第 25 卷第 5 期
2008 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 5
Oct. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)05−0951−05

切换线性时滞系统的稳定性判据

宗广灯[1,2], 武玉强[2], 徐胜元[1]

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 考虑了一类切换线性时滞系统的稳定性问题. 基于Lyapunov 函数方法和矩阵测度的概念, 分别给出了切换系统时滞独立以及时滞依赖的渐近稳定性和指数稳定性判据, 设计了相应的镇定切换律. 最后, 通过数值算例验证了所提算法的正确有效性.

关键词: 切换线性系统; 时滞; 公共Lyapunov函数; 渐近稳定性; 矩阵测度

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Stability criteria for switched linear systems with time-delay

ZONG Guang-deng[1,2], WU Yu-qiang[2], XU Sheng-yuan[1]

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing, Jiangsu 210094, China;
2. Research Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: The stability problem for a class of switched linear systems with time-delay is considered. Based on the Lyapunov function method and the concept of matrix measure, we propose both the time-delay independent criteria and the time-delay dependent criteria for the asymptotic stability and exponential stability respectively. The corresponding stabilizing switching laws are also provided. Two examples are given to show the validity of the presented algorithms.

Key words: switched linear systems; time delay; common Lyapunov function; asymptotic stability; matrix measure

1 引言(Introduction)

切换系统是一类重要的混合动态系统, 它可以看作是由若干微分方程或者差分方程及其作用在其中的切换规则组成的. 切换系统可以用来描述许多不能通过纯粹的连续时间过程或离散时间过程刻划的系统. 因而切换系统具有广泛的应用背景, 典型的切换系统的例子包括: 通信网络, 交通控制, 化工批处理过程, 自动引擎控制, 飞行器控制, 自动调速系统控制, 生化过程控制等. 此外, 选用切换控制有时候可以获得比传统的连续控制更好的效果. 在过去的二十年里, 有关切换系统理论及其应用的研究受到众多学者的关注[1~17].

切换系统的稳定性是目前研究最为集中的问题. 切换系统不同于纯粹的的连续时间系统或离散时间系统, 它具有一些特殊的性质. 研究表明[2]: 两个全局指数稳定的系统在某些切换机制作用下可能是不稳定的, 两个不稳定的系统在某些切换策略作用下也可能是渐近稳定的. 因此, 切换系统的稳定性研究极为复杂. 目前切换系统稳定性的研究方法主要包括: 1) 公共Lyapunov函数方法[4], 即假设所有子系统具有一个公共的Lyapunov函数, 从而保证对于子系统之间的任意切换, 系统是渐近稳定的; 2) 多Lyapunov函数[5]或切换Lyapunov函数方法[6], 此时假设每个子系统都具有一个相应的Lyapunov函数, 通过设计适当的切换策略可以保证给定切换系统是渐近稳定的; 3) 基于驻留时间的慢切换方法[7], 当切换系统中所含稳定子系统的总激励时间与不稳定子系统的总激励时间之比充分大时, 可以保证切换系统是渐近稳定的.

本文拟研究如下的切换线性时滞系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=A_{\sigma(t)}x(t)+B_{\sigma(t)}x(t-\tau), t\geqslant t_0, \\ x(t)=\Phi(t), \qquad -\tau\leqslant t\leqslant t_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, $\tau>0$为已知的常数时滞, $\sigma(t)\in\{1,2,\cdots,N\}\triangleq\bar{N}$ 为系统的切换信号, 它是一个依赖于时间t的分段常值函数, 在某一时刻t, 若$\sigma(t)=i\in\bar{N}$, 则系统(1)对应地切换为第i个子系统.

对于系统 (1), 借助于公共Lyapunov 函数方法, 文献[11]假设存在一个$\{(A_i+B_i)\}$的稳定凸组合,

收稿日期: 2006−12−31; 收修改稿日期: 2007−07−09.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674027); 教育部博士点基金资助项目(20050446001); 中国博士后基金资助项目(20070410336); 江苏省博士后基金资助项目(0602042B).

得出了系统(1)在任意切换律下均一致渐近稳定的时滞依赖稳定性条件. 文献[12]研究了一类切换时滞大系统的稳定性问题, 通过将给定的切换时滞系统转化为无时滞的切换系统, 基于慢切换的思想[8], 得到了系统渐近稳定的充分条件. 文献[13]应用切换Lyapunov 函数方法[7]考虑了一类线性离散时滞切换系统的二次稳定和二次镇定问题, 通过将系统状态进行扩维, 给出了切换时滞系统二次稳定和二次镇定的线性矩阵不等式判定条件. 文献[14]分别基于单Lyapunov函数和多Lyapunov函数方法, 研究了一类带有时滞摄动的线性切换系统的稳定性. 基于相似的方法, 文献[15]研究了具有模式依赖时滞马尔可夫切换系统的稳定性问题. 此外, 应用矩阵不等式技术, 文献[16]还考虑了一类离散时间时滞切换系统的鲁棒H_∞镇定问题.

本文着重考虑系统(1)的渐近稳定性和指数稳定性问题, 基于Lyapunov函数方法以及矩阵测度的概念分别给出了判定切换线性时滞系统渐近稳定性和指数稳定性的判据. 这些判据包括时滞依赖稳定性判据和时滞独立的稳定性判据. 最后, 通过数值算例验证了本文所提算法的正确有效性.

2 预备知识(Preliminaries)

符号说明: $P>0(P<0)$表示矩阵P对称正定(负定), $\lambda_{\min}(A)$表示矩阵A的最小特征值, $|\cdot|$和$\|\cdot\|$分别为向量范数和与之相容的矩阵范数, $\mu(A)$为矩阵范数$\|\cdot\|$下A的测度. $\arg\min\limits_i\{\cdot\}$表示使得括号内函数值达到最小的指标.

为了证明本文的主要结论, 引入如下的引理.

引理 1 设矩阵$P\in\mathbb{R}^{n\times n}>0$, 则存在可逆矩阵$U$使得$P=U^{\mathrm T}U$.

引理 2 设M,N为适当维数的矩阵, 则有下面的不等式成立:

$$M^{\mathrm T}N+N^{\mathrm T}M\leqslant M^{\mathrm T}M+N^{\mathrm T}N.$$

引理 3 [18] 如果下述系统是渐近稳定的:

$$\dot{\bar x}(t)=\bar A\bar x(t)+\bar B\bar x(t-\tau),$$

那么系统

$$\dot x(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)$$

是指数稳定的, 并且收敛速度为α, 其中

$$\bar A=A+\alpha I,\ \bar B=B\mathrm{e}^{\alpha\tau},\alpha>0.$$

引理 4 (Barbalet引理)[19] 如果可微函数$f(t)$当$t\to\infty$时有一个有限的极限值, 而且$f(t)$的导数$\dot f(t)$是一致连续的, 则

$$\lim_{t\to\infty}\dot f(t)=0.$$

3 Lyapunov 函数方法研究(Study on the Lyapunov function method)

定理 1 对系统(1), 如果存在一组对称正定矩阵P_i,Q_i满足下面的广义Lyapunov矩阵方程:

$$A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+B_i^{\mathrm T}P_iB_i+P_i+Q_i=0,i\in\bar N,\tag{2}$$

定义切换策略

$$\sigma(t)=\arg\min_i\left\{x^{\mathrm T}(t-\tau)B_i^{\mathrm T}P_iB_ix(t-\tau)\right\},\tag{3}$$

则系统(1)在切换律(3)作用下是时滞依赖渐近稳定的.

注 1 尽管判定条件(2)与时滞τ 无关, 但是切换律(3)的定义与时滞τ 有关, 而且切换系统的稳定性是与切换律紧密相连的, 所以称判定条件(2)和(3)是切换系统(1)的一个时滞依赖稳定性判据.

证 对系统(1), 选取如下的Lyapunov函数

$$V(t)=x^{\mathrm T}(t)P_{\sigma(t)}x(t)+\int_{t-\tau}^{t}x^{\mathrm T}(s)B_{\sigma(s)}^{\mathrm T}P_{\sigma(s)}B_{\sigma(s)}x(s)\mathrm{d}s.\tag{4}$$

显然, 对任意的$x(t)\neq0$有

$$V(t)\geqslant\min_{1\leqslant i\leqslant N}\lambda_{\min}(P_i)|x(t)|^2>0.$$

下面求$V(t)$的导数, 设$\sigma(t)=i,\sigma(t-\tau)=j$, 则

$$\begin{aligned}\dot V(t)=&x^{\mathrm T}(t)[A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+B_i^{\mathrm T}P_iB_i]x(t)-\\&x^{\mathrm T}(t-\tau)B_j^{\mathrm T}P_jB_jx(t-\tau)+x^{\mathrm T}(t)P_i\times\\&B_ix(t-\tau)+x^{\mathrm T}(t-\tau)B_i^{\mathrm T}P_ix(t).\end{aligned}\tag{5}$$

由引理1知, 存在非奇异矩阵U_i使得: $P_i=U_i^{\mathrm T}U_i$, 代入式(5), 进而由引理2得

$$\begin{aligned}\dot V(t)=&x^{\mathrm T}(t)[A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+B_i^{\mathrm T}P_iB_i]x(t)-\\&x(t-\tau)^{\mathrm T}B_j^{\mathrm T}P_jB_jx(t-\tau)+x^{\mathrm T}(t-\tau)\times\\&B_i^{\mathrm T}U_i^{\mathrm T}U_ix(t)+x^{\mathrm T}(t)U_i^{\mathrm T}U_iB_ix(t-\tau)\leqslant\\&x^{\mathrm T}(t)[A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+B_i^{\mathrm T}P_iB_i]x(t)-\\&x^{\mathrm T}(t-\tau)B_j^{\mathrm T}P_jB_jx(t-\tau)+x^{\mathrm T}(t-\tau)\times\\&B_i^{\mathrm T}U_i^{\mathrm T}U_iB_ix(t-\tau)+x^{\mathrm T}(t)U_i^{\mathrm T}U_ix(t)=\\&-x^{\mathrm T}(t)Q_ix(t)+x^{\mathrm T}(t-\tau)\times\\&[B_i^{\mathrm T}P_iB_i-B_j^{\mathrm T}P_jB_j]x(t-\tau).\end{aligned}\tag{6}$$

由切换律(3)的定义可知

$$x^{\mathrm T}(t-\tau)B_i^{\mathrm T}P_iB_ix(t-\tau)\leqslant x^{\mathrm T}(t-\tau)B_j^{\mathrm T}P_jB_jx(t-\tau).$$

因而, 对任意非零$x(t)$有

$$\dot V(t)\leqslant-x^{\mathrm T}(t)Q_ix(t)<0.\tag{7}$$

于是, 由Lyapunov函数方法可知系统(1)在条件(2)和切换律(3)作用下是渐近稳定的. 证毕.

注 2 由定理1的证明可知, 判定条件(2)等价于存在一组对称正定矩阵P_i满足

$$A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+B_i^{\mathrm T}P_iB_i+P_i<0, i\in\bar N. \tag{8}$$

由Schur补公式, (8)可化为如下的线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+P_i & B_i^{\mathrm T}P_i \\ P_iB_i & -P_i \end{bmatrix}<0, i\in\bar N. \tag{9}$$

从而, 可以应用线性矩阵不等式的求解方法来判定系统(1)的渐近稳定性, 降低计算的复杂度.

由定理1和引理3不难得到下面的推论:

推论 1 对系统(1), 如果存在一组对称正定矩阵P_i, Q_i以及正常数$\alpha>0$满足下面的广义Lyapunov矩阵方程

$$A_i^{\mathrm T}P_i+P_iA_i+\mathcal B+(1+2\alpha)P_i+Q_i=0, \tag{10}$$
$$\mathcal B=: \mathrm e^{2\alpha\tau}B_i^{\mathrm T}P_iB_i,$$

或者线性矩阵不等式

$$\begin{bmatrix} \mathcal A & \mathrm e^{\alpha\tau}B_i^{\mathrm T}P_i \\ \mathrm e^{\alpha\tau}P_iB_i & -P_i \end{bmatrix}<0, \tag{11}$$
$$\mathcal A=: (A_i+\alpha I)^{\mathrm T}P_i+P_i(A_i+\alpha I),$$

则系统(1)在切换策略(3)作用下是指数稳定的, 且收敛速度为α.

4 基于矩阵测度的稳定性研究(Stability study by matrix measure)

定理 2 对系统(1), 如果满足下面的判定条件

$$\mu_{\mathrm a}+b<0, \tag{12}$$

其中: $\mu_{\mathrm a}=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\mu(A_i), b=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\|B_i\|$, 那么对于子系统之间的任意切换, 系统(1)是时滞独立渐近稳定的.

证 设$t_0<t_1<\cdots<t_k<t_{k+1}\cdots$为系统的切换时刻, 且$t\in[t_k,t_{k+1})$, $\sigma(s)=l_i, s\in[t_i,t_{i+1})$.

由文献[20]可得

$$\frac{\mathrm d^+|x(t)|}{\mathrm dt}\leqslant \mu(A_\sigma)|x(t)|+\|B_\sigma\||x(t-\tau)|. \tag{13}$$

对式(13)两边在$[t_0,t]$上进行积分可得

$$\begin{aligned}&|x(t)|-|x(t_0)|\leqslant\\&\sum_{i=0}^{k-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[\mu(A_{l_i})|x(s)|+\|B_{l_i}\||x(s-\tau)|\mathrm ds]+\\&\int_{t_k}^{t}[\mu(A_{l_k})|x(s)|+\|B_{l_k}\||x(s-\tau)|\mathrm ds]\leqslant\\&\int_{t_0}^{t}[\mu_{\mathrm a}|x(s)|+b|x(s-\tau)|]\mathrm ds=\\&\int_{t_0}^{t}\mu_{\mathrm a}|x(s)|\mathrm ds+\int_{t_0-\tau}^{t-\tau}b|x(s)|\mathrm ds\leqslant\\&\int_{t_0}^{t}[\mu_{\mathrm a}|x(s)|+b|x(s)|]\,\mathrm ds+\int_{t_0-\tau}^{t_0}b|\varPhi(s)|\mathrm ds.\end{aligned} \tag{14}$$

整理可得

$$|x(t)|-\int_{t_0}^{t}[\mu_{\mathrm a}+b]|x(s)|\mathrm ds\leqslant M_1, \tag{15}$$

其中

$$M_1=|x(t_0)|+\int_{t_0-\tau}^{t_0}b|\varPhi(s)|\mathrm ds.$$

因此, 当$\mu_{\mathrm a}+b<0, \forall\, t\geqslant t_0$有

$$|x(t)|\leqslant M_1,\ \int_{t_0}^{t}|x(s)|\mathrm ds\leqslant-\frac{M_1}{\mu_{\mathrm a}+b}>0. \tag{16}$$

这说明函数$\int_{t_0}^{t}|x(s)|\mathrm ds$当$t\to\infty$时有一个有限的极限, 而且其导数$|x(t)|$是一致连续有界的. 由引理4可知, 对于任意的切换信号$\sigma(t)$均有: $\lim\limits_{t\to t_0}|x(t)|=0$. 即系统(1)是时滞独立渐近稳定的.

由定理2和引理3不难得到下面的推论:

推论 2 对系统(1), 如果存在常数$\alpha>0$使得下面的条件成立

$$\mu_{\mathrm a}+\alpha+\mathrm e^{\alpha\tau}b<0, \tag{17}$$

那么对于子系统之间的任意切换, 系统(1)是时滞依赖指数稳定的, 且收敛速度为α.

设

$$\gamma_1=\max_{1\leqslant i,j\leqslant N}\|B_iA_j\|,$$
$$\gamma_2=\max_{1\leqslant i,j\leqslant N}\|B_iB_j\|,$$
$$\rho=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\mu(A_i+B_i).$$

由于$x(t-\tau)=x(t)-\int_{t-\tau}^{t}\dot x(s)\mathrm ds$, 所以

$$\dot x(t)=(A_{\sigma(t)}+B_{\sigma(t)})x(t)-B_{\sigma(t)}\int_{t-\tau}^{t}\dot x(s)\mathrm ds,$$

类似于式(13), 经计算可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm d^+|x(t)|}{\mathrm dt}\leqslant\\&\rho|x(t)|+\gamma_1\int_{t-\tau}^{t}|x(s)|\mathrm ds+\gamma_2\int_{t-\tau}^{t}|x(s-\tau)|\mathrm ds.\end{aligned} \tag{18}$$

对式(18)两边同时从t_0到$t(t>t_0)$积分有

$$\begin{aligned}&|x(t)|-|x(t_0)|\leqslant\\&\rho\int_{t_0}^{t}|x(s)|\mathrm ds+\int_{t_0}^{t}\int_{s-\tau}^{s}[\gamma_1|x(u)|+\gamma_2|x(u-\tau)|]\mathrm du\mathrm ds.\end{aligned} \tag{19}$$

交换积分次序有

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\int_{s-\tau}^{s}|x(u)|\mathrm du\mathrm ds\leqslant\int_{t_0-\tau}^{t}\int_{s-\tau}^{s}|x(u)|\mathrm ds\mathrm du=\\&\int_{t_0-\tau}^{t_0}\tau|\varPhi(s)|\mathrm ds+\int_{t_0}^{t}\tau|x(s)|\mathrm ds,\end{aligned} \tag{20}$$

$$\int_{t_0}^{t}\int_{s-\tau}^{s}|x(u-\tau)|\mathrm du\mathrm ds\leqslant\int_{t_0-\tau}^{t_0}\tau|\varPhi(s-\tau)|\mathrm ds+$$

$$\int_{t_0-\tau}^{t_0}\tau|\Phi(s)|\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\tau|x(s)|\mathrm{d}s. \tag{21}$$

将式(20) (21)代入式(19)整理可得

$$|x(t)|-[\rho+(\gamma_1+\gamma_2)\tau]\int_{t_0}^{t}|x(s)|\mathrm{d}s\leqslant M_2, \tag{22}$$

其中

$$M_2\triangleq\int_{t_0-\tau}^{t_0}[(\gamma_1+\gamma_2)\tau|\Phi(s)|+\gamma_2\tau|\Phi(s-\tau)|]\mathrm{d}s. \tag{23}$$

由引理4不难得到如下的结论:

定理 3 对于子系统之间的任意切换, 系统(1)是时滞依赖渐近稳定的, 如果下面的判定条件成立

$$\rho<0, 0<\tau\leqslant-\frac{\rho}{\gamma_1+\gamma_2}. \tag{24}$$

记$\mu_{\mathrm{a}}\triangleq\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\mu(A_i)$, $\mu_{\mathrm{b}}\triangleq\max\limits_{1\leqslant i\leqslant N}\mu(B_i)$. 则如下结论成立:

推论 3 对系统(1), 如果存在常数$\alpha>0$使得下面的判定条件成立

$$\begin{cases}\mu_{\mathrm{a}}+|\mu_{\mathrm{b}}|+\alpha<0,\\ \gamma_1+\gamma_2-2\alpha^2-2\alpha\mu_{\mathrm{a}}>0,\\ 0<\tau\leqslant-\dfrac{\mu_{\mathrm{a}}+|\mu_{\mathrm{b}}|+\alpha}{\gamma_1+\gamma_2-2\alpha^2-2\alpha\mu_{\mathrm{a}}},\end{cases} \tag{25}$$

则对于任意的切换信号$\sigma(t)$, 系统(1)是时滞依赖指数稳定的, 且收敛速度为α.

证 由引理3和定理3的证明可知, 如果

$$\begin{aligned}&y=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\mu(A_i+B_i\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\alpha I)<0,\\&0<\tau\leqslant-\frac{y}{\mathrm{e}^{\alpha\tau}\gamma_1+\mathrm{e}^{2\alpha\tau}\gamma_2},\end{aligned} \tag{26}$$

则系统(1)是指数稳定的且具有收敛速度α.

由矩阵测度的性质$\mu(A+B)\leqslant\mu(A)+\mu(B)$可知

$$\begin{aligned}&y=\max_{1\leqslant i\leqslant N}\mu(A_i+B_i\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\alpha I)\leqslant\\&\max_{1\leqslant i\leqslant N}\{\mu(A_i)+\mu(B_i)\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\alpha\}=\\&\mu_{\mathrm{a}}+\mu_{\mathrm{b}}\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\alpha,\end{aligned} \tag{27}$$

进而有

$$\begin{aligned}&0<\tau\leqslant-\frac{\mu_{\mathrm{a}}+\mu_{\mathrm{b}}\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha\tau}\gamma_1+\mathrm{e}^{2\alpha\tau}\gamma_2}\Rightarrow\\&0<\tau\leqslant-\frac{y}{\mathrm{e}^{\alpha\tau}\gamma_1+\mathrm{e}^{2\alpha\tau}\gamma_2}.\end{aligned} \tag{28}$$

由于

$$\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(\mu_{\mathrm{a}}+\alpha)+\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mu_{\mathrm{b}}}{\gamma_1+\gamma_2}=\\&-\frac{\mu_{\mathrm{a}}+\mu_{\mathrm{b}}\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\alpha}{\mathrm{e}^{2\alpha\tau}(\gamma_1+\gamma_2)}\leqslant\\&-\frac{\mu_{\mathrm{a}}+\mu_{\mathrm{b}}\mathrm{e}^{\alpha\tau}+\alpha}{\mathrm{e}^{\alpha\tau}\gamma_1+\mathrm{e}^{2\alpha\tau}\gamma_2},\end{aligned} \tag{29}$$

以及不等式

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-z}\geqslant 1-z,\quad\forall\, z\geqslant 0,\Rightarrow\\&\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}\geqslant 1-2\alpha\tau,\ 0<\mathrm{e}^{-\alpha\tau}<1,\end{aligned} \tag{30}$$

于是有

$$\begin{aligned}&-\frac{\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}(\mu_{\mathrm{a}}+\alpha)+\mathrm{e}^{-\alpha\tau}\mu_{\mathrm{b}}}{\gamma_1+\gamma_2}\geqslant\\&\frac{-(1-2\alpha\tau)(\mu_{\mathrm{a}}+\alpha)-|\mu_{\mathrm{b}}|}{\gamma_1+\gamma_2}.\end{aligned} \tag{31}$$

解不等式

$$0<\tau\leqslant\frac{-(1-2\alpha\tau)(\mu_{\mathrm{a}}+\alpha)-|\mu_{\mathrm{b}}|}{\gamma_1+\gamma_2}, \tag{32}$$

可得

$$0<\tau\leqslant-\frac{\mu_{\mathrm{a}}+|\mu_{\mathrm{b}}|+\alpha}{\gamma_1+\gamma_2-2\alpha^2-2\alpha\mu_{\mathrm{a}}}. \tag{33}$$

由上述分析可知, 式(25)成立意味着式(26)成立. 因而, 当存在常数$\alpha>0$满足判定条件(25)时系统(1)对于子系统之间的任意切换都是指数稳定的, 且具有收敛速度α.

证毕.

5 算例(Example)

5.1 例1(Example 1)

考虑系统(1), 并且$\tau=0.2$, $\sigma(t)=1,2$, 即系统在两个子系统之间进行切换, 其中:

$$A_1=\begin{bmatrix}-6&-0.2\\0&-4\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}-5&0\\0.3&-3\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}0.2&-0.2\\0&-0.25\end{bmatrix},\ B_2=\begin{bmatrix}0&0.15\\-0.3&0.1\end{bmatrix},$$

取$\alpha=1.4$, 经计算可得

$$\begin{cases}\mu_{\mathrm{a}}+|\mu_{\mathrm{b}}|+\alpha=-1.3676<0,\\ \gamma_1+\gamma_2-2\alpha^2-2\alpha\mu_{\mathrm{a}}=1.4772>0,\\ \tau=0.2\leqslant-\dfrac{\mu_{\mathrm{a}}+|\mu_{\mathrm{b}}|+\alpha}{\gamma_1+\gamma_2-2\alpha^2-2\alpha\mu_{\mathrm{a}}}=0.2134,\end{cases}$$

满足判定条件式(25). 因而由推论3可知对于子系统之间的任意切换, 给定切换系统是时滞依赖指数稳定的, 且收敛速度为$\alpha=1.4$.

5.2 例2(Example 2)[14]

其中系统参数为:

$$\tau=0.5,\ \sigma(t)=1,2,$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -5 & -0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ -1 & -5.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \ B_2 = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

取$\alpha = 0.85$, 解线性矩阵不等式(11)可得

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.3229 & 0.1076 \\ 0.1076 & 0.0611 \end{bmatrix} > 0,$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} 0.4743 & -0.1494 \\ -0.1494 & 0.1342 \end{bmatrix} > 0.$$

由推论1可知给定切换时滞系统是指数稳定的. 但是依据文献[14] 的判定方法仅能证明系统是渐近稳定的.

6 结论(Conclusion)

本文考虑了一类切换线性时滞系统的稳定性判定问题, 基于Lyapunov 函数方法和矩阵测度的概念, 分别给出了切换系统时滞独立以及时滞依赖的渐近稳定性和指数稳定性判定条件. 并给出了相应的镇定切换律的设计, 与以往的文献相比, 本文的判定条件简单易实现, 最后, 通过数值算例验证了所提算法的正确有效性.

参考文献(References):

[1] LIBERZON D, Morse A S. Basic problems in stability and design of switched systems[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1999, 19(5): 59 – 70.

[2] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*[M]. Boston, MA: Birkhauser, 2003.

[3] SUN Z D, GE S S. *Switched Linear Systems-Control and Design*[M]. New York: Springer Verlag, 2004.

[4] WICKS M, PELETIES P, DECARLO R. Switched controller synthesis for the quadratic stabilization of a pair of unstable linear systems[J]. *European Journal of Control*, 1998, 4(1): 140 – 147.

[5] BRABICKY M S. Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(4): 60 – 66.

[6] DAFFOUZ J, RIEDINGER P, IUNG C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: a switched Lyapunov function approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(11): 1883 – 1887.

[7] HESPANHA J P, MORSE A S. Stability of switched systems with average dwell-time[C] // *Proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, Phoenik, Arizona, USA: IEEE Press, 1999: 2655 – 2660.

[8] ZONG G D, WU Y Q. Exponential stability of discrete time perturbed impulsive switched systems[J]. *Acta Automatica, Sinica*, 2006, 32(2): 186 – 192.

[9] GUAN Z H, QIAN T H, YU X H. Controllability and observability of linear time-varying impulsive systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems, Part I*, 2002, 49(10): 1198 – 1208.

[10] CHENG D Z, GUO L, LIN Y D, WANG Y. Stabilization of switched systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(5): 661 – 666.

[11] KIM S CAMPBELL S A, LIU X Z. Stability of a class of linear switching systems with time delay[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I*, 2006, 53(2): 384 – 393.

[12] CHIOU J S. Stability analysis for a class of switched large-scale time-delay systems via time-switched method[J]. *IEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2006, 153(6): 684 – 688.

[13] XIE G M, WANG L. Quadratic stability and stabilization of discrete-time switched systems with state delay[C] // *Proceedings of the 43rd Conference on Decision and Control*. Paradise Island, Bahamas: [s.n.], 2004: 3235 – 3230.

[14] 孙洪飞, 赵军, 高晓东. 带有时滞摄动的险象切换系统的稳定性[J]. 控制与决策, 2002, 17(4): 431 – 434.
(SUN Hongfei, ZHAO Jun, GAO Xiaodong. Stability of linear switched systems with delayed perturbations[J]. *Control and Decision*, 2002, 431 – 434.)

[15] 陈武华, 关治洪, 卢小梅. 不确定离散时间马尔可夫切换时滞系统的保成本控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 21(4): 599 – 562.
(CHEN Wuhua, GUAN Zhihong, LU Xiaomei. Guaranteed cost control for uncertain discrete-time Markovian jumpsystems with mode-dependent time-delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 21(4): 599 – 562.)

[16] 宋政一, 赵军. 不确定时滞线性离散切换系统的鲁棒H_∞控制[J]. 自动化学报, 2006, 32(5): 760 – 766.
(SONG Zhengyi, ZHAO Jun. Robust H_∞ control for linear discrete-time switched systems with norm-Bounded uncertainties and time-delay[J]. *Acta Automatica, Sinica*, 2006, 32(5): 760 – 766.)

[17] MORI T, FUKUMA N, KUWAHARE M. On an estimate of the decay rate for stable linear delay systems[J]. *International Journal of Control*, 1982, 36(1): 95 – 97.

[18] SLOTINE J E, LI W P. 应用非线性控制[M]. 蔡自兴, 罗么亮, 译. 北京: 国防工业出版社, 1992.

[19] 吴方向. 不确定系统的鲁棒稳定性分析与鲁棒控制器设计方法研究[D]. 西安: 西北工业大学, 1998.

作者简介:

宗广灯 (1976—), 男, 博士, 副教授, 研究领域为切换系统控制、不确定时滞系统鲁棒控制、神经网稳定性分析等, E-mail: zonggdeng@yahoo.com.cn;

武玉强 (1962—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为变结构控制、非线性系统控制、混杂系统控制等, E-mail: wyq@qfnu.edu.cn;

徐胜元 (1968—), 男, 教授, 博士生导师, 研究领域为随机系统控制、广义系统控制、神经网稳定性分析等, E-mail: syxu02@yahoo.com.cn.