

基于量子位Bloch坐标的量子遗传算法及其应用

李盼池

(大庆石油学院 计算机与信息技术学院, 黑龙江 大庆 163318)

摘要: 提出了一种基于量子位Bloch坐标的量子遗传算法. 该方法用量子位构成染色体; 用量子位的Bloch坐标构成染色体上的基因位; 用量子旋转门进行染色体上量子位的更新; 用量子非门进行染色体变异. 对于量子旋转门的转角大小及方向的确定, 提出了一种简易快捷的新方法; 对旋转和变异操作, 提出了基于量子位Bloch坐标的新算子. 该算法将量子位的3个Bloch坐标都看作基因位, 每条染色体包含3条并列的基因链, 每条基因链代表1个优化解. 在染色体数目相同时, 可加速优化进程. 以函数极值优化和神经网络权值优化为例, 仿真结果表明该方法在搜索能力和优化效率两个方面优于普通量子遗传算法和简单遗传算法.

关键词: 量子遗传算法; Bloch球面坐标; 三基因链编码; 量子旋转门; 优化算法
中图分类号: TP183 **文献标识码:** A

Quantum genetic algorithm based on Bloch coordinates of qubits and its application

LI Pan-chi

(School of computer and information technology, Daqing petroleum institute, Daqing Heilongjiang 163318, China)

Abstract: A novel quantum genetic algorithm is proposed based on the Bloch coordinates of qubits. The chromosome is comprised of qubits whose Bloch coordinates comprise gene chain. The quantum chromosomes are updated by quantum rotation gates, and are mutated by quantum non-gates. For the size and direction of rotation angle of quantum rotation gates, a simple determining method is proposed. For the rotation and mutation of qubits, two new operators are constructed based on Bloch coordinates of qubits. In this algorithm, the Bloch coordinates of each qubit are regarded as three paratactic genes, each chromosome contains three gene chains, and each of gene chains represents an optimization solution, which can accelerate the convergence process for the same number of chromosomes. By two application examples of function extrema and neural network weights optimization, the simulation results show that the approach is superior to the common quantum genetic algorithm and the simple genetic algorithm in both search capability and optimization efficiency.

Key words: quantum genetic algorithm; Bloch coordinates; three gene chains encoding; quantum rotation gate; optimization algorithm

1 引言(Introduction)

量子计算是信息科学和量子力学相结合的新兴交叉学科, 自从1994年Shor 提出第1个求解大数质因子分解的量子算法^[1]和1996年Grover 提出随机数据库搜索的量子算法^[2]之后, 量子计算以其独特的计算性能引起了广泛瞩目, 迅速成为国际上研究的热点. 量子遗传算法(quantum genetic algorithm, QGA)是一种基于量子计算原理的概率优化算法, 具有种群规模小、收敛速度快、全局搜索能力强的优点, 现主要应用于组合优化问题^[3~5]. 目前的量子遗传算法主要存在如下问题. 首先, 通过测量量子位的状态获得二进制解, 这是一个概率操作过程,

具有很大的随机性和盲目性, 因此在种群进化的同时, 个体将不可避免地产生退化的可能; 其次, 二进制编码虽然适合于某些组合优化, 但对于连续优化, 由于需要频繁的解码操作, 无疑加大了计算量; 第三, 对于量子旋转门的转角方向, 目前几乎都是基于查询表, 由于涉及到多路条件判断, 影响了算法的效率; 对于转角大小, 现有方法对全部种群一视同仁, 没有考虑各染色体之间的差异; 第四, 目前量子遗传算法中的量子态是在实域 Hilbert 空间中平面单位圆周上的描述, 只有一个可变量, 并不是通常的Bloch球面描述, 量子特性被削弱. 基于以上问题, 本文提出一种基于Bloch球面坐标的量子遗传算

法(Bloch quantum genetic algorithm, BQGA). 用典型函数的极值优化和神经网络权值优化问题进行仿真, 并通过对普通量子遗传算法(common quantum genetic algorithm, CQGA)、简单遗传算法(simple genetic algorithm, SGA)进行对比, 结果验证了BQGA的有效性.

2 BQGA 基本原理(The principle of BQGA)

2.1 量子染色体的三链基因编码方案(Three chains encoding method for quantum chromosome)

在量子计算中, 最小信息单位用量子位表示. 量子位又称量子比特, 一个量子比特的状态可表示为

$$|\phi\rangle = \cos(\theta/2)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2)|1\rangle, \quad (1)$$

数 θ 和 φ 定义了Bloch球面上一点 P , 见图1所示.

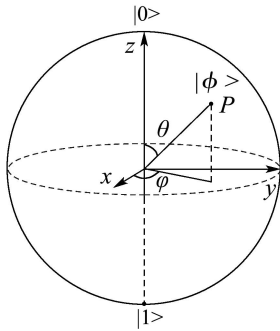


图1 量子比特的Bloch球面表示

Fig. 1 Bloch sphere representation of a qubit

由图1知, 任何量子位都与Bloch球面上一点对应. 因此, 量子位可以用Bloch球面坐标表示为 $|\phi\rangle = [\cos\varphi \sin\theta \sin\varphi \sin\theta \cos\theta]^T$. 在BQGA中, 直接采用量子位的Bloch球面坐标作为编码. 编码方案如下:

$$P_i = \begin{bmatrix} \cos\varphi_{i1} \sin\theta_{i1} \\ \sin\varphi_{i1} \sin\theta_{i1} \\ \cos\theta_{i1} \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \cos\varphi_{in} \sin\theta_{in} \\ \sin\varphi_{in} \sin\theta_{in} \\ \cos\theta_{in} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

其中: $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$. m 是种群规模, n 是量子位数. 在BQGA中, 将量子位的3个坐标看作3个并列的基因, 每条染色体包含3条并列的基因链, 每条基因链代表1个优化解. 因此, 每条染色体同时代表搜索空间中的如下3个优化解:

$$P_{ix} = (\cos\varphi_{i1} \sin\theta_{i1}, \dots, \cos\varphi_{in} \sin\theta_{in}), \quad (3)$$

$$P_{iy} = (\sin\varphi_{i1} \sin\theta_{i1}, \dots, \sin\varphi_{in} \sin\theta_{in}), \quad (4)$$

$$P_{iz} = (\cos\theta_{i1}, \dots, \cos\theta_{in}), \quad (5)$$

分别称为X解、Y解、Z解. 这种编码方式能扩展对搜索空间的遍历性, 加速优化进程, 具体表述为如下定理.

定理1 对于全局最优解中的每一个分量 x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, 在Bloch球面上存在3个相同半径的圆周 Cx, Cy, Cz , 3个圆周上的所有点表示的量子比特都与 x_i 对应(见图2).

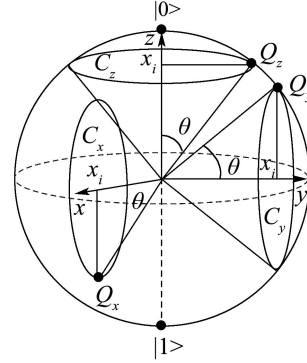


图2 最优解中 x_i 对应的Bloch球面上的3个圆周

Fig. 2 The three circles on the Bloch sphere corresponding to the x_i in global optimum solution

证 设全局最优解由解空间 Ω 映射到单位空间 $I^n = [-1, 1]^n$ 后为 $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. 不失一般性, 令 $x_i \geq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\varphi_0 = \pi/2$, $\theta_0 = \arccos x_i$.

在图2所示Bloch球面上取点 $Qz(\cos\varphi_0 \sin\theta_0, \sin\varphi_0 \sin\theta_0, \cos\theta_0)$, 则 Qz 的 z 坐标等于 x_i , 过 Qz 做垂直于 z 轴的圆周 Cz , 因Bloch球面上点的 z 坐标与 φ_0 无关, 故 Cz 上所有点的 z 坐标都等于 x_i .

在Bloch球面上取点 $Qy(\cos\varphi_0 \sin(\pi/2 - \theta_0), \sin\varphi_0 \sin(\pi/2 - \theta_0), \cos(\pi/2 - \theta_0))$, 则 Qy 的 y 坐标等于 x_i , 过 Qy 做垂直于 y 轴的圆周 Cy , 则 Cy 上所有点的 y 坐标都等于 x_i .

令 $\varphi_0 = 0$, 在Bloch球面上取点 $Qx(\cos\varphi_0 \sin(\pi/2 - \theta_0), \sin\varphi_0 \sin(\pi/2 - \theta_0), \cos(\pi/2 - \theta_0))$, 则 Qx 的 x 坐标等于 x_i , 过 Qx 做垂直于 x 轴的圆周 Cx , 则 Cx 上所有点的 x 坐标都等于 x_i .

由 Cx, Cy, Cz 的取法知, 半径均为 $\sin\theta_0$. 因为Bloch球面上任意一点均与一个量子比特对应, 所以, 以上3个圆周 Cx, Cy, Cz 上的所有点对应的量子比特都与 x_i 对应, 同理可证 $x_i < 0$ 的情形. 证毕.

值得指出, 在BQGA中, 伴随着最优解数目的扩充, 搜索空间也相应扩大了, 但量子机制的引入, 却能够使BQGA在扩大的搜索空间中更容易地获得全局最优解.

2.2 解空间变换(Solution space transform)

记优化问题的第 j 个变量 $X_j \in (a_j, b_j)$, 染色体 P_i 上第 j 个量子位为 $[x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}]^T$, 则相应解空间变换式为

$$X_{ix}^j = [b_j(1 + x_{ij}) + a_j(1 - x_{ij})]/2, \quad (6)$$

$$X_{iy}^j = [b_j(1 + y_{ij}) + a_j(1 - y_{ij})]/2, \quad (7)$$

$$X_{iz}^j = [b_j(1 + z_{ij}) + a_j(1 - z_{ij})]/2. \quad (8)$$

因此, 每条染色体对应优化问题的3个近似解. 以上 $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

$$U = \begin{bmatrix} \cos \Delta\varphi \cos \Delta\theta & -\sin \Delta\varphi \cos \Delta\theta & \sin \Delta\theta \cos(\varphi + \Delta\varphi) \\ \sin \Delta\varphi \cos \Delta\theta & \cos \Delta\varphi \cos \Delta\theta & \sin \Delta\theta \sin(\varphi + \Delta\varphi) \\ -\sin \Delta\theta & -\tan(\varphi/2) \sin \Delta\theta & \cos \Delta\theta \end{bmatrix}.$$

由

$$U = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\theta + \Delta\theta) \\ \sin(\varphi + \Delta\varphi) \sin(\theta + \Delta\theta) \\ \cos(\theta + \Delta\theta) \end{bmatrix}$$

知 U 的作用是使量子位在Bloch球面上产生了 $\Delta\varphi$ 和 $\Delta\theta$ 的相位旋转.

量子旋转门转角的确定至关重要, 直接影响到算法的收敛速度和效率. 其实旋转的目的是为使当前解逼近当前全局最优解, 仔细考察这两个解中量子位在Bloch球面上的位置关系不难得出如下结论.

定理 2 设 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 是当前搜索到的全局最优解中某量子位在Bloch球面上的坐标, $P_1(x_1, y_1, z_1)$ 是某个当前解中相应量子位的Bloch球面坐标, 记

$$A = \begin{vmatrix} x_0 & x_1 \\ y_0 & y_1 \end{vmatrix}, \quad (9)$$

$$B = z_0 - z_1. \quad (10)$$

1) $\Delta\varphi$ 的方向按如下规则选取: 当 $A \neq 0$ 时, 方向为 $\text{sgn}(\Delta\varphi) = -\text{sgn}(A)$; 当 $A = 0$ 时, 方向取正负均可. 2) $\Delta\theta$ 的方向按如下规则选取: 当 $B \neq 0$ 时, $\text{sgn}(\Delta\theta) = -\text{sgn}(B)$, 当 $B = 0$ 时, 方向取正负均可.

证 将 P_0, P_1 表示为三角函数形式:

$$P_0 = \begin{bmatrix} \cos \varphi_0 \sin \theta_0 \\ \sin \varphi_0 \sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}.$$

1)

$$A = \begin{vmatrix} \cos \varphi_0 \sin \theta_0 & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi_0 \sin \theta_0 & \sin \varphi \sin \theta \end{vmatrix} = \sin \theta_0 \sin \theta \sin(\varphi - \varphi_0),$$

2.3 量子染色体的更新(Quantum chromosome update)

本文提出如下量子旋转门更新量子位的相位:

因 $\theta_0 \in [0, \pi], \theta \in [0, \pi]$, 故 $\sin \theta_0 \sin \theta > 0$. 当 $A \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\Delta\varphi) &= -\text{sgn}(\varphi - \varphi_0) = \\ &= -\text{sgn}(\sin \theta_0 \sin \theta \sin(\varphi - \varphi_0)) = -\text{sgn}(A); \end{aligned}$$

当 $A = 0$ 时, $\sin \theta_0 \sin \theta = 0$ 或者 $\sin(\varphi - \varphi_0) = 0$. 若 $\sin \theta_0 \sin \theta = 0$, 则点 P_0, P_1 至少有一个位于Bloch球面的顶点 $|0\rangle$ 或顶点 $|1\rangle$, 此时, φ_0 或 φ 可取任意值, 故 $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ 取正负均可; 若 $\sin(\varphi - \varphi_0) = 0$, 则 $\varphi = \varphi_0$ 或 $|\varphi - \varphi_0| = \pi$, 故 $\text{sgn}(\Delta\varphi)$ 取正负均可.

2) 当 $B \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned} \text{sgn}(\Delta\theta) &= \text{sgn}(\theta_0 - \theta) = \\ &= -\text{sgn}(\cos \theta_0 - \cos \theta) = \\ &= -\text{sgn}(z_0 - z_1) = -\text{sgn}(B); \end{aligned}$$

当 $B = 0$ 时, 有 $\theta_0 = \theta$ 或 $|\theta_0 - \theta| = \pi$, 故 $\text{sgn}(\Delta\theta)$ 取正负均可. 证毕.

关于量子旋转门转角大小的确定, 文献[6]给出的策略是依据1个自变量为进化代数的负指数函数自适应调整, 实际上是一种转角随迭代步长单调下降的调整策略. 文献[7]虽然给出了1个范围 $(0.005\pi, 0.1\pi)$, 但没有给出具体选择的依据. 本文给出的策略是: 重点考虑目标函数在搜索点(单个基因链)处的变化趋势, 并把该信息加入到转角步长函数的设计中. 当搜索点处目标函数变化率较大时, 适当减小转角步长, 反之适当加大转角步长. 提出如下转角步长函数.

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{ij} &= \\ &= -\text{sgn}(A)\Delta\varphi_0 \exp\left(-\frac{|\nabla f(X_i^j)| - \nabla f_{j\min}}{\nabla f_{j\max} - \nabla f_{j\min}}\right), \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{ij} &= \\ &= -\text{sgn}(B)\Delta\theta_0 \exp\left(-\frac{|\nabla f(X_i^j)| - \nabla f_{j\min}}{\nabla f_{j\max} - \nabla f_{j\min}}\right). \quad (12) \end{aligned}$$

其中: A 的定义见式(9), B 的定义见式(10), $\Delta\varphi_0, \Delta\theta_0$ 为迭代初值, $\nabla f(X_i^j)$ 为评价函数 $f(X)$ 在点 X_i^j

处的梯度, $\nabla f_{j\max}$ 和 $\nabla f_{j\min}$ 分别定义为

$$\nabla f_{j\max} = \max \left\{ \left| \frac{\partial f(X_1)}{\partial X_1^j} \right|, \dots, \left| \frac{\partial f(X_m)}{\partial X_m^j} \right| \right\}, \quad (13)$$

$$\nabla f_{j\min} = \min \left\{ \left| \frac{\partial f(X_1)}{\partial X_1^j} \right|, \dots, \left| \frac{\partial f(X_m)}{\partial X_m^j} \right| \right\}. \quad (14)$$

其中 $X_i^j (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n)$ 为解空间中变量, 可根据最优解的类型, 在解空间变换的结果中确定为 $X_{ix}^j, X_{iy}^j, X_{iz}^j$ 三者之一. 对于离散优化问题, 由于 $f(X)$ 不存在梯度, 可以利用相邻两代的1阶差分代替梯度.

2.4 量子染色体的变异(Quantum chromosome mutation)

本文构造了如下变异算子:

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 1/\tan \theta & 0 \\ 1/\tan \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tan \theta \end{bmatrix}. \quad (15)$$

由

$$V = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2 - \varphi) \sin(\pi/2 - \theta) \\ \sin(\pi/2 - \varphi) \sin(\pi/2 - \theta) \\ \cos(\pi/2 - \theta) \end{bmatrix}$$

知, 该变异实际是量子位沿Bloch球面的一种幅度较大的旋转, 有助于突破早熟收敛, 增加种群的多样性.

3 仿真结果(Simulation result)

3.1 函数极值优化(The extremum optimization of function)

1) Goldstein-Price函数:

$$f(x, y) = [1 + (x + y + 1)^2(19 - 14x + 3x^2 - 14y + 6xy + 3y^2)][30 + (2x - 3y)^2(18 - 32x + 12x^2 + 48y - 36xy + 27y^2)], \quad (16)$$

其中: $|x| \leq 2, |y| \leq 2$. 该函数有4个局部极小值, 全局极小值为3. 当优化结果小于3.005时认为算法收敛.

2) Shubert函数:

$$f(x, y) = \left\{ \sum_{i=1}^5 i \cos[(i+1)x + 1] \right\} \left\{ \sum_{i=1}^5 i \cos[(i+1)y + 1] \right\} +$$

$$0.5[(x + 1.42513)^2 + (y + 0.80032)^2], \quad (17)$$

其中: $|x| \leq 10, |y| \leq 10$. 该函数有760个局部极小值, 全局最小值为-186.73090882259. 当优化结果小于-186.34时认为算法收敛.

下面考察BQGA, CQGA, SGA对上述两个函数的优化性能对比. 染色体数取50, 最大优化步数取500. BQGA参数: $\Delta\varphi_0 = \Delta\theta_0 = 0.01\pi, P_m = 0.05$; CQGA参数: $\Delta\theta = 0.01\pi$, 对于Goldstein-Price函数, 每个变量用18位二进制数表示, 左起第1位为符号位, 第2,3位为整数位, 第4~18位为小数位; 对于Shubert函数, 每个变量用25位二进制数表示, 左起第1位为符号位, 第2~5位为整数位, 第6~25位为小数位; SGA参数: 交叉概率 $P_c = 0.8$, 变异概率 $P_m = 0.05$, 染色体采用实数编码. 为使适应度函数的最大值为1, 构造如下适应度函数 $\text{fit}(x, y) = 1 + f_{\min} - f(x, y)$, 其中 $f_{\min}$ 为函数的全局最小值. 分别用BQGA, CQGA, SGA进行10次优化, 结果对比见表1、表2.

表1 Goldstein-Price函数优化结果对比(10次优化)

Table 1 The comparison of optimization results on Goldstein-Price function(10 optimizations)

算法	最优结果	最差结果	平均结果	收敛次数	平均时间/s
BQGA	3.0001	3.0034	3.0012	10	0.67487
CQGA	3.0525	3.1794	3.1186	0	6.90190
SGA	3.0149	3.0761	3.0385	0	0.82208

表2 Shubert函数优化结果对比(10次优化)

Table 2 The comparison of optimization results on Shubert function(10 optimizations)

算法	最优结果	最差结果	平均结果	收敛次数	平均时间/s
BQGA	-186.54	-186.31	-186.46	9	1.7344
CQGA	-184.70	-179.76	-182.37	0	9.6965
SGA	-185.94	-183.95	-185.08	0	1.8525

由表1、表2可知, 就优化结果和运行时间而言, BQGA是最好的, 其次是SGA, 最差的是CQGA. 在BQGA中, 三链基因编码的使用提高了寻优能力, 而变异算子可使算法避免陷入局部最优解, 使BQGA有较好的优化性能, 尽管每条染色体包含3条基因链, 但由于没有选择、交叉和复制运算, 所以平均运行时间略低于SGA. 在CQGA中, 由于涉及到频繁的二进制解码运算, 因此平均运行时间最长; 同时可以看出, 由于该算法使用基于概率

运算的二进制编码, 因此主要适用于组合优化, 而对于连续优化效果并不理想。

3.2 神经网络权值优化(Optimizing of the neural network weights)

本实验用3层前馈神经网络作为分类器, 用BQGA优化网络权值, 实现手写体汉字识别问题. 应用本算法笔者实际处理了2个手写体汉字, “优”和“伏”. 两个汉字分别由15个不同层次的人员书写, 共得2类30个字模样本. 根据图象数据二值化思想, 字模样本编码方法为: 将每个字模处理成 $A_{8 \times 8}$ 点阵, 用向量 $X = (x_{8i+j})^T$ 存储, 依据点阵的颜色, 向量对应维的值置1或0. 选取每类汉字的前10个数据作为训练集, 用于提取每类样本的模式信息, 余下的5个作为测试集, 用来检验网络的泛化能力. BQGA算法及神经网络分类器参数见表3.

表3 BQGA算法及神经网络分类器参数
Table 3 The parameters of BQGA and neural network classifier

L_1	L_2	L_3	n	m	P_m	$\Delta\varphi_0$	$\Delta\theta_0$	E	G
64	5	1	325	50	0.05	0.01π	0.01π	0.5	100

表3中参数说明: L_1 为输入节点; L_2 为隐层节点; L_3 为输出节点; n 为权值(量子位)数; m 为种群规模; P_m 为变异概率; $\Delta\varphi_0$, $\Delta\theta_0$ 为转角初值; E 为限定误差; G 为限定代数.

CQGA采用二进制编码, 每个权值用15位二进制数表示, 左起第1位为符号位, 2~5位为整数部分, 6~15位为小数部分, 转角步长 $\Delta\theta = 0.01\pi$; SGA采用实数编码, 交叉概率 $P_c = 0.8$, 变异概率 $P_m = 0.05$. CQGA和SGA的其他参数同BQGA. 适应度函数取为 $\exp(-Error)$, 其中 $Error$ 为网络输出误差, 当 $Error < 0.5$ 时认为算法收敛. 每种算法运行10次, 优化结果对比见表4.

本实验需要同时优化325个变量. 由表4可知, 对于高维优化问题, BQGA的优化性能同样是最好的, 不仅平均误差最小, 而且运行时间也是最少的. 同时值得指出, 对于模式识别问题, CQGA也表现出良好的优化能力, 其优化结果优于SGA; 但由于采用二进制编码, 使运行时间过长, 从而降低了效率. 将训练好的网络用于测试集字模样本识别, BQGA的正确识别率高达100%, 而CQGA和SGA的正确识别率分别为80%和60%. 可见BQGA对于处理高维优化的模式识别问题具有较大的潜力.

表4 神经网络权值优化结果对比(10次优化)

Table 4 The comparison of optimization results of neural network weights (10 experiments)

算法	最小误差	最大误差	平均误差	收敛次数	平均时间/s
BQGA	0.02712	0.04663	0.03519	10	20.71
CQGA	0.07386	0.23618	0.16972	10	99.96
SGA	0.22661	0.30290	0.26311	10	21.83

4 结论 (Conclusion)

量子遗传算法是量子计算与遗传算法相结合的产物, 目前作为一个新兴的研究方向, 而倍受国内外学者关注. 本文提出了一种新颖的量子遗传算法, 采用量子位的Bloch坐标作为基因编码, 将染色体上量子位的3组坐标值都视为代表寻优结果的基因链. 以含2个变量的函数极值优化和用于手写体汉字识别的神经网络分类器权值优化为例, 并与其他算法对比, 仿真结果表明BQGA在搜索能力和优化效率两个方面优于CQGA和SGA.

参考文献(References):

- [1] SHOR P W. Algorithms for quantum computation: Discrete logarithms and factoring[C]//*Proceedings of the 35th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*. New York, USA: IEEE Computer Society Press, 1994, 11: 124 – 134.
- [2] GROVER L K. A fast quantum mechanical algorithm for database search[C]//*Proceedings of the 28th annual ACM Symposium on Theory of Computing*. New York, USA: ACM Press, 1996, 6: 212 – 219.
- [3] NARAYANAN A, MOORE M. Quantum inspired genetic algorithm[C]//*Proceedings of IEEE International Conference on Evolutionary Computation*. New York, USA: IEEE Press, 1996, 5: 61 – 66.
- [4] HAN K H, KIM J H. Quantum-inspired evolutionary algorithm for a class of combinatorial optimization[J]. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 2002, 16(6): 580 – 593.
- [5] HAN K H, KIM J H. Genetic quantum algorithm and its application to combinatorial optimization problem[C]//*Proceedings of the 2000 Congress on Evolutionary Computation*. New York, USA: IEEE Press, 2000, 7: 1354 – 1360.
- [6] 张葛祥, 李娜, 金炜东等. 一种新量子遗传算法及其应用[J]. 电子学报, 2004, 32(3): 476 – 479.
(ZHANG Gexiang, LI Na, JIN Weidong, et al. A novel quantum genetic algorithm and its application[J]. *Acta Electronica Sinica*, 2004, 32(3): 476 – 479.)
- [7] YANG J A, LI B, ZHUANG Z Q. Multi-universe parallel quantum genetic algorithm its application to blind-source separation[C]//*Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks & Signal Processing*. New York, USA: IEEE Press, 2003, 12: 393 – 398.

作者简介:

李盼池 (1969—), 男, 副教授, 博士研究生, 研究方向为量子优化算法, E-mail: lipanchi@vip.sina.com.