第 25 卷第 5 期 控制理论与应用 Vol. 25 No. 5
2008 年 10 月 Control Theory & Applications Oct. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)05−0901−04

一类资源约束的单机成组调度问题

闫 杨, 王大志, 汪定伟, 王洪峰

(东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 本文讨论具有连续资源的单机成组调度问题. 在这一模型中, 工件组的安装时间是所消耗资源的非负严格减少连续函数, 工件的加工时间是开工时间的严格增加函数. 考虑两个问题, 第1个问题是在满足资源消耗总量限制条件下, 极小化最大完工时间. 第2个问题的目标函数是在满足最大完工时间限制条件下, 极小化资源消耗总量. 分别对两个问题讨论了最优调度的某些特征, 分别给出了求解最优资源分配的方法, 并通过数值例子进行说明.

关键词: 单机调度; 成组技术; 资源约束; 安装时间; 算法

中图分类号: O223 **文献标识码**: A

A single-machine scheduling problem with resource constraints

YAN Yang, WANG Da-zhi, WANG Ding-wei, WANG Hong-feng

(School of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: The single-machine group-scheduling problem with constrained resources is discussed. In this model, the setup time of a group is a strictly decreasing function of the amount of resources consumed, and the processing time of a job is a strictly increasing linear function of its starting time. Two optimal problems are discussed. The first objective is to minimize the makespan under the total resource consumption constrains, whereas the second one is to minimize the total resource consumption under the makespan constrains. The characteristics of optimal scheduling are investigated respectively for the two problems, and the corresponding method for optimal allocation of resources are presented. Numerical examples are given to illustrate the approach.

Key words: single-machine scheduling; group technology; resource constrained; setup time; algorithm

1 引言(Introduction)

在经典的调度问题中, 通常假设工件的加工时间是常数, 且不考虑资源消耗以及成组技术限制. 但在某实际的调度问题中, 这些假设可能并不满足.

对于工件加工时间是其开工时间的函数的一类问题, 在钢铁工业、塑料工业、军事以及医疗等方面具有广泛的应用, 并且已经取得了较多的研究结果[1~3], 有关这方面的综述参见文献[4, 5]. 在成组调度问题中, 工件可以分成类似工件的工件组. 同组工件连续加工时不需要安装时间, 不同组工件连续加工时, 需要一定的安装时间[6]. 但在实际问题中, 安装时间往往需要某些资源(如化工产品的催化剂等)的影响, 工件组的安装时间会相应的减少.

对工件的准备时间为资源消耗量函数的情况, 文献[7,8]中进行了讨论. 文献[9,10]将加工时间为开工时间线性函数的问题与资源约束调度问题相结合, 给出了求解最优资源分配的方法. 对安装时间同资源有关的一类单机成组调度问题, 文献[11~13]进行了讨论.

本文将讨论更一般的情况, 即工件组的安装时间为所消耗资源的非负严格减少连续函数, 工件加工过程发生恶化效应, 即工件的加工时间是开工时间的严格增加线性函数的单机成组调度问题.

首先给出问题的一般描述.

设有n个工件$J_1, J_2, \cdots, J_n$在一台机器上加工, 若工件J_j的开工时间为t, 则其加工时间为$p_j(a+bt)$, 其中a, b为非负常数. 不失一般性, 设所有工件的到达时间$t_0 = 0$. n个工件分别属于m组$G_1, G_2, \cdots, G_m$, 第i组G_i包含$n_i(\sum\limits_{i=1}^{m} n_i = n)$个工件: $J_{i1}, J_{i2}, \cdots, J_{in_i}$ (工件J_{ij}的基本加工时间为p_{ij}). 同组工件必须接连放在一起加工, 加工第i组工件时需要安装

收稿日期: 2007−01−08; 收修改稿日期: 2007−08−31.
基金项目: 国家自然科学基金重点资助项目(70431003); 国家自然科学基金创新群体资助项目(60521003); 国家科技支撑计划资助项目(2006BAH02A09).

时间为$s_i = f(u_i), 0 \leqslant u_i \leqslant \overline{u}$, 其中$u_i$是分配给工件组$G_i$的不可再生资源量, $\overline{u}$是资源分配量的上限, f是非负严格减少连续函数, 即$f(0) > f(\overline{u}) \geqslant 0$, 且反函数$f^{-1}$可以求出.

讨论两个问题, 第1个问题是在满足资源消耗总量限制条件下, 极小化最大完工时间. 第2个问题是在满足最大完工时间限制条件下, 极小化资源消耗总量. 用三参数表示法分别记为:

$$1 \mid s_i = f(u_i), G, p_{ij}(a+bt), \sum u_i \leqslant U \mid C_{\max}, \quad (1)$$

$$1 \mid s_i = f(u_i), G, p_{ij}(a+bt), C_{\max} \leqslant C \mid \sum u_i. \quad (2)$$

2 极小化最大完工时间的问题(Minimize the makespan)

引理 1 对于问题$1 \mid G, p_{ij}(a+bt) \mid C_{\max}$, 若第1组的开工时间为$t_0 = 0$, 则最大完工时间为

$$C_{\max} = \sum_{k=1}^{m}(s_k \prod_{i=k}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij})) + \frac{a}{b}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) - \frac{a}{b}. \quad (3)$$

性质 1 最大完工时间不受各组内工件加工次序的影响.

性质 2 对于工件组的任一调度, 应优先把资源分配给排位在前的组, 可以极小化$C_{\max}$.

证 不失一般性, 设$\pi = [G_1, G_2, \cdots, G_m]$ 为工件组间的任意一个调度, 由最大完工时间的表达式(3)可以得出, 应优先将资源分配给$\prod_{i=l}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij})$大的安装时间$s_l$分配资源, 以相同资源量, 可以极小化最大完工时间.而由于$b > 0, p_{ij} > 0$, 则对任何i都有$\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) > 1$, 因而有

$$\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) > \prod_{i=2}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) > \cdots > \prod_{i=m}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}).$$

因此, 应优先对排位在前的组分配资源, 可以极小化$C_{\max}$.

证毕.

性质 3 按性质2, 可为各个位置上的工件组分配资源, 当各工件组的资源分配量一定时, 应按$\rho(G_i) = \prod_{j=1}^{m_i}(1+bp_{ij}), (i = 1, 2, \cdots, m)$不增顺序为工件组调度, 所得的调度为最优调度.

证 不失一般性, 将对排在第i 个位置的组分配的资源量记为$u^*_{[i]}(i = 1, 2, \cdots, m)$, 假设最优调度为$\pi = [G_1, G_2, \cdots, G_m]$, 在$\pi$中, G_l 与G_{l+1} 为两相邻工件组(G_l排在G_{l+1} 前), 且有$\prod_{j=1}^{n_l}(1+bp_{ij}) < \prod_{j=1}^{n_{l+1}}(1+bp_{ij})$, 此时若交换$G_l$ 与G_{l+1}的顺序, 可得到一个新调度π'. 调度π和调度π'所对应的目标函数值分别为:

$$\begin{aligned}
&C_{\max} = C_m = \\
&f(u^*_{[1]})\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij})) + \cdots + \\
&f(u^*_{[m]})\prod_{j=1}^{n_m}(1+bp_{mj})) + \frac{a}{b}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) - \frac{a}{b} = \\
&\sum_{k=1}^{m} f(u^*_{[k]})\prod_{i=k}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) + K.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&C'_{\max} = C'_m = \\
&\sum_{k=1}^{l} f(u^*_{[k]})\prod_{i=k}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) + \\
&f(u^*_{[l+1]})\prod_{j=1}^{n_l}(1+bp_{lj})\prod_{i=l+2}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) + \\
&\sum_{k=l+2}^{m} f(u^*_{[k]})\prod_{i=k}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) + K.
\end{aligned}$$

其中: $K = \frac{a}{b}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) - \frac{a}{b}$, 可得

$$\begin{aligned}
&C_{\max} - C'_{\max} = \\
&\prod_{i=l+2}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij})f(u^*_{[l+1]}) \times \\
&\left[\prod_{j=1}^{n_{l+1}}(1+bp_{l+1,j}) - \prod_{j=1}^{n_l}(1+bp_{lj})\right] > 0.
\end{aligned}$$

因此, 调度π'优于调度π, 这与π 为最优调度矛盾. 满足$\rho(G_i)$不增顺序的调度为最优调度.

证毕.

性质 4 在资源总量受限前提下, 在$\sum_{i=1}^{m} u_i = U$时极小化最大完工时间, 可使最大完工时间最小.

根据上述分析, 可得问题$1 \mid s_i = f(u_i), G, p_{ij}(a + bt), \sum u_i \leqslant U \mid C_{\max}$的最优算法.

算法 1 复杂性为$O(n \log n)$.

Step 1 将各组按$\rho(G_i) = \prod_{j=1}^{m_i}(1+bp_{ij}), (i = 1, 2, \cdots, m)$不增顺序排序, 得$\pi = [G_{[1]}, G_{[2]}, \cdots, G_{[m]}]$, 置$u^*_{[i]} = 0, (i = 1, 2, \cdots, m), k = 1$;

Step 2 置$u^*_{[k]} = \min\{\overline{u}, U\}, U = U - u^*_{[k]}, k = k + 1$;

Step 3 若$U = 0$或$k = m + 1$, 算法停止, 否则转Step2.

3 极小化资源消耗总量的问题(Minimize the total resource consumption)

通过上述对问题(1)性质1∼4的分析可知, 对于问题$1 \mid s_i = f(u_i), G, p_{ij}(a+bt), C_{\max} \leqslant C \mid \sum u_i$, 资源消耗总量不受各工件组内工件加工次序的影响; 为了极小化资源消耗总量, 将各工件组按$\rho(G_i) = \prod\limits_{j=1}^{m_i}(1+bp_{ij}), (i=1,2,\cdots,m)$ 不增的顺序所得的调度为最优调度. 而且应在$C_{\max} = C$时极小化资源消耗总量, 并且应对排位在前的组优先分配资源. 由$C_{\max}$ 的表达式可知, 若只对工件组$G_{[1]}$ 的安装时间分配资源, 而其余组的资源分配量均为0时, 此时有

$$s_{[1]}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{[i]j}) + s\sum_{k=2}^{m}\prod_{i=k}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{[i]j}) = C-K,$$

则组$G_{[1]}$的安装时间应为

$$s_{[1]} = \frac{C-K-s\sum\limits_{k=2}^{m}\prod\limits_{i=k}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n_i}(1+bp_{[i]j})}{\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n_{[i]}}(1+bp_{ij})},$$

其中:

$$s = f(0), K = \frac{a}{b}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) - \frac{a}{b}.$$

但由于对组$G_{[1]}$ 所分得的资源量受到限制, 即$0 \leqslant u^*_{[1]} \leqslant \overline{u}$, 因而: 若$s_{[1]} \geqslant f(0)$, 则无需对组$G_{[1]}$及之后各组分配资源, 就可以满足$C_{\max} \leqslant C$, 算法停止; 若$f(\overline{u}) \leqslant s_{[1]} < f(0)$, 则对组$G_{[1]}$ 分配的资源$u^*_{[1]} \in (0,\overline{u}]$, 此时求得$u^*_{[1]} = f^{-1}(s_{[1]})$, 无需对之后各组分配资源, 算法停止; 若$s_{[1]} < f(\overline{u})$, 则对组$G_{[1]}$的资源分配量为$\overline{u}$, 即$u^*_{[1]} = \overline{u}$, 并且对之后的组仍需要分配资源. 此时已对$G_{[1]}$ 分配资源量达到上限, 按照同样的方法依次计算出$u^*_{[2]}, \cdots, u^*_{[m]}$.

因此可以得到问题$1 \mid s_i = f(u_i), G, p_{ij}(a+bt), C_{\max} \leqslant C \mid \sum u_i$的最优算法.

算法 2 复杂性为$\max\{O(n\log n), O(ng(n))\}$, 其中$g(n)$为$f^{-1}$的复杂性.

Step 1 将各组按$\rho(G_i) = \prod\limits_{j=1}^{m_i}(1+bp_{ij}), (i=1,2,\cdots,m)$不增顺序排序, 得$\pi = [G_{[1]}, G_{[2]}, \cdots, G_{[m]}]$;

Step 2 置

$$u^*_{[i]} = 0, i = 1,2,\cdots,m,$$
$$U = 0, s = f(0), s' = f(\overline{u}), l = 1,$$

计算

$$K = \frac{a}{b}\prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}) - \frac{a}{b},$$

置$C' = C - K$;

Step 3 计算

$$s_{[l]} = \frac{C' - s\sum\limits_{k=l+1}^{m}\prod\limits_{i=k}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n_i}(1+bp_{[i]j})}{\prod\limits_{i=1}^{m}\prod\limits_{j=1}^{n_{[i]}}(1+bp_{ij})}.$$

若$s_{[l]} \geqslant s$, 算法终止;

若$f(\overline{u}) \leqslant s_{[l]} < s$, 置$u^*_{[l]} = f^{-1}(s_{[l]}), U = U + u^*_{[l]}$, 算法终止, 最优资源分配为

$$u^* = [u^*_{[1]}, u^*_{[2]}, \cdots, u^*_{[m]}];$$

若$s_{[l]} < f(\overline{u})$, 转Step4;

Step 4 置

$$u^*_{[l]} = \overline{u}, U = U + u^*_{[l]},$$
$$C' = C' - s' \times \prod_{i=l}^{m}\prod_{j=1}^{n_i}(1+bp_{ij}),$$
$$l = l + 1.$$

若$l > m$, 算法终止, 问题无解. 否则转Step3.

4 数值例子(Numerical example)

例 求解问题

$$1 \mid s_i = f(u_i), G, p_{ij}(a+bt), \sum u_i \leqslant U \mid C_{\max},$$

其中:

$$n = 10, m = 4,$$
$$G_1 = \{J_1, J_2\}, G_2 = \{J_3, J_4\},$$
$$G_3 = \{J_5, J_6, J_7\}, G_4 = \{J_8, J_9, J_{10}\},$$
$$p_1 = 0.3, p_2 = 0.4,$$
$$p_3 = 0.3,\ p_4 = 0.3,$$
$$p_5 = 0.2, p_6 = 0.2, p_7 = 0.1,$$
$$p_8 = 0.1, p_9 = 0.2, p_{10} = 0.1.$$

设

$$a = b = 1, s_i = f(u_i), s_i = r_0 - r_1 u_i^{1.5},$$
$$r_0 = 30, r_1 = 2.5, \overline{u} = 4, U = 10.$$

解 首先计算出

$$\rho_1 = 1.82, \rho_2 = 1.69, \rho_3 = 1.584, \rho_4 = 1.45,$$

工件组间的调度为

$$\pi = [G_1, G_2, G_3, G_4].$$
$$i = 1, u^*_1 = \min\{4, 10\} = 4,\ U = 10 - 4 = 6;$$
$$i = 2, u^*_2 = \min\{4, 6\} = 4,\ U = 6 - 4 = 2;$$
$$i = 3, u^*_3 = \min\{4, 2\} = 2,\ U = 2 - 2 = 0;$$
$$u^*_4 = 0.$$

最优资源分配为$u^* = [u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*] = [4, 4, 2, 0]$.

因而$C_{\max} = 221.6$.

5 结论(Conclusion)

本论引入了一类安装时间受资源约束, 工件加工时间随开工时间线性增加的单机成组调度模型. 给出了问题性质和极小化目标函数的最优算法. 但对资源约束问题的其它模型, 还有待进一步研究.

参考文献(References):

[1] MOSHEIOV G. V-shaped policies for scheduling deteriorating jobs[J]. *Operations Research*, 1991, 39(6): 979 – 991.

[2] MOSHEIOV G. Scheduling jobs under simple linear deterioration[J]. *Computer and Operational Research*, 1994, 21(6): 653 – 659.

[3] WANG J B, WANG M Z, XIA Z Q. Single-machine scheduling to minimize makespan under linear deterioration[J]. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 2004, 13(4): 529 – 539.

[4] ALIDONEE B, WORMER N. Scheduling with time dependent processing times: review and extentions[J]. *Journal of Operational Research Society*, 1999, 50(5): 711 – 720.

[5] CHENG T C E, DING Q, LIN B M T. A concise survey of scheduling with time-dependent processing times[J]. *European Journal of Operational Research*, 2004, 152(1): 1 – 13.

[6] POTTS C N, KOVALYOV M Y. Scheduling with batching: A review[J]. *European Journal of Operational Research*, 2000, 120(2): 228 – 249.

[7] CHENG T C E, JANIAK A. Resource optimal control in some single-machine scheduling problems[J]. *IEEE Transactions Automatic Control*, 1994, 39(6): 1243 – 1246.

[8] JANIAK A. Time-optimal control in a single machine problem resource constrains[J]. *Automatica*, 1986, 22(6): 745 – 747.

[9] ZHAO C L, TANG H Y. Single machine scheduling with linear processing times[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2003(5): 703 – 708.

[10] 赵传立, 唐恒永. 一类资源约束的单机排序问题[J]. 系统工程学报, 2004, 19(5): 451 – 456.
(ZHAO Chuanli, TANG Hengyong. Single machine scheduling with resource constrains[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2004, 19(5): 451 – 456.)

[11] JANIAK A, KOVALYOV M Y, PORTMANN M C. Single machine group scheduling with resource dependent setup and processing times[J]. *European Journal of Operational Research*, 2005, 162(1): 112 – 121.

[12] 闫杨, 赵传立. 安装时间受资源约束的单机成组调度问题[J]. 电机与控制学报, 2007, 11(1): 70 – 73.
(YAN Yang, ZHAO Chuanli. Single machine group scheduling with learning effect and resource dependent detup times[J]. *Electric Machines and Control*, 2007, 11(1): 70 – 73.)

[13] 闫杨, 赵传立. 一类安装时间受资源约束的单机成组排序问题[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(6): 938 – 941.
(YAN Yang, ZHAO Chuanli. Single Machine Group Scheduling with resource dependent setup times[J]. *Systems Engineering and Electronics*, 2007, 29(6): 938 – 941.)

作者简介:

闫 杨 (1982—), 女, 博士研究生, 目前研究方向为生产调度与优化、动态进化计算与动态调度, E-mail:yanyangmail@163.com;

王大志 (1978—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为智能优化方法及其应用, E-mail:wongdz@gmail.com;

汪定伟 (1948—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为生产计划与调度理论、智能优化方法等, E-mail:dwwang@mail.neu.edu.cn;

王洪峰 (1979—), 男, 讲师, 博士, 目前研究方向为智能优化方法及其动态进化算法, E-mail: hfwang@mail.neu.edu.cn.