

文章编号: 1000-8152(2008)04-0683-05

双输入单输出潜遗传变论域模糊控制算法及其收敛性

龙祖强^{1,2}, 梁昔明¹, 游开明², 陈列尊²

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083; 2. 衡阳师范学院 物理与电子信息科学系, 湖南 衡阳 421008)

摘要: 研究了一种变论域模糊控制算法及其收敛性问题. 首先, 针对常见的双输入单输出模糊控制器, 提出了一种新型的潜遗传变论域模糊控制算法, 通过使用模糊单值转换函数, 简化了新算法推理后件的变论域操作, 显著地减少了计算量. 然后, 从理论上证明了新算法的收敛性. 最后, 为了验证算法的有效性, 本文将新算法和已有的两个典型算法做了倒立摆实验对比. 结果表明, 相对于已有算法, 由新算法构成的控制器在控制精度上有明显的提高.

关键词: 模糊控制; 变论域; 模糊逻辑; 模糊推理; 收敛性; 伸缩因子; 潜遗传

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Double-input and single-output fuzzy control algorithm with potentially-inherited variable universe and its convergence

LONG Zu-qiang^{1,2}, LIANG Xi-ming¹, YOU Kai-ming², CHEN Lie-zun²

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

2. Department of Physics and Electronics Information Science, Heng Yang Normal University, Hengyang Hunan 421008, China)

Abstract: The problems of variable-universe fuzzy control algorithm and its convergence are studied in this paper. First, a novel potentially-inherited variable-universe fuzzy control algorithm is proposed for conventional double-input and single-output fuzzy controllers. By using a fuzzy-singleton transition function, the computation of the algorithm is significantly reduced because its operations are simplified on the variable universe of the consequent part of inference. Then, the convergence of the algorithm is proved theoretically. Finally, to confirm the algorithm's effectiveness, comparison experiments on inverted pendulum are done using two typical algorithms and the new one. The results of experiments show that, compared with the two typical algorithms, the controller based on the new algorithm obtains notable improvement in control precision.

Key words: fuzzy control; variable universe; fuzzy logic; fuzzy inference; convergence; contraction-expansion factor; potential heredity

1 引言(Introduction)

变论域模糊控制器是一种高精度的自适应控制器. 所谓变论域模糊控制器, 就是通过选取合适的论域伸缩因子, 以论域之变应误差之变, 使得实际的控制规则大幅度增加, 越接近期望控制点, 控制器的档级越小, 因而可获得较高的控制精度. 文献[1]首次提出了变论域模糊控制器的基本结构和一些相关算法, 并指出变论域可以通过潜遗传、显遗传、或者逐步显遗传等方法来实现. 注意, 潜遗传与显遗传的区别在于计算输出模糊集的峰值或模糊单值元素^[2]的方法不同. 文献[3,4]使用变论域模糊控制算法取得了四级倒立摆等非线性对象的控制成功. 借助于变论域方法, 文献[5]对自主汽车侧向控制, 文献[6]对达芬混沌系统的控制, 以及文献[7]对飞行器

摇摆控制均取得了良好的效果. 由此可见, 变论域方法是有效可行的. 针对常用的双输入单输出模糊控制器, 文献[1]只提出了显遗传变论域控制算法, 并且这种算法比较复杂, 对计算硬件要求高, 在应用上受到了限制. 为了解决这个问题, 本文将提出一种在计算上相对简单的双输入单输出潜遗传变论域模糊控制算法.

2 潜遗传变论域模糊控制算法(Potentially-inherited variable-universe fuzzy control algorithm)

2.1 预备知识(Preliminaries)

定义 1^[8] 若 A 为给定论域 X 上的一组模糊集, $\mathbb{N}$ 为自然数集, $i, p \in \mathbb{N}$, 且令 $A = \{A_i\} (1 \leq i \leq p)$.

收稿日期: 2007-09-20; 收修改稿日期: 2008-01-28.

基金项目: 国家重点基础研究发展规划(973)项目(2002CB312203); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20070533131); 湖南省教育厅科研课题(06C200).

设 x_i 为 A_i 的峰点, 另设 $m, n \in [1, 2, \dots, p], \forall m, n$, 如果 $m \neq n$, 则 $x_m \neq x_n$, 且满足

$$\sum_{i=0}^n A_i(x) = 1, x \in X, \quad (1)$$

则称 A_i 为 A 的一个基元, 并称 A 为 x 上的一个基元组.

定义2 若 A 为 X 上的一个基元组, 如果对任意 $x \in X$, 且 $x \neq x_i$, 任意两个相邻的基元 A_i 与 A_{i+1} , 如果满足

$$A_i(x) \neq 0 \neq A_{i+1}(x), \quad (2)$$

$$A_i(x) + A_{i+1}(x) = 1, \quad (3)$$

则称 A 为 X 上的一个双相基元组. 特别地, 若 $A_i(x)$ 为线性函数时, 则称 A 为 X 上的一个双相线性基元组.

定义3 若 $j, q \in \mathbb{N}, r = \max(p, q), A = \{A_i\} (1 \leq i \leq p)$ 与 $B = \{B_j\} (1 \leq j \leq q)$ 分别为偏差与偏差变化率论域 $X = [-E, E], Y = [-EC, EC]$ 上的双相线性基元组, $C = \{z_{ij}\}$ 为控制输出量模糊单值集, C 的论域 $Z = [-U, U]$, 令辅助模糊单值集 $W = \{w_s\} (1 \leq s \leq r), \{w_s\} = \{z_{ij}\}$, 如果有严格单调递增函数 $f: C \rightarrow W, f(z_{ij}) = w_s$, 且满足

$$f(z_{pq}) = w_1, f(z_{11}) = w_r, \quad (4)$$

$$-U = w_1 < w_2 < \dots < w_r = U, \quad (5)$$

$$-U = z_{pq} < w_{(p-1)q} < \dots < z_{11} = U, \quad (6)$$

则称 f 为模糊单值转换函数.

设置辅助模糊单值集 W 的目的, 是为了通过 f 对 C 矩阵各元素的变论域操作简化为对 W 各元素的变论域操作.

2.2 控制算法(Control algorithm)

为了计算方便, 隶属度函数的形状取为“三角波”. 对于时间序列 $k = 0, 1, 2, \dots$, 在 k 时刻的峰值点 x_i, y_j 及模糊单值元素 z_{ij}, w_s 分别记为 $x_i^k, y_j^k, z_{ij}^k, w_s^k$. 相应地, 在 k 时刻的偏差及偏差变化率隶属度函数分别记为 $A_i(x^k, k)$ 和 $B_j(y^k, k)$, 且基元组 A 和 B 均为双相线性基元组. 对偏差、偏差变化率及输出量的对应的伸缩因子 $\alpha(x), \beta(x, y)$ 和 $\gamma(z)$ 规定如下:

$$\alpha(x) = \left(\frac{|x|}{E}\right)^t, \quad (7)$$

$$\beta(x, y) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{|x|}{E} + \frac{|y|}{EC}\right)\right)^t, \quad (8)$$

$$\gamma(z) = \left(\frac{|z|}{U}\right)^t. \quad (9)$$

其中 t 为参数, $0 < t < 1$. 令控制算法步骤如下:

步骤0 任意给定控制器的初值输入 $x^0 \in X, y^0 \in Y$, 控制器的输出

$$z^1 = F(x^0, y^0, 0) =$$

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q A_i(x^0, 0) B_j(y^0, 0) z_{ij}^0. \quad (10)$$

步骤1 z^1 作用于对象后产生系统输出, 该输出与参考输入比较后得到输入 x^1 和 y^1 , 取 $x_i^1 = \alpha(x^1)x_i^0, y_j^1 = \beta(x^1, y^1)y_j^0, w_s^1 = \gamma(z^1)w_s^0$, 并由模糊单值转换函数得 $z_{ij}^1 = f(w_s^1)$, 于是

$$z^2 = F(x^1, y^1, 1) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q A_i(x^1, 1) B_j(y^1, 1) z_{ij}^1. \quad (11)$$

步骤k z^k 作用于对象后产生系统输出, 该输出与参考输入比较后得到输入 x^k 和 y^k , 取 $x_i^k = \alpha(x^k)x_i^0, y_j^k = \beta(x^k, y^k)y_j^0, w_s^k = \gamma(z^k)w_s^0$, 并由模糊单值转换函数得 $z_{ij}^k = f(w_s^k)$, 于是

$$z^{k+1} = F(x^k, y^k, k) =$$

$$\sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q A_i(x^k, k) B_j(y^k, k) z_{ij}^k. \quad (12)$$

定理1 若 $A(x, 0), B(y, 0), F(x, y, 0)$ 分别简记为 $A(x), B(y), F(x, y)$, 则双输入单输出潜遗传变论域模糊控制算法可表示为

$$z^{k+1} =$$

$$\gamma(z^k) F(x^k / \alpha(x^k), y^k / \beta(x^k, y^k)) =$$

$$\gamma(z^k) \cdot \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q A_i(x^k / \alpha(x^k)) B_j(y^k / \beta(x^k, y^k)) z_{ij}^0. \quad (13)$$

证 因为 $x_i^k = \alpha(x^k)x_i^0, y_j^k = \beta(x^k, y^k)y_j^0$, 得

$$A(x^k, k) = A(x^k / \alpha(x^k), 0), \quad (14)$$

$$B(y^k, k) = B(y^k / \beta(x^k, y^k), 0), \quad (15)$$

又有

$$z_{ij}^k = \gamma(z^k) z_{ij}^0. \quad (16)$$

对式(14)(15)略去时间变量 k , 并把式(14)~(16)代入式(12)后即得式(13). 证毕.

2.3 算法的收敛性(Convergency property of the algorithm)

定理2 假设 $\forall k, x^k \neq 0$, 且有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^k = 0. \quad (17)$$

若 $\alpha(x^k), \gamma(z^k)$ 满足如下平稳性:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\alpha(x^{k-1})}{\alpha(x^k)} = 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\gamma(z^k)}{\gamma(z^{k-1})} = 1, \quad (18)$$

则 z^{k+1} 必随 $x^k \rightarrow 0$ 而收敛. 特别地, 若 x^k 较之 $\alpha(x^k)$ 为高阶无穷小, 则 z^{k+1} 必随 $x^k \rightarrow 0$ 而收敛于0.

证 由式(14)~(16)的推导方法, 不难得

$$F(x^k, y^k, k) =$$

$$\frac{\gamma(z^k)}{\gamma(z^{k-1})} \cdot F(x^k \frac{\alpha(x^{k-1})}{\alpha(x^k)}, y^k \frac{\beta(x^{k-1}, y^{k-1})}{\beta(x^k, y^k)}, k-1). \quad (19)$$

考虑

$$\begin{aligned} & |z^{k+1} - z^k| = \\ & |F(x^k, y^k, k) - F(x^{k-1}, y^{k-1}, k-1)| = \\ & |F(x^k, y^k, k) - F(x^k, y^k, k-1) + \\ & F(x^k, y^k, k-1) - F(x^{k-1}, y^{k-1}, k-1)| \leq \\ & |F(x^k, y^k, k) - F(x^k, y^k, k-1)| + \\ & |F(x^k, y^k, k-1) - F(x^{k-1}, y^{k-1}, k-1)|, \end{aligned}$$

$F(x, y, k-1)$ 为连续函数, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 当 $|x^k - x^{k-1}| < \delta_1, |y^k - y^{k-1}| < \delta_2$ 时, 可得

$$|F(x^k, y^k, k-1) - F(x^{k-1}, y^{k-1}, k-1)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (20)$$

令中间变量

$$\rho = F(x^k \frac{\alpha(x^{k-1})}{\alpha(x^k)}, y^k \frac{\beta(x^{k-1}, y^{k-1})}{\beta(x^k, y^k)}, k-1),$$

由式(19)可得

$$\begin{aligned} & |F(x^k, y^k, k) - F(x^k, y^k, k-1)| = \\ & \left| \frac{\gamma(z^k)}{\gamma(z^{k-1})} \rho - F(x^k, y^k, k-1) \right| \\ & \leq \left| \frac{\gamma(z^k)}{\gamma(z^{k-1})} \rho - \rho \right| + |\rho - F(x^k, y^k, k-1)|. \end{aligned}$$

令 H 为 $F(x, y, k-1)$ 的上界, 则

$$\begin{aligned} & |F(x^k, y^k, k) - F(x^k, y^k, k-1)| \leq \\ & \left| \frac{\gamma(z^k)}{\gamma(z^{k-1})} - 1 \right| H + |\rho - F(x^k, y^k, k-1)|. \end{aligned}$$

由式(18)可知, $\exists k_1$, 当 $k > k_1$ 时,

$$\left| \frac{\gamma(z^k)}{\gamma(z^{k-1})} - 1 \right| H < \frac{\varepsilon}{4H} \cdot H = \frac{\varepsilon}{4}. \quad (21)$$

$\exists k_2$, 当 $k > k_2$ 时, $|\alpha(x^{k-1})/\alpha(x^k)| - 1| < \sqrt{\delta_1}$, 因为 $x^k \rightarrow 0, \exists k_3$; 当 $k > k_3$ 时, $|x^k| < \sqrt{\delta_1}$; 当 $k = \max(k_2, k_3)$ 时, 得 $|x^k| \cdot |\alpha(x^{k-1})/\alpha(x^k)| - 1| < \delta_1$, 必有

$$|\rho - F(x^k, y^k, k-1)| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (22)$$

由式(20)~(22), 并取 $K = \max(k_1, k_2, k_3)$ 时, 当 $k > K$ 时, 得

$$|z^{k+1} - z^k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

可记

$$v = \lim_{k \rightarrow +\infty} z^k, v \in \mathbb{R}.$$

若 x^k 较之 $\alpha(x^k)$ 为高阶无穷小, 由定理1立刻可得 $v = 0$. 证毕.

3 与其他算法的比较(Compared with other algorithms)

3.1 在计算简易性上的比较(Comparisons on computation)

目前, 在变论域模糊控制方面的研究已取得了一些有价值的理论成果^[1,3~9], 其中以文献[1,4]提出的算法较有代表性. 文献[1]提出了双输入单输出显遗传变论域模糊控制算法. 文献[4]通过构造积分型伸缩因子, 获得了另一类变论域模糊控制算法. 通过分析文献[1,4]算法与本文算法, 得出它们的主要差别存在于以下3个方面:

1) 本文算法通过设置模糊单值转换函数 f , 把对输出矩阵 $C_{p \times q}$ 各元素的变论域操作转换为对辅助向量 W_r 各元素的变论域操作, 使推理后件的变论域操作得到了较大的简化, 因而其相应的计算量得到了显著的减少. 这是文献[1,4]算法所不具备的;

2) 文献[1]算法需要四级求和运算, 而本文算法只需两级求和运算. 相对于前者, 后者的计算量随模糊划分数的增加而呈指数递减;

3) 文献[4]算法在推理后件部分采用积分型伸缩因子, 本文算法采用指数型伸缩因子, 后者比前者明显简单.

3.2 在控制效果上的比较(Comparisons on control performances)

例1 用倒立摆实物控制来考察本文的(13)算法、文献[1]的式(32)算法与文献[4]的式(23)算法的控制效果, 被控对象采用ZWP-II型单级旋转式倒立摆, 其结构示意图如图1所示. 令 θ 表示倒摆角度, φ 表示摆杆角度, 控制目标为 $\theta = 0, \varphi = 0$.

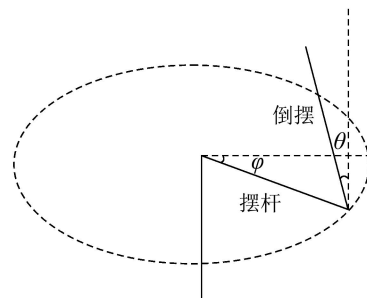


图1 ZWP-II型倒立摆结构示意图

Fig. 1 Sketch map for ZWP-II inverted pendulum

现设模糊控制规则如表1所示, 其中, E 和 E_c 表示偏差与偏差变化率, Ne , Ze 和 Pos 表示“负”、“零”和“正”之意, 并设系统控制框图如图2所示^[10,11].

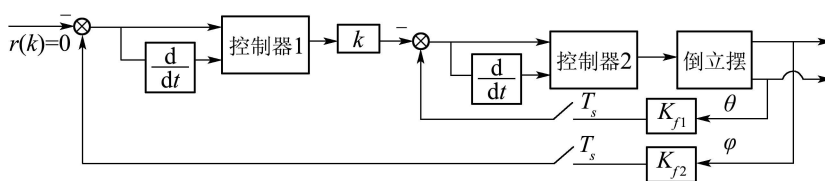


图2 倒立摆控制系统结构框图

Fig. 2 Block diagram of inverted pendulum control system

表1 模糊控制规则
Table 1 Fuzzy control rules

E	Ec		
	Ne	Ze	po
Ne	Po	Po	Ze
Ze	Po	Ze	Ze
Po	Ze	Ne	Ne

图2中: $K = 0.3$, $K_{f1} = 68.79$, $K_{f2} = 22.93$.并取伸缩因子参数 $t = 0.854$, 采样步长 $T_s = 0.01s$, 控制器1和控制器2采用的算法相同. 并令论域边界值 $E_1 = E_2 = U = 6$, 且设 x_1, x_2 分别表示偏差和偏差变化率的实际值, 则 E 和 Ec 的隶属度函数均采用如下“三角波”形式:

$$\begin{aligned} \text{Ne}(x) &= \begin{cases} [x - 0]/[-6 - 0], & -6 \leq x \leq 0, \\ 0, & x < -6, x > 0, \end{cases} \\ \text{Ze}(x) &= \begin{cases} [x - (-6)]/[0 - (-6)], & -6 \leq x < 0, \\ [x - 6]/[0 - 6], & 0 < x \leq 6, \\ 0, & x < -6, x > 6, \end{cases} \\ \text{Po}(x) &= \begin{cases} [x - 0]/[6 - 0], & 0 \leq x \leq 6, \\ 0, & x < 0, x > 6. \end{cases} \end{aligned}$$

于是, 控制器(13)可写成下列实际形式:

$$\begin{aligned} u^k &= 6\text{Ne}(x_1^k)\text{Ne}(x_2^k) + 6\text{Ne}(x_1^k)\text{Ze}(x_2^k) + \\ & 6\text{Ze}(x_1^k)\text{Ne}(x_2^k) - 6\text{Ze}(x_1^k)\text{Po}(x_2^k) - \\ & 6\text{Po}(x_1^k)\text{Ze}(x_2^k) - 6\text{Po}(x_1^k)\text{Po}(x_2^k). \end{aligned}$$

实验分3次进行, 第1次取为本文算法, 第2次为文献[1]算法, 第3次取为文献[4]算法, 得到的结果分别绘制在图3和图4中. 为了方便结果的比较, 第1次实验得到的结果同时绘制在图3与图4中.

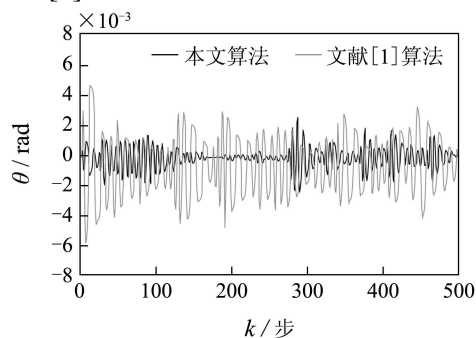
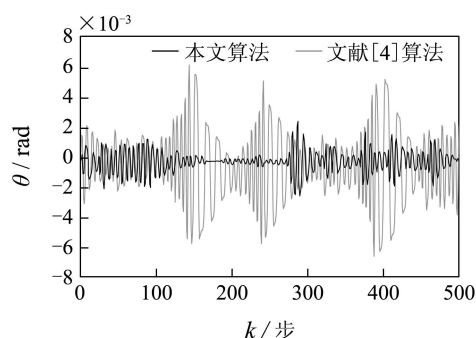
结果分析:

1) 由图3可知, 取本文算法时, $|\theta|$ 的最大值约为 $2.5 \times 10^{-3}\text{rad}$; 而取文献[1]所给算法时, $|\theta|$ 的最大值约为 $5.0 \times 10^{-3}\text{rad}$;

2) 由图4可知, 取文献[4]所给算法时, $|\theta|$ 的最大值约为 $6.5 \times 10^{-3}\text{rad}$; 而取本文算法时, $|\theta|$ 的最

大值约为 $2.5 \times 10^{-3}\text{rad}$.

所以, 对于倒摆角度, 本文算法不仅取得了稳定的控制, 且所取得的控制精度均优于文献[1]算法和文献[4]算法.

图3 与文献[1]比较的 θ 响应曲线Fig. 3 Response curve of θ comparing with Ref.[1]图4 与文献[4]比较的 θ 响应曲线Fig. 4 Response curve of θ comparing with Ref.[4]

4 结论(Conclusion)

变论域模糊控制器具有控制精度高, 所需模糊规则少的优点, 吸引了许多研究者的兴趣, 并取得了不少的成果. 相对已有成果, 本文的创新之处在于, 利用模糊单值转换函数简化了输出模糊集的变论域操作, 并在此基础上, 提出了双输入单输出的潜遗传变论域模糊控制算法. 并且, 从理论上证明了该算法的收敛性. 相对已有算法, 本文算法具有更小的计算量. 倒立摆控制实验结果表明, 本文算法的控制效果优于文献[1]与文献[4]所给算法. 因此, 双输入单输出潜遗传变论域模糊控制算法是一种简单而可靠的高精度模糊控制算法.

参考文献(References):

- [1] 李洪兴. 变论域自适应模糊控制器[J]. 中国科学(E辑), 1999, 29(1): 32–42.
(LI Hongxing. Adaptive fuzzy control based on variable universe[J]. *Science in China (Series E)*, 1999, 29(1): 32–23.)
- [2] 王立新. 模糊系统与模糊控制教程[M]. 北京:清华大学出版社, 2003: 18–19.
(WANG Lixin. *A Course in Fuzzy System and Control*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2003: 18–19.)
- [3] LI H X, MIAO Z H, WANG J Y. Variable universe adaptive fuzzy control on the quadruple inverted pendulum[J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 45(2): 213–224.
- [4] 李洪兴, 苗志宏, 王加银. 非线性系统的变论域稳定自适应控制[J]. 中国科学(E辑), 2002, 32(2): 211–223.
(LI Hongxing, MIAO Zhihong, WANG Jiayin. Variable universe stable adaptive fuzzy control of nonlinear system[J]. *Science in China (Series E)*, 2002, 32(2): 211–223.)
- [5] 郭纯, 王江, 乔国栋. 自主汽车的侧向 H_∞ 自适应变论域模糊控制[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(6): 905–912.
(GUO Chun, WANG Jiang, QIAO Guodong. H-infinity variable universe fuzzy control for lateral control of autonomous vehicle[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(6): 905–912.)
- [6] WANG J, QIAO G D, DENG B. Observer-based robust adaptive variable universe fuzzy control for chaotic system[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, 23(3): 1013–1032.
- [7] ZENG L L, CHUN Y S, SVOBODA J. Control of wing rock phenomenon with a variable universe fuzzy controller[C]//*Proceedings of the 2004 American Control Conference*. Boston: IEEE Press, 2004, 2(30): 1719–1724.
- [8] 李洪兴. Fuzzy控制的本质与一类高精度Fuzzy控制器的设计[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(6): 868–876.
(LI Hongxing. Essence of fuzzy control in mathematics and design on a class of high-accuracy fuzzy controller[J]. *Control Theory & Applications*, 1997, 14 (6): 868–876.)
- [9] 岳士弘, 张绍杰, 李平. 变论域自适应模糊控制器失真率的计算[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 807–809.
(YUE Shihong, ZHANG Shaojie, LI Ping. Computation of distortion ratio of adaptive fuzzy controller based on variable universe[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 807–809.)
- [10] 张乃尧, ELBERT C, BELSCHNER R, 等. 倒立摆的双闭环模糊控制[J]. 控制与决策, 1996, 11(1): 85–88.
(ZHANG Naiyao, ELBERT C, BELSCHNER R, et al. The fuzzy control of inverted pendulum using double closed loop[J]. *Control and Decision*, 1996, 11(1): 85–88.)
- [11] ERIC K, DANIEL M, DAVID W. Designing stable MIMO fuzzy controllers[J]. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics-Part B*, 2005, 35(2): 372–380.

作者简介:

龙祖强 (1974—), 中南大学在读博士研究生, 衡阳师范学院讲师, 研究方向为模糊控制理论及应用、自适应控制, E-mail: dragon51@126.com;

梁晋明 (1967—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究方向为大系统的建模、最优控制、智能控制;

游开明 (1956—), 男, 博士, 教授, 研究方向为激光传输;

陈列尊 (1968—), 男, 副教授, 研究方向为电子技术、教育技术.