第 26 卷第 2 期
2009 年 2 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 2
Feb. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)02−0189−04

随机混沌时滞神经网络的指数同步

张 皓[1], 严怀成[2], 陈启军[1]

(1. 同济大学 控制科学与工程系, 上海 200092; 2. 香港中文大学 电子工程学系, 香港 999077)

摘要: 研究受随机扰动且具有时变时滞神经网络的指数同步. 根据Lyapunov稳定性理论结合线性矩阵不等式技巧, 通过构造含时滞的状态反馈控制器, 使得受到随机扰动的驱动系统和响应系统达到指数同步, 给出了随机时滞神经网络指数同步的新判据, 最后通过仿真验证了所用方法的有效性.

关键词: 指数同步; 随机扰动; 李雅普诺夫函数; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Exponential synchronization of stochastic perturbed chaotic neural networks with time-delay

ZHANG Hao[1], YAN Huai-cheng[2], CHEN Qi-jun[1]

(1. Department of Control Science and Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;
2. Department of Electronic Engineering, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong, China)

Abstract: The exponential synchronization problem is investigated for a class of stochastic perturbed chaotic neural networks with time- delay. Based on the Lyapunov stability theory and the LMI technique, a time-delay feedback controller is developed to guarantee the exponential synchronization between the driving and driven neural network. New criteria is proposed for verifying the exponential synchronization between stochastic neural networks with time-delay. Finally, an example is provided to demonstrate the effectiveness and applicability of the proposed design approach.

Key words: exponential synchronization; stochastic perturbation; Lyapunov function; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

神经网络是一种特殊结构的动力系统, 它已被成功地应用到很多领域, 如信号处理、非线性代数微分方程的求解. 由于系统常常受到随机因素的干扰以及系统本身存在时滞, 应用必须建立在神经网络系统的稳定性之上, 因此对随机时滞神经网络稳定性的研究从理论到应用都有很多结果[1~4]. 目前研究发现当网络的参数和时滞取合适的数值时, 时滞神经网络(DNNs)会呈现出复杂的动力学行为, 甚至出现混沌现象[6]. 自1900年Pecora和Carroll提出著名的PC[5]同步以来, 人们已提出主动−被动同步法、耦合同步法、自适应同步法等. 本文对一类受到随机扰动的时滞神经网络的同步问题进行了研究, 设计了时滞状态反馈控制器, 保证受到随机扰动的时滞神经网络指数同步.

记$(\Omega, \mathbb{F}, \{\mathbb{F}_t\}_{t\geqslant 0}, \mathscr{P})$是具有自然滤波$\{\mathbb{F}_t\}_{t\geqslant 0}$的完备概率空间, $\omega(t)$是该空间上的l维布朗运动. 初值函数$\phi \in \big(\mathscr{C}^2_{\mathbb{F}_0}[-\tau, 0]; \mathbb{R}^n\big)$, 这里$\big(\mathscr{C}^2_{\mathbb{F}_0}[-\tau, 0]; \mathbb{R}^n\big)$表示由$\mathbb{R}^n$值的随机过程$\xi(s)$组成的随机过程族, $\xi(s)$是$\mathbb{F}_0$可测且$\int_{-\tau}^{0} \mathcal{E}|\xi(s)|^2 \mathrm{d}s < \infty$. 这里$\mathcal{E}\{\cdot\}$表示相应于给定概率测度$\mathscr{P}$的数学期望算子. 现考虑驱动系统表达式

$$\mathrm{d}x_i(t) = [-c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} f_j(x_j(t-\tau(t)))]\mathrm{d}t, \tag{1}$$

其中$i = 1, \cdots, n$. 可以把式(1)写成矩阵方程的形式

$$\mathrm{d}x(t) = [-Cx(t) + Af(x(t)) + Bf(x(t-\tau(t)))]\mathrm{d}t, \tag{2}$$

其中: n表示网络中神经元的个数, $x(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n$是神经元的状态矢量, $f(x(t)) =$

收稿日期: 2007−08−07; 收修改稿日期: 2008−06−23.
基金项目: 国际科技合作项目(2007DFA10600); 国家科技支撑计划(2007BAF10B00); 同济大学优秀人才计划(0800219081).

$(f_1(x_1(t)),\cdots,f_n(x_n(t)))^{\mathrm T}\in\mathbb{R}^n$是神经元的触发函数, $\tau(t)$是网络时延, 式(1)的初始值为$x_i(t)=\phi_i(t)$, $C=\operatorname{diag}\{c_1,\cdots,c_n\}$为对角矩阵, $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times n}$分别为连接权矩阵和延时连接权矩阵.

响应系统表达式为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}y_i(t)=\\&[-c_iy_i(t)+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}f_j(y_j(t))+\\&\sum_{j=1}^{n}b_{ij}f_j(y_j(t-\tau(t)))+u_i(t)]\mathrm{d}t+\\&\sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}(t,e_j(t),e_j(t-\tau(t)))\mathrm{d}\omega_j(t),\\&i=1,\cdots,n.\end{aligned}\tag{3}$$

可以把式(3)写成矩阵方程的形式

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}y(t)=\\&[-Cy(t)+Af(y(t))+Bf(y(t-\tau(t)))+\\&u(t)]\mathrm{d}t+\sigma(t,e(t),e(t-\tau(t)))\mathrm{d}\omega(t),\end{aligned}\tag{4}$$

其中: C,A,B的含义与式(2)相同, $e(t)=(e_1(t),\cdots,e_n(t))^{\mathrm T}$是同步状态误差, $e_i(t)=x_i(t)-y_i(t)$, $\sigma=(\sigma_{ij})_{n\times n}$是扩散连接矩阵, 这种随机扰动可以看成是神经网络的随机不确定引起的, 系统(4)的初始值为$y_i(t)=\psi_i(t)$, 驱动系统(2)的输出信号可以被响应系统(4)接收到. $u(t)=(u_1(t),\cdots,u_n(t))^{\mathrm T}$是用来使驱动和响应系统达到指数同步的状态反馈控制器, 其表达式为

$$u(t)=Ke(t)+Me(t-\tau(t)),\tag{5}$$

其中K,M为需要设计的反馈增益.

假设 1 $f_i(x)$满足Lipschiz条件, 对任意$i=1,\cdots,n$存在常数$\alpha_i>0$使得

$$|f_i(x)-f_i(y)|\leqslant\alpha_i|x-y|,\ \forall\,x,y\in\mathbb{R}.$$

假设 2 $\sigma(t,x,y)$满足Lipschiz条件, 存在适当维数的矩阵F_1,F_2使得$\forall\,(t,x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$有

$$\operatorname{tr}[\sigma^{\mathrm T}(t,x,y)\sigma(t,x,y)]\leqslant\|F_1x\|^2+\|F_2y\|^2.$$

假设 3 $f(0)\equiv0,\sigma(t,0,0)\equiv0.$

假设 4 $\tau(t)$有界, 对t可微且满足$\tau=\max\{\tau(t)\},0\leqslant\dot\tau(t)\leqslant d<1,\tau,d$都是正常数.

系统(2)和系统(4)的误差系统可以写成

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}e(t)=\\&[(-C-K)e(t)-Me(t-\tau(t))+\\&Ag(e(t))+Bg(e(t-\tau(t)))]\mathrm{d}t-\\&\sigma(t,e(t),e(t-\tau(t)))\mathrm{d}\omega(t),\end{aligned}\tag{6}$$

其中:

$$\begin{aligned}&g(e(t))=[f_1(x_1(t))-f_1(y_1(t)),\cdots,\\&\qquad f_n(x_n(t))-f_n(y_n(t))]^{\mathrm T},\\&g(e(t-\tau(t)))=\\&[f_1(x_1(t-\tau(t)))-f_1(y_1(t-\tau(t))),\cdots,\\&f_n(x_n(t-\tau(t)))-f_n(y_n(t-\tau(t)))]^{\mathrm T}.\end{aligned}$$

根据假设1、假设3得到

$$\begin{aligned}&|g_i(e_i(t))|=\\&|f_i(e_i(t)+y_i(t))-f_i(y_i(t))|\leqslant\alpha_i|e_i(t)|,\end{aligned}$$

$g(0)=0$, 系统(6)存在平凡解$e(0)=0$.

定义 1 如果反馈控制器使得不等式

$$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\log\mathcal{E}\|x(t)-y(t)\|^2\leqslant-\alpha$$

成立, 则称驱动系统(2)和响应系统(4)达到指数同步, 其中α为指数同步率.

2 主要结论(Main results)

定理 1 假设1～假设4成立, 如果存在有适当维数的正定矩阵P,S,Q,R, 正常数$\rho,\mu,\varepsilon_1,\varepsilon_2$, 半正定矩阵

$$X=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&X_{13}\\ *&X_{22}&X_{23}\\ *&*&X_{33}\end{bmatrix}\geqslant0,$$

以及适当维数的矩阵$G_i,H_i,i=1,2,3$使得下列LMIs成立:

$$\begin{bmatrix}\Omega_{11}&\Omega_{12}&\Omega_{13}&G_1&H_1A&H_1B\\ *&\Omega_{22}&\Omega_{23}&G_2&H_2A&H_2B\\ *&*&\Omega_{33}&G_3&H_3A&H_3B\\ *&*&*&-R&0&0\\ *&*&*&*&-\varepsilon_1I&0\\ *&*&*&*&*&-\varepsilon_2I\end{bmatrix}<0,\tag{7}$$

$$\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&X_{13}&G_1\\ *&X_{22}&X_{23}&G_2\\ *&*&X_{33}&G_3\\ *&*&*&(1-d)S\end{bmatrix}\geqslant0,\tag{8}$$

$$P\leqslant\rho I,\tag{9}$$

$$R\leqslant\mu I,\tag{10}$$

则驱动系统(2)和响应系统(4)可以达到指数同步. 其中:

$$\begin{aligned}\Omega_{11}=&\,Q+G_1+G_1^{\mathrm T}+H_1(-C-K)+\\&(-C-K)^{\mathrm T}H_1+\varepsilon_1\Sigma^{\mathrm T}\Sigma+\end{aligned}$$

$$(\rho+\frac{\tau\mu}{1-d})F_1^{\mathrm{T}}F_1+\tau X_{11},$$

$$\Omega_{12}=-G_1+G_2^{\mathrm{T}}-H_1M+(-C-K)^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}+\tau X_{12},$$

$$\Omega_{13}=P+G_3^{\mathrm{T}}y-H_1+(-C-K)^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}}+\tau X_{13},$$

$$\Omega_{22}=(d-1)Q-G_2-G_2^{\mathrm{T}}-H_2M-M^{\mathrm{T}}H_2^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2\Sigma^{\mathrm{T}}\Sigma+(\rho+\frac{\tau\mu}{1-d})F_2^{\mathrm{T}}F_2+\tau X_{22},$$

$$\Omega_{23}=-G_3^{\mathrm{T}}-H_2-M^{\mathrm{T}}H_3^{\mathrm{T}}+\tau X_{23},$$

$$\Omega_{33}=\tau S-H_3-H_3^{\mathrm{T}}+\tau X_{33},$$

$$\Sigma=\mathrm{diag}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}.$$

证 令

$$\varphi(t)=(-C-K)e(t)-Me(t-\tau(t))+Ag(e(t))+Bg(e(t-\tau(t))),$$

$$\sigma(t)=\sigma(t,e(t),e(t-\tau(t))),$$

于是, 系统(6)可以写为

$$\mathrm{d}e(t)=\varphi(t)\mathrm{d}t-\sigma(t)\mathrm{d}\omega(t). \tag{11}$$

当$t\geqslant\tau$时, 有

$$e(t-\tau(t))=e(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\varphi(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau(t)}^{t}\sigma(s)\mathrm{d}\omega(s),$$

于是对于任意合适维数的矩阵$G_i, H_i(i=1,2,3)$有

$$2[\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t)G_1+\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))G_2+\varphi^{\mathrm{T}}(t)G_3]\times[e(t)-e(t-\tau(t))-\int_{t-\tau(t)}^{t}\varphi(s)\mathrm{d}s+\int_{t-\tau(t)}^{t}\sigma(s)\mathrm{d}\omega(s)]=0, \tag{12}$$

$$2[\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t)H_1+\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))H_2+\varphi^{\mathrm{T}}(t)H_3]\times[(-C-K)e(t)-Me(t-\tau(t))+Ag(e(t))+Bg(e(t-\tau(t)))-\varphi(t)]. \tag{13}$$

另外, 对半正定矩阵$X\geqslant 0$, 有

$$\tau\eta^{\mathrm{T}}(t)X\eta(t)-\int_{t-\tau(t)}^{t}\eta^{\mathrm{T}}(t)X\eta(t)\mathrm{d}s\geqslant 0, \tag{14}$$

其中

$$\eta^{\mathrm{T}}(t)=\big[\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t),\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t-\tau(t)),\varphi^{\mathrm{T}}(t)\big].$$

构造随机系统(6)的Lyapunov函数

$$V(t,e(t))=\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t)Pe(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(s)Qe(s)\mathrm{d}s+\int_{-\tau(t)}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\varphi^{\mathrm{T}}(s)S\varphi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\beta+\frac{1}{1-d}\int_{-\tau(t)}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\mathrm{tr}[\sigma^{\mathrm{T}}(s)R\sigma(s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}\beta. \tag{15}$$

考虑式(12)(13), 对式(14)求$\mathcal{L}$算子, 算子定义见文献[6]中的公式(8), 结合假设1~4, 以及文献[7]对随机系统指数稳定性的证明过程, 可得定理1.

注 1 如果时延$\tau(t)$不可微, 满足$0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau$, 可通过构造

$$V(t,e(t))=\mathrm{e}^{\mathrm{T}}(t)Pe(t)+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\varphi^{\mathrm{T}}(s)S\varphi(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\beta+\int_{-\tau}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\mathrm{tr}[\sigma^{\mathrm{T}}(s)R\sigma(s)]\mathrm{d}s\mathrm{d}\beta$$

得到式(2)(4)指数同步结论. 证明过程类似定理1, 从略.

3　仿真(Simulation)

考虑神经网络中的参数为

$$C=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}2.0&-0.1\\-5.0&2.8\end{bmatrix},$$

$$B=\begin{bmatrix}-1.6&-0.1\\-0.3&-2.5\end{bmatrix},\ d=0,\ \tau=1,$$

$$f(x(t))=\begin{bmatrix}\tanh x_1\\\tanh x_2\end{bmatrix},$$

$$\sigma(t)=\mathrm{diag}\{\|e_1(t)\|,\|e_2(t-\tau(t))\|\}.$$

根据定理1可以合适地选取

$$K=\begin{bmatrix}15&-14\\-12&41\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}-3&3\\2.8&-8\end{bmatrix}.$$

驱动系统和响应系统之间的误差曲线如图1所示.

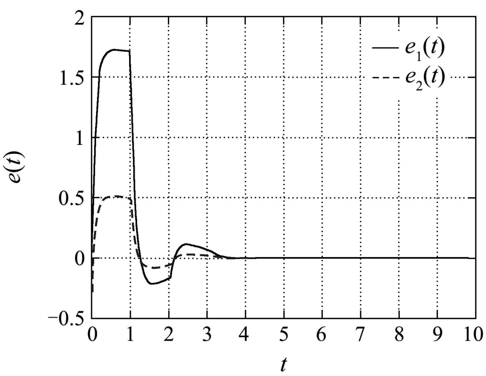

图 1　同步误差曲线$e(t)$

Fig. 1　Synchronization error $e(t)$

4　结论(Conclusion)

本文研究了一类随机的具有时变时滞神经网络的同步控制问题. 通过李雅普诺夫函数、LMI以及自由权矩阵的构造, 最终得到了保证驱动系统和受随机扰动的响应系统指数同步的充分条件. 用该方法实现指数同步时对参数的选取有更大的灵活性.

参考文献(References):

[1] 赵碧蓉, 江明辉, 沈轶. 随机时滞神经网络的全局指数稳定性[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(5): 799 – 801.
(ZHAO Birong, JIANG Minghui, SHENG Yi. Globally exponential stability of stochastic neural networks with delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 799 – 801.)

[2] LIAO X X, WANG J. Algebraic criteria for global exponential stability of cellular neural networks with multiple time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 2003, 50(2): 268 – 275.

[3] 冯昭枢, 王建, 刘洪伟, 等. 随机Hopfield神经网络的稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 1999, 16(3): 345 – 348.
(FENG Zhaoshu, WANG Jian, LIU Hongwei, et al. Stability Analysis of Random Hopfield Neural Networks[J]. *Control Theory & Applications*, 1999, 16(3): 345 – 348.)

[4] CAO J, WANG J. Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems* I, 2005, 52(2): 417 – 426.

[5] PECORA L M, THOMAS L C. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 – 824.

[6] SUN Y H, CAO J D, WANG Z D. Exponential synchronization of stochastic perturbed chaotic delayed neural networks[J]. *Neurocomputing*, 2007, 70(13): 2477 – 2485.

[7] CHEN W H, GUAN Z H, LU X M. Delay-dependent exponential stability of uncertain stochastic systems with multiple delays: an LMI approach[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(13): 547 – 555.

作者简介:

张　皓　(1979—), 女, 同济大学讲师, 目前研究方向为网络控制系统、复杂网络, E-mail: zhang_hao@mail.tongji.edu.cn;

严怀成　(1977—), 男, 香港中文大学博士后, 目前研究方向为网络控制系统、时滞系统, E-mail: hcyan@ee.cuhk.edu.hk;

陈启军　(1966—), 男, 同济大学教授, 目前研究方向为机器人控制与智能控制, E-mail: qjchen@mail.tongji.edu.cn.

(上接第188页)

参考文献(References):

[1] MENDEL J M. *Uncertain Rule-based Fuzzy Logic System: Introduction and New Direction*[M]. New York: Prentice Hall, 2000.

[2] MENDEL J M, JOHN R I, LIU F L. Interval type-2 fuzzy logic systems made simple[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2006, 4(6): 808 – 821.

[3] LIANG Q L, MENDEL J M. An introduction to type-2 TSK fuzzy logic systems[C]//*Proceedings of IEEE International Fuzzy Systems Conference*. South Korea, Seoul: IEEE Press, 1999, 3: 1534 – 1539.

[4] LIANG Q L, MENDEL J M. Interval type-2 fuzzy logic systems: theory and design[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 535 – 550.

[5] EVERITT B S, HAND D J. *Finite Mixture Distributions*[M]. London, UK: Chapman and Hall, 1981.

[6] GAN M T, HANMANDLU M, TAN A H. From a Gaussian mixture model to additive fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2005, 13(3): 303 – 316.

[7] 刘涵, 刘丁. 基于模糊Sigmoid核的支持向量机回归建模[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 204 – 208.
(LIU Han, LIU Ding. Support vector regression based on fuzzy sigmoid kernel[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 204 – 208.)

作者简介:

张钦礼　(1972—), 男, 博士, 副教授, 主要研究领域包括模式识别、机器学习和小波分析等, E-mail: zhangql1972@yahoo.com.cn;

王士同　(1964—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究领域包括人工智能、神经网络、模式识别和模糊系统等;

谭左平　(1981—), 女, 博士研究生, 主要研究领域包括神经网络、模式识别和模糊系统等.