

基于划分的蚁群算法求解货物权重车辆路径问题

唐加福, 孔 媛, 潘震东, 董 颖

(东北大学 流程工业综合自动化教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 考虑单产品分销网络中的车辆路径问题(VRP: vehicle routing problem). 与以往诸多研究不同的是, 建立了一种带货物载重量的VRP模型(weighted VRP), 即车辆在两个顾客之间行驶时的载重量也作为影响运输费用的一个因素考虑. 因此, 需求量较大的顾客拥有较高的车辆运输优先权. 在分析了问题性质的基础上, 提出一种基于划分的蚁群算法PMMAS求解货物权重车辆路径问题, 并与其他常用的启发式算法进行比较分析, 表明了算法的有效性.

关键词: 车辆路径问题; 货物权重; 蚁群算法

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

An ant colony optimization algorithm for vehicle routing problem with cargo coefficient

TANG Jia-fu, KONG Yuan, PAN Zhen-dong, DONG Ying

(Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industrial of MOE, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: A distribution network between one warehouse and multiple retailers is considered. A model named weighted vehicle routing problem(VRP) is built. Being contrary to many other VRP models, the weight loaded in a vehicle through a route between two customers is considered as an important factor of system cost when a routing decision is made. With this method, the retailers with larger demands will have priority to be visited earlier. Finally, an ant colony optimization algorithm named PMMAS (partition based max-min ant system) combined with a special partition method is proposed to solve this model. Some illustrative examples are introduced to test the efficiency of the PMMAS, and comparison analysis is conducted with commonly used heuristic algorithms for vehicle routing problem.

Key words: vehicle routing problem (VRP); cargo coefficient; ant colony optimization

1 引言(Introduction)

车辆路径问题(vehicle routing problem, VRP)是分销系统中的一个关键问题, 是运筹学领域最为活跃的研究领域之一^[1]. VRP问题自提出以来, 已经衍生出了针对多种因素不同种类的模型. 针对约束的不同有带容量限制的车辆路径问题、带时间窗(软、硬时间窗)的车辆路径问题、多车型车辆路径问题、多运输中心的车辆路径问题、随机需求的车辆路径问题等等^[1,2]. 所有这些问题都没有考虑到载重量对费用目标的影响, 得到的最优路径仅是实际情况的一种近似. 在实际的物流活动中, 特别是优先满足需求大的客户, 车辆的载重量对运输费用的影响很大.

在一般VRP的基础上考虑车辆载重量得到一类

具有权重的车辆路径问题WVRP^[2~4](weighted vehicle routing problem), 该问题已经引起一些学者的广泛关注. 从问题的描述角度, 包括0-1混合整数规划方法^[2,3]、基于整车运输和散车运输的路径描述方法^[4]; 在求解算法方面, 有基于C-W节约的启发式算法^[4~6]、遗传算法^[4,7,8]、基于划分的遗传算法^[4]等. 这些算法仅针对中小规模的车辆路径问题非常有效^[6,7,9,10].

蚁群算法^[11,12](ant colony algorithm, ACA)是源于自然界的群体智能优化算法, 由Colormi等人于1991年首先提出并成功运用于对称和非对称旅行商问题(TSP). 本文建立了货物权重车辆路径问题的数学模型, 开发出基于划分的蚁群算法(partition based max-min ant system, 简称PMMAS). 该算法首

先基于规则对客户进行排序,然后采用一种有效的划分方法来求解,得到了比较好的结果.

2 建立模型(Model)

2.1 问题描述(Problem formulation)

典型的VRP问题是有容量限制的VRP即CVRP,一个分销中心服务 n 个客户,每个客户 i 有一个非负的需求量 q_i ,每一对客户 (i, j) 有一个相应的运输距离 d_{ij} ,分销中心有若干个可供派送的车辆,运载能力为 w . CVRP的目标是找到一条路径使总的运输费用最小,并且满足约束:每个客户只能被一辆车服务一次;车辆起始于分销中心;车辆容量不超过 w . 在满足上述约束下, WVRP考虑载重量对费用目标的影响. 因此权重车辆路径问题的总费用包括运输距离产生的费用、运输量产生的费用和发车费用.

2.2 符号(Symbol)

模型中需要用到的符号定义如下:

1) 下标: $i, j=0$ 表示分销中心; $i, j=1, 2, \dots, N$ 表示客户下标.

2) 参数: d_{ij} 为点 i 和 j 间的距离, $i, j=0, 1, \dots, N$; q_i 为客户在点 i 的需求, $i=1, 2, \dots, N$; a 为单位距离的行驶费用; b 为单位距离单位载重量的运输费用; w 为车辆的容量; d 为租车费用.

3) 决策变量: U_{ij} 为客户 i 到客户 j 的直接路径上的载重量, $Z_{ij} \in \{0, 1\}$ 表明是否存在 $i \rightarrow j$ 的直接路径.

2.3 WVRP的数学模型(Mathematical model for weighted VRP)

WVRP的目标是最小化费用,费用中的运距和发车费用,在一般VRP中都已经涉及,不同的是考虑了与运量有关费用,优先考虑需求量大的客户,有利于降低总的运输成本.

本文所考虑的车辆由第三方运输服务商提供,以一种租赁车辆的方式. 虽然不存在车辆数的限制,但因为每使用一辆车都需缴纳一定的租用费用 d ,所以在整个优化分销网络的过程中,尽可能减少车辆数也是优化费用的一个因素. 由于整车运输每次只服务一个零售商后返回分销中心,不存在优化问题. 本文仅考虑客户需求均小于车辆容量的情况.

基于以上分析,具有货物权重的车辆路径问题WVRP可以描述为

$$\min C = \sum_{\substack{i,j=0 \\ i \neq j}}^N (ad_{ij}Z_{ij} + bd_{ij}U_{ij}) + \sum_{i=1}^N (Z_{0i}d) \quad (1)$$

$$\text{s.t.} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (U_{ji}Z_{ji} - U_{ij}Z_{ij}) = q_i, \forall i > 0, \quad (2)$$

$$0 \leq U_{ij} \leq wZ_{ij}, \forall i, j, \quad (3)$$

$$\sum_{j=0}^N Z_{ij} = 1, \forall i > 0, \quad (4)$$

$$\sum_{j=0}^N Z_{ji} = 1, \forall i > 0, \quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^N Z_{0j} - \sum_{j=1}^N Z_{j0} = 0, \quad (6)$$

$$\sum_{i,j \ni s} Z_{ij} \leq |s| - 1, s \subseteq \{1, 2, \dots, N\}, \quad (7)$$

$$Z_{ij} = 0 \text{ or } 1, \forall i, j. \quad (8)$$

在WVRP的数学模型中,目标函数(1)最小化总费用,包括运距、运量和租车费用,约束(2)(4)(5)每个客户只被服务一次并满足需求,约束(3)限制车辆容量不超过 w ,式(6)(7)保证车辆起始于分销中心0,客户之间不形成内环.

3 带权重车辆路径问题的最大最小蚁群算法(Max-min ant system for weighted VRP)

MMAS^[12,13]由Stützle等人于2000年在蚂蚁系统(AS)算法的基础上首次提出来的. 与蚂蚁系统相比,MMAS通过所做的一些改进,能更好地避免优化算法出现过早的停滞现象. 这些改进包括:在信息素更新过程中,仅允许最优蚂蚁添加信息素;对信息素的大小范围限定在区间 $[\tau_{\min}, \tau_{\max}]$ 内;将信息素初始化为 $\tau_{\max}$;当陷入局优或解在几代中没有改进,则重新初始化信息素.

每个蚂蚁在产生路径的过程中要完成一次对所有顾客的环游. 首先 m 只蚂蚁基于某种规则(如随机)置于 n 个客户上,位于客户 i 上的蚂蚁 k 由以概率 P_{ij}^k 按照随机选择规则(random proportional rule)选择下一个客户 j ,即确定路径中的下一个点:

$$P_{ij}^k = \begin{cases} \frac{[\tau_{ij}]^\alpha [\eta_{ij}]^\beta}{\sum_{l \in N_i^k} [\tau_{il}]^\alpha [\eta_{il}]^\beta}, & \text{if } j \in N_i^k, \\ 0, & \text{if } j \notin N_i^k. \end{cases} \quad (9)$$

N_i^k 为蚂蚁 k 在顾客 i 时可以选择的客户集合; η_{ij} 为路径 (i, j) 上的启发式函数,如式(10)定义; τ_{ij} 为路径 (i, j) 上的信息量.

$$\eta_{ij} = (\text{demand}(i) + \text{demand}(j))/d_{ij}. \quad (10)$$

式(10)表明,优先考虑需求量大的客户,同时也注意到路径长短的影响. α 为信息启发式因子,表示轨迹的相对重要性, β 为期望启发式因子,表示能见度的相对重要性. 当所有蚂蚁完成一次对顾客的环游后,首先对所有信息素进行挥发处理,然后选择最优蚂蚁添加信息. 更新规则如下:

$$\tau_{ij} = (1 - \rho)\tau_{ij}, \quad (11)$$

$$\tau_{ij} = \tau_{ij} + \Delta\tau_{ij}^{\text{best}}, \quad (12)$$

$$\Delta\tau_{ij}^{\text{best}} = 1/C^{\text{best}}. \quad (13)$$

式(11)中 ρ 为挥发系数, $1 - \rho$ 为信息素残留因子. 为了防止信息的无限积累, $\rho \in [0, 1]$; C^{best} 是最好蚂蚁的目标值, 这个最优解可以选择当前最优解—iteration-best ant, 即在当前iteration中的最优解; 还可以选全局最优解—best-so-far ant, 即到目前为止算法找到的最优解. 一般情况下, MMAS交替使用这两个规则.

本文中设置: $\tau_{\max} = 1/\rho C^{\text{bs}}$, $\tau_{\min} = \tau_{\max}(1 - \sqrt[n]{0.05})(n - 1)/2$, n 为客户数量, C^{bs} 是截止到目前的最优解, 初始时 $C^{\text{bs}} = C^{\text{mn}}$, C^{mn} 是采用最近邻法得到的目标值.

如客户为12个, 采用图1表示一条可能出现的路径, 方框中左的数字表示客户的标号, 小括号中的数字表示此客户的需求.

C:

9(3)	12(6)	6(1)	2(8)	1(4)	5(5)	3(8)	7(3)	10(4)	8(4)	11(5)	4(2)
------	-------	------	------	------	------	------	------	-------	------	-------	------

图1 一条蚂蚁路径

Fig. 1 An ant's tour

采用一种简单划分^[14]算法, 即依次经过路径的每个顾客, 直到需求量之和大于车辆的容量. 设车辆容量为10, 则简单划分后的车辆路径如图2所示. 得到的路径为: $0 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 6 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 2 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 4 \rightarrow 0$. 这种方法容易实现, 但对路径的排序依赖程度很高, 不容易得到最佳划分. 如果这个划分得到的路径是最优的, 要添加信息的边是(9,12), (12,6), (1,5), (7,10), (8,11).

简单划分:

9	12	6	2	1	5	3	7	10	8	11	4
---	----	---	---	---	---	---	---	----	---	----	---

图2 经过简单划分后的路径

Fig. 2 The vehicle routes after simple partition

4 基于划分的最大最小蚁群算法解带权重车辆路径问题(Partition based MAX-MIN ant system for weighted VRP)

MMAS-WVRP采用简单划分的方法, 虽然得到了可行解, 但由于它得到的不是给定排序的最佳划分, 使划分的效率变慢, 迭代次数增加. 本文采用Christian提出的划分方法^[4,10], 得到在给定排序下的最优划分. 该算法的基本思想是: 按照蚂蚁路经访问顾客的顺序, 在满足车辆容量限制下依次计算每个顾客的最小费用化分; 然后根据当前节点的最小

划分, 尝试对其所有后继节点的最小划分进行改进; 直到得出排序的最后一个节点的最小划分为止.

采用Christian的划分思想, 对上例划分后的车辆路径如图3所示. 得到的路径是: $0 \rightarrow 9 \rightarrow 12 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 3 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 7 \rightarrow 10 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 8 \rightarrow 11 \rightarrow 0$, $0 \rightarrow 4 \rightarrow 0$. 如果这个划分得到的路径是最优的, 要添加信息的边是(9,12), (6,2), (1,5), (7,10), (8,11). 可以看到, 好的划分策略不仅得到比较好的解, 而且通过对信息素的影响不同使迭代也更好、更快.

Christian划分:

9	12	6	2	1	5	3	7	10	8	11	4
---	----	---	---	---	---	---	---	----	---	----	---

图3 经过Christian划分后的路径

Fig. 3 The vehicle routes after Christian partition

5 计算仿真分析(Computational results)

测试环境: 用MATLAB7.0对算法实现, 在MS windowsXP, Pentium 4 2.66 GHz, 512 M内存的环境下测试.

在 $a = 1.5$, $b = 0.2$, $d = 100$, 挥发因子 $\rho = 0.02$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, 蚂蚁个数为10, 迭代步数为50, 对Augerat等提出的问題P-n55-k15采用PMMAS运算10次, 得到的结果如表1所示.

表1 P-n55-k15 10次运行结果

Table 1 The 10 results of P-n55-k15

计算次序	1	2	3	4	5
目标值	8968.1	8972.3	9086.6	9185.6	8948.3
车辆	18	19	20	20	19
运行时间/s	7.437	7.451	7.461	7.442	7.432
计算次序	6	7	8	9	10
目标值	9184.8	9149	9084.2	9203	9185.6
车辆	19	18	20	20	19
运行时间/s	7.421	7.500	7.501	7.441	7.425

已知此问題CVRP最好路径在上述参数下(a, b, d), 其WVRP目标值为10073. 而从表1中可以看到, 蚁群算法均得到质量很高的解, 平均租车数为19, 平均费用为9096.8, 并且各次找到的配送费用与它相差不大, 这在一定程度上说明了算法的稳定性.

为进一步验证PMMAS的有效性, 从<http://www.branchandcut.org/VRP/data>中选取规模大的实验数据, 分别采用CW节约算法、MMAS、PMMAS算法进

行了仿真并与文献中已给的CVRP最好路径比较, 结果如表2所示.

表2 WVRP各算法比较
Table 2 The algorithms comparison of WVRP

问题	CW	CVRP路径	MMAS	PMMAS
A-n69-k9	14679.7	13718	14249	12304
A-n80-k10	22270.5	20427	22259	19991
B-n78-k10	16350	14722	15212	13801
E-n101-k14	15628.8	—	16335	13861
M-n101-k10	19184.4	17306	19351	16226
M-n121-k7	24142.8	23660	23662	20573
M-151-k12	23354.6	—	26563	18923
M-n200-k17	31127.2	—	32846	25264
P-n70-k10	13807.2	13345	13448	11394

可见, 就WVRP解的质量而言, PMMAS较CW节约算法、简单划分算法的MMAS和文献中CVRP的最好路径都有明显提高. 尤其是当数据集变大时, PMMAS之效率较MMAS明显有优势; 这说明MMAS只有和划分算法结合起来才更有效.

6 结论(Conclusions)

本文建立并分析了带有货物权重的车辆路径问题(WVRP). 并根据WVRP的性质建立了基于混合整数规划的数学模型, 在考虑路径的同时, 优先满足需求大的顾客. 最后提出了一种基于划分的蚁群算法(PMMAS), 与其他启发式算法的比较说明, 得到了比较好的结果.

参考文献(References):

- [1] CANEN A G, SCOTT L G. Bridging theory and practice in VRP[J]. *Journal of the Operational Society*, 1995, 46(1): 1 – 8.
- [2] CHRISTOFIDES N, MINGOZZI A, TOTH P. *The Vehicle Routing Problem*[M]. New York: Wiley, 1979: 315 – 385.
- [3] ANILY S, BRAME J. *Vehicle Routine and the Supply Chain. in Quantitative Models for Supply Chain Management*[M]. London: Kluwer Academic Publisher, 1999: 148 – 196.
- [4] 潘震东, 唐加福. 带货物权重的车辆路径问题及遗传算法[J]. *管理科学学报*, 2007, 10(3): 23 – 29.
- [5] (PAN Zhendong, TANG Jiafu. A model for vehicle routing problem with cargo coefficient[J]. *Journal of Management Science in China*. 2007, 10(3): 23 – 29.)
- [6] LAPORTE G, GENDREAU M, POTVIN J Y, et al. Classical and modern heuristics for the vehicle routing problem[J]. *International Transactions in Operational Research*, 2000, 7(4/5): 285 – 300.
- [7] CLARKE G, WRIGHT J W. Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points[J]. *Operations Research*, 1964, 12(4): 568 – 81.
- [8] POTVIN J Y. Genetic algorithms for the traveling salesman problem[J]. *Annals of Operations Research*, 1996, 63: 339 – 70.
- [9] 刘士新, 周山长, 宋健海, 等. 基于PCTSP的热轧单元计划模型与算法[J]. *控制理论与应用*, 2006, 23(1): 80 – 83.
- [10] (LIU Shixin, ZHOU Shanchang, SONG Jianhai, et al. Prize collecting traveling sale man problem based model and algorithm for hot rolling unit planning[J]. *Control Theory & Application*, 2006, 23(1): 80 – 83.)
- [11] GILLET B E, MILLER L R. A heuristic algorithm for the vehicle dispatch problem[J]. *Operations Research*, 1974, 22(2): 340 – 349.
- [12] PRINS C. A simple and effective evolutionary algorithm for the vehicle routing problem[J]. *Computers & Operations Research*, 2004, 31(12): 1985 – 2002.
- [13] COLORNI A, DORIGO M, MANIEZZO V. Distributed optimization by ant colonies[C]//*Proceedings of European Conference Artificial Life*. Amsterdam: Elsevier, 1991, 5(2): 134 – 142.
- [14] THOMAS STÜTZLE, DORIGO M. *Ant Colony Optimization*[M]. Cambridge: MIT Press, 2004: 16 – 119.
- [15] STÜTZLE T, HOOS H H. MAX-MIN ant system[J]. *Future Generation Computer System*, 2000, 16(8): 889 – 914.
- [16] BEASLEY J E. Route-first cluster-second methods for vehicle routing[J]. *Omega*, 1983, 11(4): 403 – 408.

作者简介:

唐加福 (1965—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事生产与物流运作管理、质量系统工程等方面的研究, E-mail: jftang@mail.neu.edu.cn;

孔媛 (1984—), 女, 东北大学系统工程研究所博士研究生, 主要从事车辆路径与调度、物流优化的研究, E-mail: yokery@126.com;

潘震东 (1980—), 男, 硕士, 助教, 主要从事生产与物流运作管理方面的研究;

董颖 (1978—), 女, 博士, 讲师, 主要从事供应链与物流管理、决策分析与优化的理论方法研究.