]. *China Ocean Engineering*, 2004, 18(4): 515 – 526.
- [7] DO K D, PAN J, JIANG Z P. Robust adaptive control of underactuated ships on a linear course with comfort[J]. *Ocean Engineering*, 2003, 30(17): 2201 – 2225.
- [8] CHANG K, SHIM I, GWITAE P. Adaptive repetitive control for an eccentricity compensation of optical disk drivers[J]. *IEEE Transactions on Consumer Electronics*, 2006, 52(2): 445 – 450.
- [9] RICHARD R, GEORGE W. Internal model based tracking and disturbance rejection for stable well-posed systems[J]. *Automatica*, 2003, 39(9): 1555 – 1569.
- [10] TANG G Y, ZHANG S M. Optimal rejection with zero steady-state error to sinusoidal disturbances for time-delay[J]. *Asian Journal of Control*, 2006, 8(2): 117 – 123.
- [11] TANG G Y, ZHANG S M, ZHANG B L. Optimal tracking control with zero steady-state error for time-delay systems with sinusoidal disturbances, Journal of Sound and Vibration[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2007, 299(3): 633 – 644.
- [12] BODSON M. Performance of an adaptive algorithm for sinusoidal disturbance rejection in high noise[J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1133 – 1140.
- [13] MARINE R, SANTOSUOSSO G L, TOMEI P. Robust adaptive compensation of biased sinusoidal disturbances with unknown frequency[J]. *Automatica*, 2003, 39(10): 1755 – 1761.
- [14] TANG G Y. Feedforward and feedback optimal control for linear systems with sinusoidal disturbances[J]. *High Technology Letters*, 2001, 7(4): 16 – 19.
- [15] LINDQUIST A, YAKUBOVICH V A. Optimal damping of forced oscillations in discrete-time systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(6): 786 – 802.
- [16] TANG G Y, GAO D X. Approximation design of optimal controllers for nonlinear systems with sinusoidal disturbances[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2007, 66(2): 403 – 414.
- [17] YUE D, HAN Q L, LAM J. Network-based robust H_∞ control of systems with uncertainty[J]. *Automatica*, 2005, 41(6): 999 – 1007.
- [18] TANG G Y. Suboptimal control for nonlinear systems: a successive approximation approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(5): 429 – 434.
- [19] KLEIN A, SPREIJ P. On Stein's equation, Vandermonde matrices and Fisher's information matrix of time series processes. Part I: The autoregressive moving average process[J]. *Linear Algebra and its Applications*, 2001, 329(1/3): 9 – 47.

作者简介:

唐功友 (1953—), 男, 中国海洋大学信息科学与工程学院教授, 博士生导师, 1991年获华南理工大学自动控制理论与应用专业博士学位, 主要研究方向为时滞系统、非线性系统、网络控制系统及大系统理论与应用等, E-mail: gtang@ouc.edu.cn;

王笑寒 (1982—), 女, 中国海洋大学硕士研究生, 研究方向为时滞系统的分析与控制, E-mail: wangxiaohan@ouc.edu.cn;

王海红 (1974—), 女, 青岛科技大学信息科学技术学院讲师, 博士, 研究方向为时滞系统和非线性系统的分析与控制, E-mail: wanghaihong@qust.edu.cn.