

惯性轮倒立摆的鲁棒镇定

叶华文¹, 吴 敏¹, 余锦华^{1,2}

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 长沙 湖南 410083; 2. School of Bionics, Tokyo University of Technology, Tokyo, 192-0982, Japan)

摘要: 用一个时滞状态反馈控制律镇定惯性轮倒立摆, 不仅保证闭环系统全局渐近稳定, 还允许闭环系统承受一定的时滞. 将惯性轮倒立摆转化为存在高阶非线性的4维积分器链, 然后设计一个明确规定了饱和度和时滞参数的饱和控制律. 用简单方式证明了闭环的全局渐近稳定性. 仿真表明设计是有效的.

关键词: 非线性控制; 镇定; 饱和控制; 惯性轮倒立摆; 时滞状态反馈

中图分类号: TP202 **文献标识码:** A

Robust stabilization of the inertia wheel pendulum

YE Hua-wen¹, WU Min¹, SHE Jin-hua^{1,2}

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

2. School of Bionics, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan)

Abstract: A delayed state feedback law is presented to stabilize the inertia wheel pendulum, which guarantees the closed-loop system to be globally asymptotically stable in the presence of time delays. The inertia wheel pendulum is transformed into a 4-dimensional chain of integrators with higher order nonlinearity, and a saturated control law is provided with saturation level and time delay explicitly specified. The globally asymptotic stability of the closed-loop system is also proven in a simple way. Finally, simulation results show that the proposed controller is effective.

Key words: nonlinear control; stabilization; saturated control; inertia wheel pendulum; delayed state feedback

1 引言(Introduction)

用时滞状态反馈作为非线性系统的镇定控制, 不仅能保证闭环系统全局渐近稳定, 还允许闭环系统承受一定的时滞, 但目前只有为数不多的构造性设计^[1~4]. 本文将给出一个物理模型的构造性设计.

惯性轮倒立摆是一个受到关注的物理模型. 为说明一种松弛条件下的李雅普诺夫前推方法, 文献[5]给出过惯性轮倒立摆的无时滞的镇定设计; 为阐释一种基于无源性的控制方法, 文献[6]通过重构能量函数也给出过该模型的相关设计.

本文将用时滞状态反馈镇定惯性轮倒立摆. 首先将惯性轮倒立摆转化为存在高阶非线性的积分器链, 然后设计一种和式的饱和控制. 通过设置适度小的饱和度与时滞, 保证高阶非线性在有限时间后变为足够小, 从而保证闭环系统全局渐近稳定.

2 系统转换(System transformation)

惯性轮倒立摆的运动方程描述为^[6]:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{q}_1 &= mgL \sin q_1 - v, \\ I_2 \ddot{q}_2 &= v. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: I_1 和 I_2 分别是摆和轮盘的惯量, q_1 是摆角, q_2 是与轮盘转角有关的变量; m 和 L 是摆的质量和长度, g 为重力加速度, v 为作用于轮盘和摆之间的力矩.

本文的目的是, 为系统(1)设计状态反馈(允许部分状态含有时滞), 产生全局渐近稳定的闭环系统.

下面将系统(1)转化为容易处理的形式. 运用初始控制设计和坐标变换

$$\begin{cases} v = mgL \sin q_1 - I_1 u, \\ z_1 = (I_1 q_1 + I_2 q_2)/mgL, x_1 = q_1, \\ z_2 = (I_1 \dot{q}_1 + I_2 \dot{q}_2)/mgL, x_3 = \dot{q}_1. \end{cases} \quad (2)$$

系统(1)转化成下面的形式

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = x_1 + \sin x_1 - x_1, \dot{x}_1 = x_3, \dot{x}_3 = u, \quad (3)$$

注意到 $\sin x_1 - x_1 = -\frac{x_1^3}{3!} + \frac{x_1^5}{5!} \dots$, 系统(1)已转化成带有高阶非线性项的4-维积分器链. 再作线性变换:

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1 + 3z_2 + 3x_1 + x_3, \\ y_2 &= z_2 + 2x_1 + x_3, \end{aligned}$$

$$y_3 = x_1 + x_3, y_4 = x_3.$$

系统(1)转化成下面的前馈型形式

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + y_3 + y_4 + u + \\ \quad 3(\sin(y_3 - y_4) - (y_3 - y_4)), \\ \dot{y}_2 = y_3 + y_4 + u + \\ \quad \sin(y_3 - y_4) - (y_3 - y_4), \\ \dot{y}_3 = y_4 + u, \\ \dot{y}_4 = u, \end{cases} \quad (4)$$

系统(4)有一个重要特点, 即 $y_3 - y_4$ 为适度小的时候, 非线性项 $\sin(y_3 - y_4) - (y_3 - y_4)$ 会更小. 事实上, 很容易验证下面的不等式

$$|\sin \beta - \beta| \leq \beta^2/36, \beta \in [-1/18, 1/18]. \quad (5)$$

本文将为系统(4)设计饱和的时滞状态反馈. 设置适度小的饱和度和时滞, 并运用文献[7,8,3]等中自下而上的迭代分析方法, 那么可推知非线性项于有限时间后变为足够小. 通过小饱和度和小时滞来抑制高阶非线性的影响, 是本文设计思想的关键.

3 主要结果(Main result)

本节给出系统(1)的完整控制律, 并分析稳定性.

引理1 下面的控制律为系统(4)的镇定控制:

$$\begin{aligned} u = & -\text{sat}_s y_4(t-h) - \text{sat}_{\frac{s}{2}} y_3(t-h) - \\ & \text{sat}_{\frac{s}{4}} y_2(t-h) - \text{sat}_{\frac{s}{8}}(y_1(t-h)) := \\ & -\text{sat}_s y_{4h} - \text{sat}_{\frac{s}{2}} y_{3h} - \text{sat}_{\frac{s}{4}} y_{2h} - \text{sat}_{\frac{s}{8}} y_{1h}, \end{aligned} \quad (6)$$

其中饱和度常数 $s \leq 1/27$, 时滞常数 $h \leq 1/32$, 饱和函数的定义为 $\text{sat}_s(t) = \text{sgnmin}\{|t|, s\}$.

由上节的坐标变换和初始设计, 并根据引理1可得到本文的主要结论.

定理1 下面的时滞状态反馈控制律为系统(1)的镇定控制:

$$\begin{aligned} v = & mgL \sin x_1 + I_1 [\text{sat}_s x_{3h} + \text{sat}_{\frac{s}{2}}(x_{3h} + x_{1h}) + \\ & \text{sat}_{\frac{s}{4}}(x_{3h} + 2x_{1h} + z_{2h}) + \\ & \text{sat}_{\frac{s}{8}}(x_{3h} + 3x_{1h} + 3z_{2h} + z_{1h})], \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} x_{3h} &:= x_3(t-h), x_{1h} := x_1(t-h), \\ z_{2h} &:= z_2(t-h), z_{1h} := z_1(t-h); \end{aligned}$$

x_3, x_1, z_2, z_1 如式(2)定义; $s \leq 1/27, h \leq 1/32$.

由于系统(1)和系统(4)等价, 为证明定理1只需证明引理1.

引理1的证明

Step 1 系统(3)显然不会有限逃逸, 意味着系统(4)也不会于有限时间内逃逸为无穷.

Step 2 自下而上迭代分析各子系统, 证明控制律(6)于有限时间内退化为相应的线性控制. 首先考察 y_4 子系统, 因为 $|\dot{y}_4| \leq s + s/2 + s/4 + s/8 < 2s$, 而且 $h \leq 1/32$, 运用牛顿-莱布尼茨公式有

$$|y_4(t-h) - y_4| \leq \int_{t-h}^t |\dot{y}_4(s)| ds < 2sh \leq s/16,$$

这样, 根据 $\text{sat}_s(t)$ 函数的特性, 用类似中值定理的思想可得到

$$|\text{sat}_s y_{4h} - \text{sat}_s y_4| \leq |y_{4h} - y_4| < s/16,$$

现在断言: 存在有限时刻 $T_1 \geq 0$ 以致对所有 $t \geq T_1$,

$$|y_4| \leq s, |y_{4h}| \leq s$$

为 y_4 子系统定义Lyapunov函数 $V_4 = \frac{1}{2}y_4^2$, 沿着该子系统的解计算 V_4 的时间导数. 注意到对所有 $|y_4| \geq s$ 有 $y_4 \text{sat}_s y_4 = |y_4| \text{sat}_s |y_4|$, 于是对所有 $|y_4| \geq s$ 有

$$\begin{aligned} \dot{V}_4 = & -y_4 \text{sat}_s y_4 - y_4 [\text{sat}_s y_{4h} - \text{sat}_s y_4] + \\ & y_4 [-\text{sat}_{\frac{s}{2}} y_{3h} - \text{sat}_{\frac{s}{4}} y_{2h} - \text{sat}_{\frac{s}{8}} y_{1h}] < \\ & (-s + s/16 + s/2 + s/4 + s/8)|y_4| < 0, \end{aligned}$$

这意味着存在有限时间 $t_1 \geq 0$, 对所有 $t \geq t_1$ 有 $|y_4| \leq s$, 即对所有 $t \geq t_1 + h$ 有 $|y_{4h}| \leq s$. 令 $T_1 = t_1 + h$ 则断言得证.

既然 T_1 时刻后有 $|y_{4h}| \leq s$, 控制律(6)退化为

$$u = -y_{4h} - \text{sat}_{\frac{s}{2}} y_{3h} - \text{sat}_{\frac{s}{4}} y_{2h} - \text{sat}_{\frac{s}{8}} y_{1h},$$

相应地, y_3 子系统退化成为

$$\dot{y}_3 = y_4 - y_{4h} - \text{sat}_s y_{3h} - \text{sat}_{\frac{s}{4}} y_{2h} - \text{sat}_{\frac{s}{8}} y_{1h},$$

注意到 $|y_{4h} - y_4| < s/16$, 用刚才的方法可得到以下估计式

$$|\text{sat}_{\frac{s}{2}} y_{3h} - \text{sat}_{\frac{s}{2}} y_3| \leq |y_{3h} - y_3| < s/32.$$

同样的方法运用到 y_3 子系统, 可证明: 存在有限时刻 $T_2 \geq T_1$, 使得对所有 $t \geq T_2$ 有 $|y_3| \leq s/2, |y_{3h}| \leq s/2$. 于是对所有 $t \geq T_2$, y_2 子系统退化成为

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 = & y_4 - y_{4h} + y_3 - y_{3h} - \text{sat}_{\frac{s}{4}} y_{2h} - \text{sat}_{\frac{s}{8}} y_{1h} + \\ & (\sin y_3 - y_4) - (y_3 - y_4), \end{aligned}$$

注意到 $t \geq T_2$ 时有 $|y_4| \leq s, |y_3| \leq s/2$, 并因为 $s \leq 1/27$, 从而有 $|y_3 - y_4| \leq 3s/2 \leq 1/18$, 进而由式(5)可得 $|(\sin y_3 - y_4) - (y_3 - y_4)| \leq s/432$. 另外还有 $|y_{4h} - y_4| \leq s/16, |y_{3h} - y_3| \leq s/32$, 因此

$$|\dot{y}_2| < s/16 + s/32 + s/4 + s/8 + s/432 < s/2,$$

从而有

$$|\text{sat}_{\frac{s}{4}} y_{2h} - \text{sat}_{\frac{s}{4}} y_2| \leq |y_{2h} - y_2| < s/64.$$

根据以上估计, 同法可证: 存在有限时刻 $T_3 \geq T_2$, 使得对所有 $t \geq T_3$ 有, $|y_2| \leq s/4, |y_{2h}| \leq s/4$. 这是因为, 为 y_2 子系统定义函数 $V_2 = \frac{1}{2}y_2^2$, 对所有 $|y_2| \geq s/4$ 和 $t \geq T_2$ 有

$$\dot{V}_2 < (s/16 + s/32 - s/4 + s/64 + s/8 + s/432)|y_2| < 0,$$

最后, 考察 y_1 子系统时容易证明: 存在有限时间 $T_4 \geq T_3$, 对所有 $t \geq T_4$ 有 $|y_1| \leq s/8, |y_{1h}| \leq s/8$. 于是对所有 $t \geq T_4$, 系统(4)(6)退化成

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 + y_3 + y_4 - y_{1h} - y_{2h} - y_{3h} - y_{4h} + 3(\sin(y_3 - y_4) - (y_3 - y_4)), \\ \dot{y}_2 = y_3 + y_4 - y_{1h} - y_{2h} - y_{3h} - y_{4h} + \sin(y_3 - y_4) - (y_3 - y_4), \\ \dot{y}_3 = y_4 - y_{1h} - y_{2h} - y_{3h} - y_{4h}, \\ \dot{y}_4 = -y_{1h} - y_{2h} - y_{3h} - y_{4h}. \end{cases} \quad (8)$$

Step 3 运用文献[3]中的分析方法, 证明 $t \geq T_4$ 时的系统(8)为渐近稳定. 令

$$\sin(y_3 - y_4) - (y_3 - y_4) := c(y)(y_3 - y_4),$$

其中 $c(y) = -\frac{(y_3 - y_4)^3}{3!} + \frac{(y_3 - y_4)^5}{5!} \dots$, 则系统(8)对应地重写为

$$\dot{y} = (A_1 + A_2(y))y + A_3(y_h - y), \quad (9)$$

其中 $y_h = (y_{1h}, y_{2h}, y_{3h}, y_{4h})^T$, A_1 , $A_2(y)$ 和 A_3 分别为:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_2(y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3c(y) & -3c(y) \\ 0 & 0 & c(y) & -c(y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

因为 $t \geq T_4$ 时有 $|y_3 - y_4| \leq 1/18$, 细致计算后有

$$|c(y)| < \frac{1}{1000}, \|A_2(y)y\| < \frac{1}{200}|y|. \quad (10)$$

现在定义正定二次型函数 $U_1 = y^T P y$, 其中

$$P = \begin{bmatrix} 3/5 & -3/10 & -3/20 & -3/40 \\ -3/10 & 9/10 & -9/40 & -3/20 \\ -3/20 & -9/40 & 39/40 & -3/16 \\ -3/40 & -3/20 & -3/16 & -81/80 \end{bmatrix},$$

运用式(10), 细致计算 U_1 沿着系统(9)的时间导数, 可得到 $\dot{U}_1 \leq -|y|^2 + 2y^T P A_3(y_h - y)$. 令 $\|P A_3\| = G$, 运用不等式 “ $ab \leq \frac{a^2}{4v} + vb^2; a, b, v > 0$ ”, 有

$$\dot{U}_1 \leq -\frac{1}{2}|y|^2 + 2G^2|y_h - y|^2,$$

又运用式(10)及变量代换有

$$|y_h - y| \leq \int_{t-h}^t |\dot{y}(s)| ds \leq H \int_{t-2h}^t |y(s)| ds,$$

其中 $H = \max\{\|A_1\|, \|A_3\|\} + \frac{1}{200}$. 运用柯西-施瓦兹不等式有

$$|y_h - y|^2 \leq 2hH^2 \int_{t-2h}^t |y(s)|^2 ds,$$

另外, 细致计算可得到 $h \leq \frac{1}{32} < \frac{3^{1/2}}{8GH}$.

现在重新定义函数

$$U_2 = U_1 + 4hG^2H^2 \int_{t-2h}^t \left(\int_s^t |y(w)|^2 dw \right) ds,$$

利用上面的估计, 简单计算后有

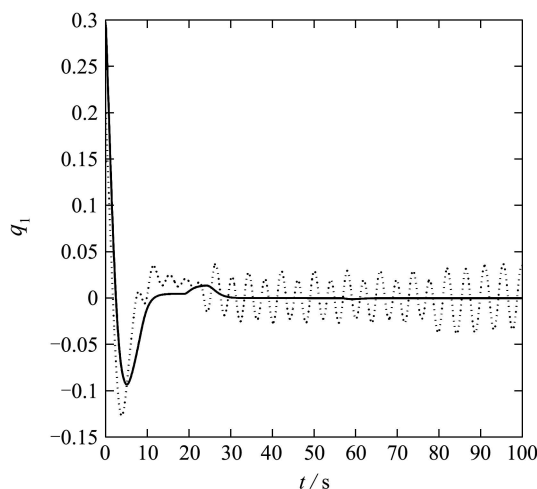
$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 + 8h^2G^2H^2|y|^2 - 4hG^2H^2 \int_{t-2h}^t |y(s)|^2 ds \leq -\frac{1}{8}|y|^2,$$

根据Lyapunov稳定原理, 系统(9)(也即系统(8))为渐近稳定.

Step 1, 2 和3的分析表明, 闭环系统(4)(6)不会有限逃逸, 且于有限时间后退化为渐近稳定的动态, 即为全局吸引且局部渐近稳定的, 因此为全局渐近稳定^[9]. 证毕.

4 仿真(Simulations)

针对系统(1)(7), 采用文献[6]中的系统参数: $I_1 = 0.1$, $I_2 = 0.2$, $mgL = 10$; 饱和度常数 $s = \frac{1}{27}$, 初始值为 $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = (0.3, -0.14, 0, 0)$. 仿真结果示于图1.



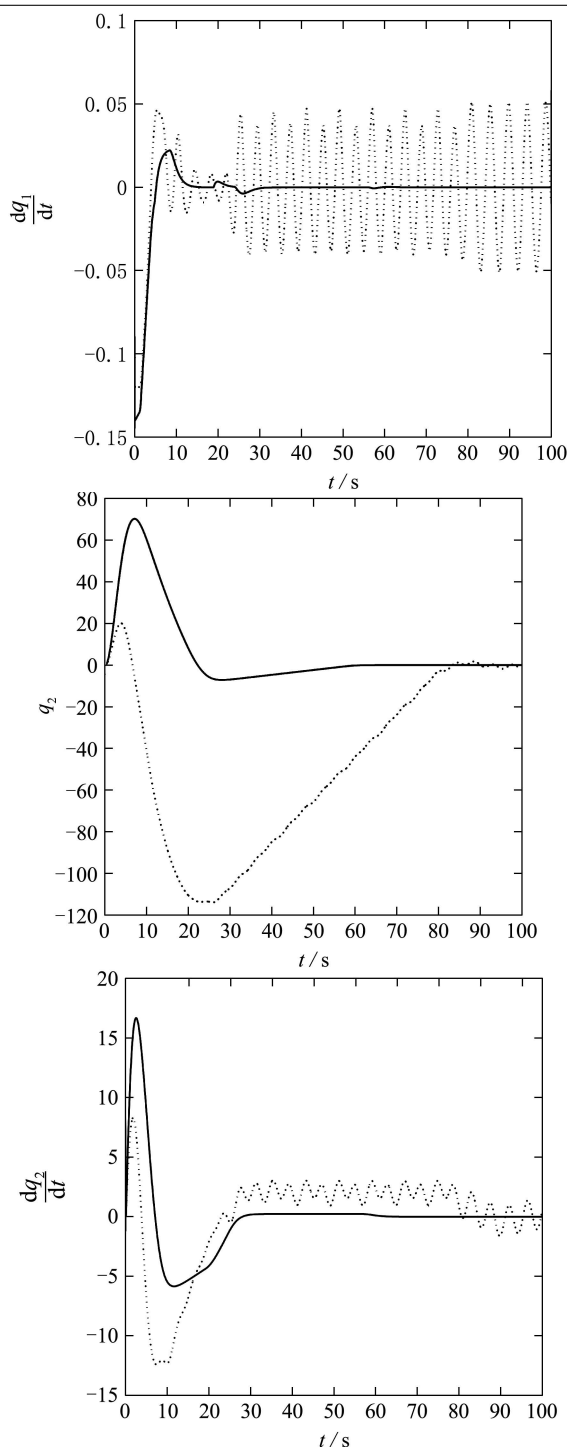


图1 不同时滞下的状态响应

Fig. 1 State responses under different time delays

图中实线表示时滞 $h = 0.01 (< \frac{1}{32})$ 时的状态响应, 时滞在允许范围内, 各状态很好地收敛到原点;

点线对应 $h = 0.8 (> \frac{1}{32})$ 时的状态响应, 时滞较大, 产生了发散现象。

5 结论(Conclusion)

将惯性轮倒立摆的模型方程转化为带有高阶非线性的前馈型系统, 然后设计和式的饱和控制, 通过适度小的饱和度和时滞来抑制高阶非线性的影响. 本文不仅得到惯性轮倒立摆的全局的镇定设计, 还允许闭环系统承受一定的时滞. 前人及本文的工作表明, 饱和方法适合处理时滞状态反馈镇定问题. 运用饱和方法解决更多的时滞状态反馈镇定问题, 是笔者下一步的研究方向.

参考文献(References):

- [1] MAZENC F, MONDIE S, NICULESCU S. Global asymptotic stabilization for chains of integrators with a delay in the input[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(1): 57 – 63.
- [2] MAZENC F, MONDIE S, NICULESCU S. Global stabilization of oscillators with bounded delayed input[C] // *41st IEEE Conference Decision Control*. Las Vegas, NV: [s.n.], 2002.
- [3] MAZENC F, MONDIE S, FRANCISCO R. Global asymptotic stabilization of feedforward systems with delay in the input[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(5): 844 – 850.
- [4] KALIORA G, ASTOLFI A. Nonlinear control of feedforward systems with bounded signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(11): 1975 – 1990.
- [5] PRALY L, ORTEGA R, KALIORA G. Stabilization of nonlinear systems via forwarding mod LgV[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2001, 46(9): 1461 – 1466.
- [6] ORTEGA R, SPONG M W, GOMEZ-ESTERN F, BLANKENSTERN G. Stabilization of a class of underactuated mechanical system via interconnection and damping assignment[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1218 – 1233.
- [7] SUSSMANN H J, SONTAG E D, YANG Y. A general result on the stabilization of linear systems using bounded controls[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(12): 2411 – 2425.
- [8] LIN W, LI X. Synthesis of upper-triangular nonlinear systems with marginally unstable free dynamics using state-dependent saturation[J]. *International of Journal Control*, 1999, 72(12): 1078 – 1086.
- [9] SASTRY S. *Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control*[M]. New York: Springer, 1999.

作者简介:

叶华文 (1968—), 男, 中南大学副教授, 研究方向为非线性控制系统分析与设计, E-mail: yehuawen2001@yahoo.com.cn;

吴敏 (1963—), 男, 中南大学教授, 研究方向为复杂工业系统过程控制、机器人控制及鲁棒控制;

余锦华 (1965—), 男, 中南大学教授, 研究方向为机器人控制及鲁棒控制.