第 25 卷第 6 期
2008 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 25 No. 6
Dec. 2008

文章编号: 1000−8152(2008)06−1131−04

关于线性中立型时滞系统稳定性代数准则的一个注记

岳喜顺, 李远清

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究了线性时滞中立型微分系统的渐近稳定性, 基于系统的特征方程, 利用恰当的模矩阵、谱半径和矩阵乘法公式导出了新的时滞无关的稳定性准则, 例子表明所给准则的有效性和较低的保守性.

关键词: 中立型系统; 渐近稳定性; 时滞无关; 代数准则; 谱半径

中图分类号: O231, TP13 **文献标识码**: A

A note on the algebraic stability criterion for linear neutral systems with time-delay

YUE Xi-shun, LI Yuan-qing

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology, Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: The asymptotic stability of linear neutral systems with time-delay is considered. Based on the characteristic equation of the corresponding system, new delay-independent stability criteria are obtained in terms of the modulus matrix, the spectral radius and formula of matrix multiplication. Numerical examples show the validity and lower conservativeness of our results.

Key words: neutral system; asymptotic stability; delay independent; algebraic criteria; spectral radius

1 引言(Introduction)

由于在自动控制、化工和电子等系统中均存在时滞现象, 因此具有时滞的动力系统研究日益引起人们的重视. 在线性中立型时滞系统的稳定性研究方面, 采用的方法主要是频域分析方法或者Lyapunov泛函方法[1], 探讨时滞相关稳定性和时滞无关稳定性. 关于时滞相关稳定性可参见文[2]及其引文, 本文则致力于时滞无关稳定性研究.

频域分析方法适用于常时滞线性系统稳定性研究. 基于线性系统的特征方程, 文[3∼5]导出了线性中立型时滞系统的稳定性准则, 但这些准则均要求系统矩阵具有负的矩阵测度. J.H.Park和S.Won[6]利用适当的模矩阵的谱半径提出了一个渐近稳定的充分性准则, 该准则仅要求系统矩阵为Hurwitz矩阵. 根据系数矩阵的结构特征, 文[7, 8]利用适当的模矩阵的谱半径导出了渐近稳定的新的充分性准则, 在很大程度上改善并降低了保守性，其中文[7]的结果合更为细致. 文[9]则进一步改进了文[7,8]的结果. 本文在文[7∼9]的基础上, 利用矩阵乘法公式, 获得了中立型线性系统渐近稳定的进一步结果. 与已有的准则相比, 本文准则不仅具有较低的保守性, 而且在很大程度上扩大了准则的适用范围, 扩大了稳定参数域.

2 系统描述和准备(System description and preliminary)

考虑线性中立型时滞微分系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-\tau)+C\dot{x}(t-\tau), \\ x_0(\theta)=\phi(\theta),\ -\tau\leqslant\theta\leqslant 0, \end{cases} \tag{1}$$

式中: $x\in\mathbb{R}^n$是系统在时刻t的状态矢量, $A,B,C\in\mathbb{R}^{n\times n}$是给定的常数矩阵, $\phi(\theta)\in\mathbb{R}^n$是给定的连续矢量初值函数, $\tau>0$是系统滞后时间, 假定系统矩阵A是Hurwitz矩阵.

系统(1)的特征方程为

$$h(s)\equiv\det[sI-A-(B+sC)\exp(-s\tau)]=0, \tag{2}$$

式中$h(s)$是系统(1)的特征函数.

为了叙述方便, 对于系统(1), 记

收稿日期: 2007−01−09; 收修改稿日期: 2008−01−08.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60475004); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET–04–0816).

$$W = CA + B,\ R = AC + B. \tag{3}$$

现对文中使用的记号说明如下: 对于n阶方阵A, 用$\lambda_i (i = 1, 2, \cdots, n)$表示$A$的第$i$个特征值; $\rho(A) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} |\lambda_i(A)|$表示矩阵$A$的谱半径. $|A| = [|a_{ij}|]$是A的模矩阵; $A \leqslant B$表示矩阵A和B的元素满足不等式$a_{ij} \leqslant b_{ij}$. 对于矩阵A, $\lambda_{\max}(A)$和$\lambda_{\min}(A)$分别表示A的最大和最小特征值; A^*表示矩阵A的共轭转置矩阵. $\|A\|(\equiv \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)})$和$\mu(A)(\equiv \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A + A^*))$分别表示矩阵$A$的谱模和矩阵测度, I表示适当维数的单位矩阵, Re(s)表示复数s的实部.

为完成本文结论的证明, 需要如下引理.

引理 1[13] 对n阶方阵R, T和V, 如果$|R| < V$, 则

i) $|RT| \leqslant |R||T| \leqslant V|T|$;

ii) $|R + T| \leqslant |R| + |T| \leqslant V + |T|$;

iii) $\rho(R) \leqslant \rho(|R|) \leqslant \rho(V)$;

iv) $\rho(RT) \leqslant \rho(|R||T|) \leqslant \rho(V|T|)$;

v) $\rho(R + T) \leqslant \rho(|R| + |T|) \leqslant \rho(V + |T|)$.

引理 2[7,9] 中立型时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果A是Hurwitz矩阵, $\rho(C) < 1$, 且

$$\sup \rho[F(s)(I - \xi(s)C)^{-1}W\xi(s)] < 1, \forall\, \mathrm{Re}(s) \geqslant 0,$$

其中: $F(s) = (sI - A)^{-1}$, $\xi(s) = \exp(-s\tau)$, 矩阵W由式(3)定义.

引理 3[7,9] 中立型时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果A是Hurwitz矩阵, $\rho(C) < 1$, 且

$$\sup \rho[F(s)R(I - \xi(s)C)^{-1}\xi(s)] < 1, \forall\, \mathrm{Re}(s) \geqslant 0,$$

其中: $F(s) = (sI - A)^{-1}$, $\xi(s) = \exp(-s\tau)$, 矩阵R由式(3)定义.

引理 4[13] 对n阶方阵U, 如果$\rho(U) < 1$, 则$(I-U)^{-1}$存在, 且

$$(I - U)^{-1} = I + U + U^2 + \cdots, \tag{4}$$

引理 5 对n阶方阵U, 如果$\rho(U) < 1$, 则对任意正整数k有

$$(I - U)^{-1} = \sum_{j=0}^{k} U^j + U^{k+1}(I - U)^{-1} = \sum_{j=0}^{k} U^j + (I - U)^{-1}U^{k+1}, \tag{5}$$

证 重复利用公式

$$(I - U)^{-1} = I + U(I - U)^{-1} = I + (I - U)^{-1}U,$$

即可得证.

3 主要结果(Main results)

由矩阵$F(s) = (sI - A)^{-1}$元的最大模构成的矩阵定义为

$$F_m = [\max_{\mathrm{Re}(s)\geqslant 0} |f_{ij}(s)|]. \tag{6}$$

由于系统矩阵A是Hurwitz矩阵, 根据最大模定理, F_m存在, 且在虚轴上达到. 引进记号:

$$H_w(m,k) \equiv \sum_{l=0}^{(k+1)m-1} |C^l W| + |(I - |C^m|)^{-1}| \cdot (\sum_{j=0}^{m-1} |C^{j+(k+1)m}W|), \tag{7}$$

$$H_r(m,k) \equiv \sum_{l=0}^{(k+1)m-1} |RC^l| + (\sum_{j=0}^{m-1} |RC^{j+(k+1)m}|) \cdot |(I - |C^m|)^{-1}|. \tag{8}$$

定理 1 中立型时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果:

i) A是Hurwitz矩阵;

ii) 存在整数$m \geqslant 1$, 使得$\rho(|C^m|) < 1$;

iii) 存在整数$k > 0$使得$\rho[F_m H_w(m,k)] < 1$, 其中矩阵$H_w(m,k)$由式(7)定义.

证 根据条件$\rho(|C^m|) < 1$和引理1之iii), 有$\rho(C^m) \leqslant \rho(|C^m|) < 1$. 注意到$\rho^m(C) = \rho(C^m)$, 所以有$\rho(C) < 1$. 对于任意

$$\mathrm{Re}(s) \geqslant 0, |\xi(s)| = |\exp(-s\tau)| \leqslant 1,$$
$$|\xi^m(s)| = |\xi(s)|^m \leqslant 1,$$

所以

$$\rho(\xi(s)C) \leqslant \rho(C) < 1,\ \rho(\xi^m(s)C^m) \leqslant \rho(C^m) < 1.$$

因此由引理4知$(I - \xi(s)C)^{-1}$, $(I - \xi^m(s)C^m)^{-1}$存在, 其次从乘法公式

$$I - \xi^m(s)C^m = (I - \xi(s)C)(\sum_{j=0}^{m-1} \xi^j(s)C^j) = (\sum_{j=0}^{m-1} \xi^j(s)C^j)(I - \xi(s)C),$$

得知

$$(I - \xi(s)C)^{-1} = (I - \xi^m(s)C^m)^{-1}(\sum_{j=0}^{m-1} \xi^j(s)C^j).$$

应用引理2, 中立型时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果对任意

$$\mathrm{Re}(s) \geqslant 0, \sup\rho[F(s)(I - \xi(s)C)^{-1}W\xi(s)] < 1,$$

亦即

$$\sup \rho[F(s)(I - \xi^m(s)C^m)^{-1} \cdot (\sum_{j=0}^{m-1} \xi^j(s)C^j)W\xi(s)] < 1,$$

再根据引理1,

$$\sup\rho[F(s)(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}\cdot(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^j(s)C^j)W\xi(s)]\leqslant \sup\rho[|F(s)||(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}\cdot(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^j(s)C^j)W\xi(s)|].$$

从引理1、引理4和引理5可知: 对任意$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$有

$$|(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^j(s)C^j)W\xi(s)|=$$
$$|(\sum_{l=0}^{k}\xi^{lm}(s)C^{lm}+(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}\cdot \xi^{(k+1)m}(s)C^{(k+1)m})(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^j(s)C^j)W|=$$
$$|\sum_{l=0}^{(k+1)m-1}\xi^l(s)C^lW+(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}\cdot(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^{j+(k+1)m}(s)C^{j+(k+1)m})W|\leqslant$$
$$\sum_{l=0}^{(k+1)m-1}|C^lW|+|(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}\cdot(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^{j+(k+1)m}(s)C^{j+(k+1)m})W|\leqslant$$
$$\sum_{l=0}^{(k+1)m-1}|C^lW|+|(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}|\cdot(\sum_{j=0}^{m-1}|C^{j+(k+1)m}W|)\leqslant$$
$$\sum_{l=0}^{(k+1)m-1}|C^lW|+|(I-|C^m|)^{-1}|\cdot(\sum_{j=0}^{m-1}|C^{j+(k+1)m}W|),$$

因此,

$$\sup\rho[F(s)(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^j(s)C^j)W\xi(s)]\leqslant \sup\rho[|F(s)|H_w(m,k)]\leqslant\rho[F_mH_w(m,k)].$$

这样，对于任意$\mathrm{Re}(s)\geqslant 0$有

$$\sup\rho[F(s)(I-\xi(s)C)^{-1}W\xi(s)]\leqslant\rho[F_mH_w(m,k)],$$

所以当$\rho[F_mH_w(m,k)]<1$时，引理2的条件得到满足, 系统(1)是渐近稳定的.　　证毕.

注 1　本文用更一般的条件$\rho(|C^m|)<1$取代现有的稳定性准则条件$\|C\|<1$, 或$\rho(|C|)<1$或$\rho(|C^2|)<1$, 从而很大程度上降低了保守性, 扩大了适用范围. 例如, 对矩阵$C=\begin{bmatrix}-0.5 & -0.5\\ 1.2 & 1.2\end{bmatrix}$. 有$\rho(C)=0.7<1$, $\|C\|=1.8385>1$, $\rho(|C|)=1.7>1$, $\rho(|C^2|)=1.19>1$, $\rho(|C^3|)=0.833<1$.

注 2　对任意整数$k\geqslant 0$, 有$H_w(m,k+1)\leqslant H_w(m,k)$. 这是因为

$$H_w(m,k+1)-H_w(m,k)=\sum_{l=(k+1)m}^{(k+2)m-1}|C^lW|+(I-|C^m|)^{-1}\cdot\sum_{j=0}^{m-1}(|C^mC^{j+(k+1)m}W|-|C^{j+(k+1)m}W|)\leqslant$$
$$\sum_{l=0}^{m-1}|C^{l+(k+1)m}W|+(I-|C^m|)^{-1}(|C^m|-I)\cdot\sum_{j=0}^{m-1}|C^{j+(k+1)m}W|=0.$$

注 3　文 [9] 在条件 $\rho(|C^2|)<1$ 下建立的准则要求$\rho[F_m\overline{H}(k)]<1$. 式中

$$\overline{H}(k)\equiv\sum_{j=0}^{2k+1}|C^jW|+(I-|C^2|)^{-1}(|C^{2k+2}W|+|C^{2k+3}W|).$$

令$m=4$, 当$\rho(|C^2|)<1$时, 必有$\rho(|C^4|)<1$, 且

$$H_w(m,k)-\overline{H}(k)=\sum_{j=2k+2}^{4k+3}|C^jW|+(I-|C^4|)^{-1}(\sum_{j=0}^{3}|C^{j+4(k+1)}W|)-(I-|C^2|)^{-1}(|C^{2k+2}W|+|C^{2k+3}W|)\leqslant$$
$$(I+|C^2|+\cdots+|C^2|^k)(|C^{2k+2}W|+|C^{2k+3}W|)+(I-|C^4|)^{-1}(\sum_{j=0}^{3}|C^{j+4(k+1)}W|)+(I-|C^2|)^{-1}(|C^{2k+2}W|+|C^{2k+3}W|)\leqslant$$
$$(I-|C^4|)^{-1}(I+|C^2|)(|C^{4k+4}W|+|C^{4k+5}W|)-(I-|C^2|)^{-1}|C^2|^{k+1}(|C^{2k+2}W|+|C^{2k+3}W|)\leqslant$$
$$(I-|C^2|)^{-1}|C^2|^{k+1}(|C^{2k+2}W|+|C^{2k+3}W|)-(I-|C^2|)^{-1}|C^2|^{k+1}(|C^{2k+2}W|+|C^{2k+3}W|)=0.$$

因此，当$\rho(|C^2|)<1$时，本文的定理较文[9]具有更低的保守性.

根据引理3, 与定理1证明类似, 可得到

定理 2　中立型时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果:

i) A是Hurwitz矩阵;

ii) 存在整数$m\geqslant 1$, 使得$\rho(|C^m|)<1$;

iii) 存在整数$k>0$使得$\rho[F_mH_r(m,k)]<1$. 其中矩阵$H_r(m,k)$由式(8)定义.

注意到

$$|F(s)(I-\xi^m(s)C^m)^{-1}(\sum_{j=0}^{m-1}\xi^j(s)C^j)W\xi(s)|\leqslant |F_m|(I-|C^m|)^{-1}(\sum_{j=0}^{m-1}|C^jW|).$$

同定理1的证明可得

推论 1　中立型时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果:

i) A是Hurwitz矩阵;

ii) 存在整数$m \geqslant 1$, 使得$\rho(|C^m|) < 1$;

iii) $\rho[|F_m|(I-|C^m|)^{-1}(\sum\limits_{j=0}^{m-1}|C^jW|)] < 1$.

同样地, 有

推论 2 中立型时滞系统(1)是渐近稳定的, 如果

i) A是Hurwitz矩阵;

ii) 存在整数$m \geqslant 1$, 使得$\rho(|C^m|) < 1$;

iii) $\rho[|F_m|(\sum\limits_{j=0}^{m-1}|RC^j|)(I-|C^m|)^{-1}] < 1$.

4 数值算例(Numerical examples)

a) 考虑中立型系统(1), 其系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\alpha\begin{bmatrix}0.2 & 0.1\\ 0.15 & 0.08\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}0.5 & -0.6\\ 0.4 & -0.65\end{bmatrix},$$

其中α是不确定参数.

易知$\|C\| = 1.0892 > 1$且$\rho(|C|) = 1.0706 > 1$, 矩阵A是Hurwitz稳定的, 并且

$$\rho(C) = 0.3760 < 1, \rho(|C^2|) = 0.2096 < 1,$$

文[9]确定的参数α稳定域为: $k=0$时, $9.4765 \leqslant \alpha \leqslant 12.6124$, $k=1$时, $9.2017 \leqslant \alpha \leqslant 12.7982$. 利用本文定理1, 令$m=4$可得参数$\alpha$的稳定域为: $k=0$时, $8.0613 \leqslant \alpha \leqslant 13.4178$, $k=1$时, $8.0606 \leqslant \alpha \leqslant 13.4181$. 所得结论已经有所改善.

b) 其次, 考虑中立型系统(1), 其系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-3 & -2\\ 1 & 0\end{bmatrix}, B=\alpha\begin{bmatrix}-0.193 & -0.137\\ 0.353 & 0.18\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}-0.7 & -0.15\\ 0.9 & -0.83\end{bmatrix}.$$

其中α是不确定参数.

由于$\mu(A) = 0.0081 > 0$, 文[3 ~ 5]的稳定性准则不适用. 另一方面, $\|C\| = 1.3084 > 1$且

$$\rho(|C|) = 1.1381 > 1, \rho(|C^2|) = 1.0253 > 1,$$

文[6~9]给出的稳定性准则以及基于Lyapunov泛函的结果[10~12]均不适用. 利用矩阵A的Hurwitz性质, 并且$\rho(C) = 0.8462 < 1, \rho(|C^3|) = 0.7539 < 1$,

$$F_m = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 6\\ 3 & 9\end{bmatrix}.$$

根据定理1, 取$m=3$, 得到参数α稳定域为: $k=0$时, $9.85465 \leqslant \alpha \leqslant 10.32716$, $k=1$时, $9.79476 \leqslant \alpha \leqslant 10.38197$.

5 结论(Conclusion)

本文基于中立型时滞系统稳定性研究的频域分析技术，利用矩阵乘法公式和适当的模矩阵之谱半径建立了系统渐近稳定的充分条件准则. 与已有的稳定性准则相比较, 新准则给出的充分性条件除了不要求系统矩阵具有负的矩阵测度外, 还大大减弱了对系数矩阵C的限制, 从而降低了准则的保守性, 扩大了准则的适用范围, 数值例子表明该准则的有效性和较低的保守性.

参考文献(References):

[1] HALE J, VERDUYN LUNEL S M. *Introduction to Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[2] ZHONG R X, YANG Z, WANG G L. On delay-dependant robust stability of neutral systems[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2006, 4(2): 181 – 186.

[3] LI L M. Stability of linear neutral delay differential systems[J]. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, 1988, 38(3): 339 – 334.

[4] HU G D, HU G D. Some simple stability criteria of neutral delay differential systems[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 1996, 80(2 – 3): 257 – 271

[5] BELLEN A, GUGLIELMI N, RUEHLI A E. Methods for linear systems of circuit delay fifferential equations of neutral type[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Applications*, 1999, 46(1): 212 – 216.

[6] PARK J H. WON S. A note on stability of neutral delay differential systems[J]. *Journal of the Franklin Institute*, 1999, 336(3): 543 – 548.

[7] CAO D G, HE P. Stability criteria of linear neutral systems with a single delay[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, 148(1): 135 – 143.

[8] 刘秀湘, 胥布工. 基于频域的线性中立型时滞系统的稳定性准则[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2004, 32(9): 10 – 12.
(LIU Xiuxiang, XU Bugong. A stability criterion for linear neutral delay systems based on frequency domain[J]. *Journal of South China University of Technology(Natural Science Edition)*, 2004, 32(9): 10 – 12.)

[9] 梁忠英. 线性中立型时滞系统稳定性的代数准则[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2005, 28(6): 646 – 649.
(LIANG Zhongying. Algebraic criteria for stability of linear neutral delay systems[J]. *Journal of Sichuan Normal University(Natural Science Edition)*, 2005, 28(6): 646 – 649.)

[10] LIEN C H, YU K W, HSIEH J G. Stability conditions for a class of neutral systems with multiple time delays[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2000, 245(1): 20 – 27.

[11] NICULESCU S I. On delay-dependent stability under model transformations of some neutral linear systems[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(6): 609 – 617.

[12] PARK J H. A new delay-dependent criterion for neutral systems with multiple delays[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2001, 136(1 – 2): 177 – 184.

[13] LANCASTER P, TISMENETSKY M. *The Theory of Matrces*[M]. Orlando, Florida: Academic Press, 1985.

作者简介:

岳喜顺 (1965—), 男, 华南理工大学自动化科学与工程学院副教授，博士, 硕士生导师, 目前研究方向为时滞系统、大系统优化与控制、定性与稳定性理论, E-mail: auxsyue@scut.edu.cn;

李远清 (1966—), 男, 华南理工大学自动化科学与工程学院教授, 博士, 博士生导师, 目前研究方向为广义系统、神经网络、盲信号处理.