

具有数据包丢失的网络控制系统保性能控制

宋洪波, 俞立, 张文安

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

摘要: 本文研究了一类具有数据包丢失的网络控制系统(NCSs)的建模和保性能控制问题. 通过用两个马尔可夫链分别来描述前向通道和反馈通道的丢包过程, 将闭环网络控制系统建模成具有两个模式的马尔可夫随机切换系统. 基于线性矩阵不等式技术和李亚普诺夫方法得到了闭环系统随机稳定的充分条件, 并给出了状态反馈保性能控制器的设计方法. 最后通过数值算例验证本文结果的有效性.

关键词: 网络控制系统; 数据包丢失; 马尔可夫切换系统; 随机稳定; 保性能控制

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Guaranteed cost control of networked control systems with packet dropouts

SONG Hong-bo, YU Li, ZHANG Wen-an

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China)

Abstract: The modeling and guaranteed cost control for a class of networked control systems (NCSs) with packet dropouts are addressed. The packet dropout processes in the forward channel and feedback channel are modeled as two Markov chains and the overall closed-loop NCS is modeled as a Markovian switched system with two modes. Based on the linear matrix inequality (LMI) technique and the Lyapunov method, a sufficient condition is derived for the stochastic stability of the closed-loop NCS, and a design procedure is presented for the guaranteed cost state feedback controller. Finally, an illustrative example is given to show the effectiveness of the proposed results.

Key words: networked control systems; packet dropouts; Markovian switched system; stochastic stability; guaranteed cost control

1 引言(Introduction)

近年来网络控制系统(NCSs)的研究受到了国内外学者的广泛关注^[1]. 数据包丢失是引起 NCSs 性能下降、失稳的重要原因, 因此它是 NCSs 中的主要问题之一. 丢包主要可以分为两种: 一种是被动丢包, 它是由于网络链路故障以及传输错误等因素造成的; 另一种是主动丢包, 如传输节点在高负载时为了使 NCSs 能够正常运行或者为了保证控制系统仍然具有期望的性能而主动地丢弃一些数据包等. 目前已出现了许多方法来处理 NCS 中的数据包丢失问题. 文[2]把这类 NCS 建模成线性马尔可夫跳跃系统, 并给出了 H_∞ 控制器设计方法. 文[3]用迭代方法把具有任意数据包丢失特性但连续丢包数有界的 NCS 建模成一个具有任意切换律的切换系统, 进而给出了系统稳定化控制器的设计方法. 但上述结果都假设网络仅存在于反馈通道中. 进一步, 文[5]研究了前向通道和反馈通道中均存在数据包丢失的 NCS 控制问题, 这类 NCS 的丢包过程被定

义为连续两次成功完成从传感器到执行器传输的时间间隔长度的序列, 并给出了系统稳定化控制器的设计方法.

本文研究了在前向通道和反馈通道中均存在数据包丢失的一类网络控制系统的保性能控制问题. 将前向通道和反馈通道的丢包过程分别用两个马尔可夫链描述, 在考虑状态反馈控制律的情况下, 将整个闭环系统建模成一个具有两个模式的马尔可夫随机切换系统. 基于 Lyapunov 方法给出了闭环 NCS 随机稳定的充分条件和保性能控制器设计方法.

2 NCS的建模(Modeling of NCS)

本文考虑的 NCS 结构如图 1 所示, 被控对象由以下离散时间线性时不变状态空间模型描述:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k), \quad (1)$$

其中: $x(k) \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量, $u(k) \in \mathbb{R}^p$ 是控制输入, A 和 B 是具有适当维数的常数矩阵.

首先, 对所考虑的系统作以下假设:

a) 网络诱导时延远远小于系统采样周期, 可以忽略不计;

b) 传感器、控制器和执行器均采用时间驱动的方式, 且具有相同的采样周期.

考虑具有如下形式的状态反馈控制器

$$v(k) = Kw(k), \quad (2)$$

其中: $w(k)$ 为控制器的输入, $v(k)$ 为控制器的输出, K 为待设计的反馈增益矩阵.

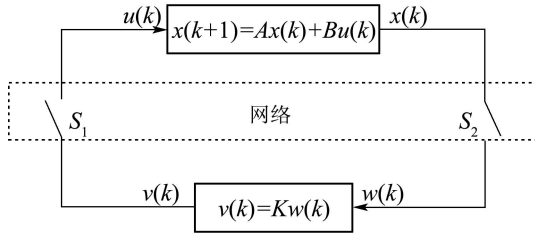


图1 具有数据包丢失的NCS结构图

Fig.1 Structure of NCS with packet dropouts

图1中的开关 S_1 和 S_2 的断开和闭合分别表示前向通道和反馈通道发生丢包和没有发生丢包. 用两个马尔可夫链 $\rho(k) \in \{0, 1\}$ 和 $\sigma(k) \in \{0, 1\}$ 来分别表示前向通道和反馈通道的丢包过程. $\rho(k)$ 和 $\sigma(k)$ 取0和1分别表示前向通道和反馈通道没有发生丢包和发生丢包. $M = [\rho_{ij}]$ 和 $N = [\sigma_{rs}]$ 分别是 $\rho(k)$ 和 $\sigma(k)$ 的概率转移矩阵, 其中:

$$\begin{cases} \rho_{ij} = P\{\rho(k+1) = j | \rho(k) = i\}, \rho_{ij} \geq 0, \\ \sigma_{rs} = P\{\sigma(k+1) = s | \sigma(k) = r\}, \sigma_{rs} \geq 0, \\ \sum_{j=0}^1 \rho_{ij} = 1, \sum_{s=0}^1 \sigma_{rs} = 1, i, r \in \{0, 1\}, \end{cases} \quad (3)$$

另外, 若发生丢包, 则假设相应节点使用上一时刻的输入.

记 $z(k) = [x^T(k) \ u^T(k) \ w^T(k-1)]^T$, 由上述分析, 闭环系统根据 $\rho(k)$ 和 $\sigma(k)$ 的取值将具有以下4个子系统.

$$S_{00}: z(k+1) = \begin{bmatrix} A+BK & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} z(k),$$

$$S_{01}: z(k+1) = \begin{bmatrix} A & 0 & BK \\ 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} z(k),$$

$$S_{10}: z(k+1) = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix} z(k),$$

$$S_{11}: z(k+1) = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix} z(k),$$

显然以上4个子系统的随机切换过程由两个马尔可夫链 $\rho(k)$ 和 $\sigma(k)$ 决定. 综合以上分析, 整个闭环系统可以描述为以下具有两个模式的马尔可夫随机切换系统:

$$z(k+1) = A_{\rho(k)\sigma(k)} z(k), \quad (4)$$

$\varphi(0) = \{z(0), \rho(0), \sigma(0)\}$ 为闭环系统的初始条件.

考虑以下二次型性能指标

$$J = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} [x^T(k)R_1x(k) + u^T(k)R_2u(k)] | \varphi(0)\right], \quad (5)$$

其中: R_1 和 R_2 为给定的正定加权矩阵, $E[\cdot]$ 表示数学期望. 针对系统(1)和性能指标(5), 保性能控制律定义如下:

定义1 考虑系统(1)和性能指标(5), 如果存在 $v(k) = Kw(k)$ 和一个正数 J^* , 使闭环系统(4)随机稳定, 且闭环性能指标满足 $J \leq J^*$, 则称 $v(k) = Kw(k)$ 为系统(1)的一个保性能控制律, 且闭环系统(4)具有保性能界 J^* .

定义2 对任意的初始条件 $\varphi(0)$, 若存在矩阵 $W > 0$, 使得

$$E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \|z(k)\|^2 | \varphi(0)\right] \leq z^T(0)Wz(0) \quad (6)$$

成立, 则系统(4)称为随机稳定的.

性能指标(5)可以写成

$$J = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} [z^T(k)R_{\rho(k)\sigma(k)}z(k)] | \varphi(0)\right],$$

其中:

$$R_{00} = \text{diag}\{R_1 + K^T R_2 K, 0, 0\},$$

$$R_{01} = \text{diag}\{R_1, 0, K^T R_2 K\},$$

$$R_{10} = R_{11} = \text{diag}\{R_1, R_2, 0\}.$$

本文的目的是导出保性能控制律存在的条件和设计方法.

3 主要结果 (Main results)

以下首先给出使得闭环系统(4)随机稳定且具有二次性能上界的充分条件:

定理1 对闭环系统(4), 若存在 $P_{ij} > 0$, 使得对所有的 $i, j \in \{0, 1\}$ 以下不等式成立

$$L(i, j) = \sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=0}^1 \rho_{i\alpha} \sigma_{j\beta} A_{ij}^T P_{\alpha\beta} A_{ij} + R_{ij} - P_{ij} < 0, \quad (7)$$

则闭环系统(4)是随机稳定的, 且性能指标 J 具有上界 $J^* = z^T(0)P_{\rho(0)\sigma(0)}z(0)$.

证 选取如下的 Lyapunov 函数

$$V(k) = z^T(k)P_{\rho(k)\sigma(k)}z(k),$$

记 $\rho(k) = i, \sigma(k) = j$, 则

$$\begin{aligned} E[\Delta V(k)] &= E[V(k+1)|\varphi(k)] - V(k) = \\ &E[z^T(k+1)P_{\rho(k+1)\sigma(k+1)}z(k+1)|\varphi(k)] + \\ &E[z^T(k)R_{\rho(k)\sigma(k)}z(k)|\varphi(k)] - V(k) - \\ &E[z^T(k)R_{\rho(k)\sigma(k)}z(k)|\varphi(k)] = \\ &z^T(k)[\sum_{\alpha=0}^1 \sum_{\beta=0}^1 \rho_{i\alpha}\sigma_{j\beta}A_{ij}^T P_{\alpha\beta} A_{ij} + R_{ij} - P_{ij}] \cdot \\ &z(k) - E[z^T(k)R_{\rho(k)\sigma(k)}z(k)|\varphi(k)] = \\ &z^T(k)L(i,j)z(k) - E[z^T(k)R_{\rho(k)\sigma(k)}z(k)|\varphi(k)]. \end{aligned} \quad (8)$$

结合式(7), 由式(8)可得

$$E[\Delta V(k)] \leq -\lambda_{\min}(-L(i,j))z^T(k)z(k) \leq -\gamma\|z(k)\|^2,$$

其中 $\gamma = \min\{-\lambda_{\min}(-L(i,j)) | i, j \in \{0, 1\}\}$. 由上面的不等式易知: 对任意的 $T \geq 1$, 有

$$E[V(z(T+1))] - E[V(z(0))] \leq -\gamma E[\sum_{k=0}^T \|z(k)\|^2],$$

移项后可得

$$\begin{aligned} E[\sum_{k=0}^T \|z(k)\|^2] &\leq \\ &\frac{1}{\gamma}(E[V(z(0))] - E[V(z(T+1))]) \leq \\ &\frac{1}{\gamma}E[V(z(0))] = \frac{1}{\gamma}z^T(0)P_{\rho(0)\sigma(0)}z(0), \end{aligned}$$

令 $T \rightarrow \infty$, 由上式和定义 2 可知闭环系统 (4) 是随机稳定的.

另一方面, 由式(8)和 $L(i,j) < 0$ 可得

$$\begin{aligned} E[V(k+1)|\varphi(k)] &\leq \\ V(k) - E[z^T(k)R_{\rho(k)\sigma(k)}z(k)|\varphi(k)], \end{aligned} \quad (9)$$

由式(9)递推可得

$$\begin{aligned} E[V(k)|\varphi(0)] &\leq \\ V(0) - \sum_{l=0}^{k-1} E[z^T(l)R_{\rho(l)\sigma(l)}z(l)|\varphi(0)], \end{aligned} \quad (10)$$

令 $k \rightarrow \infty$, 则由上式可得

$$\begin{aligned} J &= \sum_{l=0}^{\infty} E[z^T(l)R_{\rho(l)\sigma(l)}z(l)|\varphi(0)] \leq V(0) = \\ &z^T(0)P_{\rho(0)\sigma(0)}z(0). \end{aligned}$$

定理得证.

定理 1 给出了闭环系统 (4) 随机稳定且具有二次型性能指标上界的一个充分条件. 基于该条件, 可导出系统 (1) 的保性能控制器设计方法.

将 A_{ij} 和 R_{ij} 分别写成 $A_{ij} = A_{1ij} + B_{ij}KC_{ij}$

和 $R_{ij} = R_{1ij} + W_{ij}^T R_2 W_{ij}$. 其中:

$$A_{100} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{110} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & I & 0 \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{101} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad A_{111} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{bmatrix},$$

$$B_{00} = B_{01} = [B^T \ I \ 0]^T, \quad B_{10} = B_{11} = [0 \ 0 \ 0]^T,$$

$$C_{00} = [I \ 0 \ 0], \quad C_{10} = C_{11} = [0 \ 0 \ 0],$$

$$C_{01} = [0 \ 0 \ I], \quad W_{10} = W_{11} = [0 \ 0 \ 0],$$

$$R_{100} = R_{101} = \text{diag}\{R_1, 0, 0\}, \quad W_{00} = [K \ 0 \ 0],$$

$$R_{110} = R_{111} = \text{diag}\{R_1, R_2, 0\}, \quad W_{01} = [0 \ 0 \ K].$$

由 Schur 补引理可知式 (7) 等价于以下的矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} -P_{ij} + R_{1ij} & \Gamma \\ * & \Phi \end{bmatrix} < 0, \quad i, j \in \{0, 1\}, \quad (11)$$

其中:

$$\Gamma = [Y_{ij00}^T \ Y_{ij01}^T \ Y_{ij10}^T \ Y_{ij11}^T \ W_{ij}^T],$$

$$\Phi = -\text{diag}\{P_{00}^{-1}, P_{01}^{-1}, P_{10}^{-1}, P_{11}^{-1}, R_2^{-1}\},$$

$$\begin{aligned} Y_{ij\alpha\beta} &= \rho_{i\alpha}^{1/2} \sigma_{j\beta}^{1/2} (A_{1ij} + B_{ij}KC_{ij}), \\ i, j, \alpha, \beta &\in \{0, 1\}. \end{aligned}$$

为了有效处理非线性矩阵不等式 (11), 记不等式 (11) 左边的矩阵为 $\Omega(i, j)$, 用 Q_{ij} 代替 $\Omega(i, j)$ 中的 P_{ij}^{-1} , 并记得到的矩阵为 $\tilde{\Omega}(i, j)$. 其中, Q_{ij} 为正定矩阵. 利用文[4] 提出的锥补线性化(CCL)算法可将保性能控制器的求解问题转化求解以下具有 LMIs 约束的最小化问题:

$$\min \text{tr} \left(\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{ij} Q_{ij} \right), \quad (12)$$

$$\text{s. t. } \tilde{\Omega}(i, j) < 0, \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} P_{ij} & I \\ I & Q_{ij} \end{bmatrix} > 0, \quad i, j \in \{0, 1\}. \quad (14)$$

以下给出该最小化问题的一个迭代求解算法:

算法 1

1) 求优化问题的一组可行解 P_{ij}^0, Q_{ij}^0, K^0 , 令 $k = 0$, 并设定一个迭代次数的上界 $k_{\max}$;

2) 求解以下具有 LMIs 约束的最小化问题:

$$\min \text{tr} \left(\sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 P_{ij}^k Q_{ij}^k + Q_{ij}^k P_{ij}^k \right),$$

$$\text{s. t. } (13), (14)$$

得到 P_{ij}, Q_{ij}, K , 令 $P_{ij}^{k+1} = P_{ij}, Q_{ij}^{k+1} = Q_{ij}, K^{k+1} = K$;

3) 若 P_{ij} 满足式(11), 则退出, 得到的解即为此最小化问题的一个解. 若不满足, 令 $k = k + 1$, 返回到第2步. 如果 $k = k_{\max}$ 时仍然没有解, 则认为此最小化问题在迭代次数 $k_{\max}$ 内无解.

注1 为确立闭环系统性能和丢包率 r 之间的关系, 以下先建立概率转移矩阵 M, N 和丢包率的关系:

$$\begin{cases} \Lambda(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Lambda_0(0), \Lambda_1(0)] M^n, \\ \Pi(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\Pi_0(0), \Pi_1(0)] N^n, \\ r = 1 - \Lambda_0(\infty) \Pi_0(\infty), \end{cases} \quad (15)$$

其中的 $\Lambda_0(0), \Pi_0(0), \Lambda_1(0), \Pi_1(0)$ 分别表示前向通道和反馈通道中初始时刻数据包传输成功和丢包的概率, 它们可以通过实验获得, r 是整个闭环网络控制系统的丢包率.

4 数值算例(Numerical examples)

考虑文[5]中的仿真对象, 其中:

$$A = \begin{bmatrix} 0.6065 & 0 & -0.2258 \\ 0.3445 & 0.7788 & -0.0536 \\ 0 & 0 & 1.2840 \end{bmatrix},$$

$$B = [-0.0582 \quad -0.0093 \quad 0.5861]^T, \quad (16)$$

选取 R_1 和 R_2 为具有适当维数的单位矩阵, 系统初始条件为 $z(0) = [1 \quad 0.8 \quad 0.9 \quad 0.6 \quad 0.8 \quad 0.1]^T$, $\rho(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$, 概率转移矩阵为 $M = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$. 假设 $\Lambda_0(0) = \Lambda_1(0) = 0.5$, $\Pi_0(0) = \Pi_1(0) = 0.5$. 则由式(15)可得数据包丢失率约为 $r = 58\%$. 设 $k_{\max} = 50$, 在经过33次迭代运算之后, 得到相应的优化问题(12)可解, 求得的控制增益矩阵为 $K = [0.0808 \quad 0.0139 \quad -0.07023]$, 闭环系统的保性能界为 $J^* = 13.6517$.

取 $\rho(k), \sigma(k)$ 满足概率转移矩阵 M, N , 系统状态轨线和各时刻 $\rho(k), \sigma(k)$ 的值分别如图2和图3所示. 数值仿真结果表明, 在网络数据包丢失率约达58%的情况下, 所设计的保性能控制器仍能有效地镇定系统(16).

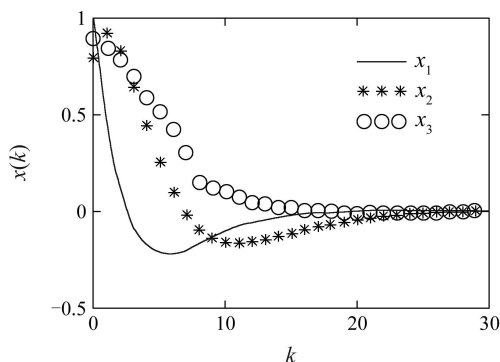


图2 系统状态轨迹

Fig. 2 System state trajectories

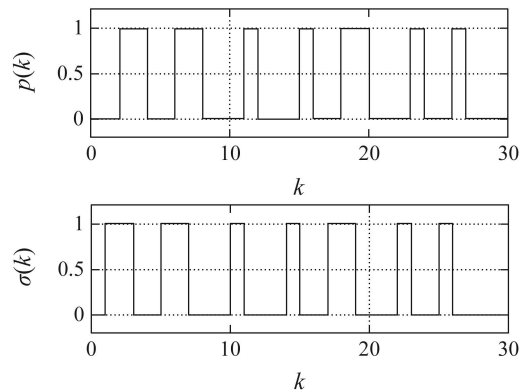


图3 $\rho(k)$ 和 $\sigma(k)$ 的切换值

Fig. 3 Values of $\rho(k)$ and $\sigma(k)$

5 结论(Conclusions)

本文讨论了一类数据包丢失同时存在于前向通道和反馈通道的网络控制系统的保性能控制问题. 通过将该类闭环网络控制系统建模成为一个具有两个模式的马尔可夫随机切换系统, 给出了闭环系统随机稳定的充分条件和保性能控制器的设计方法, 最后的数值算例表明了本文方法的有效性.

参考文献(References):

- [1] ZHANG L Q, SHI Y, CHEN T W, et al. A new method for stabilization of networked control system with random delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(8): 1177 – 1181.
- [2] SEILER P, SENGUPTA R. An H_∞ approach to networked control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(3): 356 – 364.
- [3] YU M, WANG L, CHU T, et al. Stabilization of networked control system with packet dropout and networked delays via switching approach[C] // *Proceedings of the 43rd IEEE Conference on Decision and Control*. Atlantis, Paradise Island, Bahamas: IEEE Press, 2004: 3549 – 3544.
- [4] GHAOMEL L E, OUSTRY F, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.
- [5] XIONG J L, LAM J. Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss[J]. *Automatica*, 2007, 43(1): 80 – 87.

作者简介:

宋洪波 (1984—), 男, 浙江工业大学控制理论与控制工程硕士生, 研究方向为网络控制系统等, E-mail: di7gan_shb@hotmail.com;

俞立 (1961—), 男, 浙江工业大学教授, 博士生导师, 研究方向为网络控制系统、鲁棒控制、时滞系统等, E-mail: lyu@zjut.edu.cn;

张文安 (1982—), 男, 浙江工业大学控制理论与控制工程博士生, 研究方向为网络控制系统、时滞系统等, E-mail: wazhg@hotmail.com.