

均值回复收益的消费效用无差别定价

易 昊¹, 杨招军^{2,3}

(1. 湖南大学 数学与计量经济学院, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南大学 工商管理学院, 湖南 长沙 410082;

3. 湖南大学 经济与贸易学院, 湖南 长沙 410079)

摘要: 假设项目收益服从算术均值回复过程, 运用消费效用无差别定价原理, 得出决策者在非完备市场下最优投资消费策略以及最优目标函数, 与完备市场中项目收益波动率增加引起投资触发水平单方面增加所不同的是, 在非完备市场情形下还须考虑决策者的风险规避动机对投资决策的影响, 讨论了这一影响在一次性回报与现金流回报两种情形下的不同表现, 给出了相应解释, 指出了项目收益的均值回复速度与投资触发水平之间的相互变动关系.

关键词: 均值回复过程; 本质风险; 实物期权; 最优控制; 投资消费

中图分类号: O231 **文献标识码:** A

Consumption-utility based pricing of payments following mean reversion

YI Hao¹, YANG Zhao-jun^{2,3}

(1. School of Mathematics and Econometrics, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China;

2. School of Business and Management, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China;

3. School of Economics and Trade, Hunan University, Changsha Hunan 410079, China)

Abstract: Assuming payments of a project follow an arithmetic mean-reverting process, we provide an optimal strategy of investment and consumption, and the optimal object function in an incomplete market by using utility indifference pricing principle. Unlike the complete market in which an increase of volatility would merely raise the investment trigger, however, in the incomplete market the trigger is also influenced by investor's precautionary motive. It is shown and explained that effects are different between lump sum payment and cash flow payment. Finally, the relationship between the investment trigger level and the mean-reverting coefficient is discussed.

Key words: mean-reverting process; idiosyncratic risk; real option; optimal control; investment and consumption

1 引言(Introduction)

在实物期权定价理论中, 往往存在两类问题: 一是实物资产所对应项目收益大多具有本质风险, 这使得定价无法采用传统的无套利定价理论进行; 二是多数文献假设项目收益过程服从算术(或是几何)布朗运动(arithmetic(geometric) Brownian motion), 但实际中大多数项目收益过程不服从布朗运动. 对于前者, “效用无差别定价理论”不失为一种较好的解决途径, 后者则可通过假设项目收益服从均值回复过程(mean-reverting process)达到贴近现实的目的.

“实物期权”(real option)概念最早由文献[1]提出, 前期实物期权的研究大多具有以下假设: 实物资产可交换^[2], 实物资产能被已有资产复制^[3], 决策者呈风险中性^[4], 上述假设避免了市场本质风险的存在, 此时项目收益风险均属市场风险, 定价遵循无套利定价原则. 但真实市场中, 项目收益风险一般包含本质风险, 其不能被市场中已有资产的价格风险所

复制. 此外, 理性决策者属风险厌恶型, 其风险态度对投资消费行为有很大影响.

当以上假设不成立时, 效用定价原理随之得到了广泛应用. 该类定价方法实质在于决策者通过对最优投资时刻(这种时刻往往是随机的)以及最优投资消费策略的选取使得其效用期望达到最大化, 并求得期权的效用无差别价格(utility indifference price)以及投资触发水平(investment trigger). 文献[5~8]利用效用定价原理对非完备市场下最优投资消费展开研究, 其中文献[5,6]均为求解项目投资时刻(停时)财富效用期望最大化问题, 不同的是, 文献[5]假设项目收益服从几何布朗运动, 文献[6]从更合理的角度假设项目收益服从均值回复过程; 文献[7]通过求解决策者期望消费效用最大化而对最优投资消费等问题进行研究; 文献[8]结合随机动态理论及非线性滤波技术研究了部分信息下终止时刻的最优投资消费问题.

本文采用期望消费效用最大化原则, 模型设定类似文献[7]. 但文献[7]中, 其项目收益服从算术(几何)布朗运动, 而本文假设项目收益服从算术均值回复过程, 这是由于现实中均值回复过程能更好地描述项目收益变化^[9]. 采用均值回复过程使研究失去了布朗运动在数学处理上的简便性, 本文创新在于在文献[7]的基础上引入新的计算方法并在处理问题上的改进, 得到与文献[7]类似结论, 可视作对[7]的扩充; 本文没有考虑风险资产的存在, 这是由于若引入风险资产, 最终不过是通过套期保值策略规避部分风险^[5]. 此外, 还结合均值回复过程特点, 讨论了回复速度对决策者投资行为的影响.

2 一次性回报模型(Lump sum model)

2.1 一般效用函数下的模型设定(Model under normal utility)

假设模型关于时间连续且无限, 决策者通过选取最优投资消费策略使得下述效用期望达到最大:

$$E\left[\int_0^\infty e^{-\beta t} U(C_t) dt\right]. \quad (1)$$

其中: C_t 是消费过程, $U(C_t)$ 为效用函数, β 为效用关于时间的贴现系数. 决策者拥有一次投资项目的机会, 投资可随决策者意愿在任意时刻进行且具有完全不可撤销性, 投资额度为 I . 项目收益在任意时刻 t 服从下列算术均值回复过程:

$$dX_t = k(m - x)dt + \sigma_x dZ_t. \quad (2)$$

k, m, σ_x 均为参数, 其中 X_t 可为负, 表示项目收益处于亏损状态; 另外市场中还存在无风险资产, 其利率为 r . 值得一提的是, 此情形下隐含有 $I < m$ 的假设, 因为若 $I > m$, 理性决策者绝不会对该类投资产生兴趣, 讨论随之失去意义. 假设 $\{W_t : t \geq 0\}$ 代表决策者的财富过程, 其变化服从下列过程

$$dW_t = (rW_t - C_t)dt. \quad (3)$$

初始时刻财富为一常数, 在投资发生时刻 τ , 决策者支出成本 I 而获得收入 X_τ , 时刻前后决策者财富大小服从变化: $W_\tau = W_{\tau-} + X_\tau - I$. 项目投资发生后, 此时最优目标函数与项目收益无关, 故记作 $V_0(W)$, 其满足:

$$V_0(W) = \sup_{C_u, u \geq 0} E\left[\int_0^\infty e^{-\beta u} U(C_u) du | W_0 = w\right].$$

其中 W_0 代表初始时刻财富, 该最优解满足Bellman方程:

$$\beta V_0(w) = \sup_c [(rw - c)V_{0w}(w) + U(c)]. \quad (4)$$

该方程结果满足消费平滑结果(consumption-smooth ing result): 当 $\beta = r$ 时, 对任何形式效用函数, 最优目

标函数 $V_0(w)$ 以及最优消费均分别为 $\frac{U(rw)}{r}, rw$ ^[7]. 若 $\beta \neq r$ 且效用函数 $U(C_t) = -\frac{e^{-\gamma C_t}}{\gamma}$, 此时最优消费以及最优目标函数则分别为 $rW_t - \frac{r - \beta}{r\gamma}$, $-\frac{1}{r\gamma} \exp(-r\gamma w + \frac{r - \beta}{r})$ ^[10].

投资发生前的最优目标函数与项目收益 X_t 有关, 故将其记作 $V(w, x)$, 其满足

$$V(w, x) = \sup_{\tau, C_u, u \geq 0} E\left[\int_0^\infty e^{-\beta u} U(C_u) du | W_0 = w, X_0 = x\right],$$

其中 X_0 表示初始时刻项目收益大小, 不难得 $V(w, x)$ 满足下列Bellman方程

$$\beta V(w, x) = k(m - x)V_x(w, x) + \frac{\sigma_x^2}{2} V_{xx}(w, x) + \sup_c [U(c) + (rw - c)V_w(w, x)]. \quad (5)$$

$V_0(w)$ 及 $V(w, x)$ 之间存在若干关系: 由于 $V(w, x)$ 具有非泡沫性, 即 x 无穷小时, 决策者将永不投资, 即 $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(w, x) = V_0(w)$; 若 τ 为最优投资停时且满足 $\{\tau | x_\tau = \tilde{x}\}$, 则 $\tilde{x}$ 须满足值匹配条件(value-matching condition):

$$V(w, \tilde{x}) = V_0(w + \tilde{x} - I), \quad (6)$$

以及平滑粘贴条件(smooth-pasting condition):

$$\frac{\partial V(w, x)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}} = \frac{\partial V_0(w + x - I)}{\partial x} \Big|_{x=\tilde{x}}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial V(w, x)}{\partial w} \Big|_{x=\tilde{x}} = \frac{\partial V_0(w + x - I)}{\partial w} \Big|_{x=\tilde{x}}. \quad (8)$$

式(7)表示投资前后最优目标函数关于项目收益的边际变化率相等, 式(8)表示投资前后最优目标函数关于决策者财富的边际变化率相等.

2.2 CARA效用函数下的模型(Model under CARA utility)

2.1节讨论效用函数为一般函数下的最优投资(停时)以及最优消费(控制)问题, 以下引入具体效用函数. 由于本文旨在研究本质风险的存在及其大小对决策者投资消费决策的影响以及该影响与决策者风险态度的关系, 为使得效用函数自变量本身不影响决策者风险态度, 即风险厌恶系数, 在此选用“常系数绝对风险厌恶”(constant absolute risk aversion, CARA)效用函数, 即 $U(c) = -\frac{e^{-\gamma c}}{\gamma}$. 另外, 为使计算简便, 以下均假设效用关于时间折现系数 $\beta = r$, 该假设不会对论文结论产生任何实在性影响. 由2.1节, CARA效用函数下决策者投资后的最

优目标函数 $V_0(w)$ 满足

$$V_0(w) = -\frac{1}{r\gamma}e^{-r\gamma w}. \quad (9)$$

在投资前, 由于存在可供选择的投资机会, 此时决策者的最优目标函数显然比没有这一机会时要高, 故该投资机会具有价值, 将该价值大小记作 $G(x)$, 依据效用无差别定价原理, $G(x)$ 满足以下等式:

$$V(w, x) = -\frac{1}{r\gamma}e^{-r\gamma w + G(x)}, \quad (10)$$

$G(x)$ 的实际意义可理解为理性决策者愿意将投资机会转让他人的最低价格, 本文中其实际为效用无差别价格. 整理上述结论可得下述定理:

定理 1 实物期权的效用无差别价格 $G(x)$ 满足非线性常微分方程:

$$rG(x) = k(m-x)G_x + \frac{\sigma_x^2}{2}G_{xx} - \frac{r\gamma}{2}\sigma_x^2G_x^2. \quad (11)$$

且 $G(x)$ 满足无泡沫条件 $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$, 以及边界条件

$$G(\tilde{x}) = \tilde{x} - I, \quad (12)$$

$$G_x(\tilde{x}) = 1. \quad (13)$$

其中 $\tilde{x}$ 为投资触发水平, 若假设停时 τ 满足 $X_\tau = \tilde{x}$, 则有 $\tau = \inf\{t | G(X_t) \leq X_t - I\}$; 并且决策者投资前后的最优消费策略分别满足:

$$\tilde{c} = r(w + G(x)), \quad (14)$$

$$\tilde{c} = rw. \quad (15)$$

此外, $G(x)$ 关于 x 单调递增.

证 由方程(5)中关于 c 一阶条件 $U_c(C) = V_w(w, x)$ 及表达式(10)可得决策者在投资前的最优消费满足式(14), 而由1.1中所提到的消费平滑结果可得式(15); 将式(10)代入方程(5), 结合式(14)整理得方程(11), 同时将式(10)代入等式(7) (8)和 $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(w, x) = V_0(w)$ 可得边界条件(12) (13)以及 $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = 0$. 定理还需证明一个事实: $G(x)$ 关于 x 单调递增, 即对任意 $0 < x_1 < x_2$, 有 $G(x_1) < G(x_2)$, 设 X_t^1, X_t^2 分别为以 x_1, x_2 作为初值且变化服从方程(2)的项目收益过程; 另一方面, $V(w, x)$ 实际为满足下最优动态规划的解:

$$V(w, x) = \sup_{\tau, C_u, u \geq 0} E\left[\int_0^\tau e^{-ru} U(C_u) du + e^{-r\tau} V_0(W_{\tau-} + X_\tau - I)\right] \\ W_0 = w, X_0 = x].$$

其中最优策略包括最优停时 τ 以及最优消费 $\{C_u, u \geq 0\}$. 此时容易证明 $V(w, x_1) < V(w, x_2)$, 事实上,

若 C_u^*, τ' 为最优目标函数 $V(w, x_1)$ 的最优策略, 则在初始状态 x_2 , 我们同样采取该策略, 在最优停时 τ' , 显然有 $X_{\tau'}^1 < X_{\tau'}^2$, 进一步有

$$\int_0^{\tau'} e^{-ru} U(C_u) du + e^{-r\tau'} V_0(W_{\tau'-} + X_{\tau'}^1 - I) < \int_0^{\tau'} e^{-ru} U(C_u) du + e^{-r\tau'} V_0(W_{\tau'-} + X_{\tau'}^2 - I).$$

将上式两边同时取期望以及极大值, 则有 $V(w, x_1) < V(w, x_2)$, 故 $G(x_1) < G(x_2)$. 证毕.

接下来采用一种近似方法, 并借助计算机模拟计算对问题进行更深入分析.

2.3 投资触发水平, 实物期权价值与波动率以及风险厌恶系数间的相互变化关系(Mutual variation between investment trigger, real option value and risk aversion)

将 $G(x)$ 以及投资触发水平 $\tilde{x}$ 展开成关于 σ_x^2 的一阶形式, 分别有

$$G(x) \approx G_0(x) + G_1(x)\sigma_x^2, \quad (16)$$

$$\tilde{x} \approx \tilde{x}_0 + \delta\sigma_x^2. \quad (17)$$

其中 $G_0(x), \tilde{x}_0$ 分别为 $\sigma_x = 0$ 时实物期权价值以及投资触发水平, 不难求得:

$$\tilde{x}_0 = \frac{mk + Ir}{k + r},$$

$$G_0(x) = \frac{mk - Ik}{r + k} \left(\frac{m - \tilde{x}_0}{m - x} \right)^{\frac{r}{k}}, x < \tilde{x}_0.$$

结合表达式(16)及方程(11), 可得方程(18):

$$G_{1x}(x) = \frac{rG_1(x)}{k(m-x)} + \frac{\gamma(m-I)^2 r^3 (m - \tilde{x}_0)^{\frac{2r}{k}} (m-x)^{-\frac{2r}{k}-3}}{2k(r+k)^2} - \frac{r(m-I)(m - \tilde{x}_0)^{\frac{r}{k}} (m-x)^{-\frac{r}{k}-3}}{2k^2}. \quad (18)$$

考虑到边界条件(12)与表达式(17), 有 $G(\tilde{x}) = \tilde{x}_0 + \delta\sigma_x^2 - I$, 另一方面, 由式(17), 有

$$G_0(\tilde{x}) \approx \frac{k(m-I)}{r+k} \left[1 + \frac{r\delta\sigma_x^2}{k(m-\tilde{x}_0)} \right] = \tilde{x}_0 - I + \delta\sigma_x^2$$

再由式(16), 即得边界条件(19):

$$G_1(\tilde{x}) = 0. \quad (19)$$

同理可得边界条件(20):

$$G_{1x}(\tilde{x}) = -\frac{r+k}{k(m-\tilde{x}_0)}\delta. \quad (20)$$

由式(17)~(20), 可得关于 δ 的方程:

$$\frac{r(m-I)(m - \tilde{x}_0)^{\frac{r}{k}} (m - \tilde{x}_0 - \delta\sigma_x^2)^{-\frac{r}{k}-3}}{2k^2} -$$

$$\frac{(r+k)\delta}{k(m-\tilde{x}_0)} - \frac{\gamma(m-I)^2 r^3 (m-\tilde{x}_0)^{\frac{2r}{k}} (m-\tilde{x}_0 - \delta\sigma_x^2)^{-\frac{2r}{k}-3}}{2k(r+k)^2} = 0. \quad (21)$$

忽略 σ_x^2 的二阶无穷小量, 以下近似等式成立:

$$\begin{aligned} (m-\tilde{x}_0 - \delta\sigma_x^2)^{-\frac{r}{k}-3} &\approx \\ (m-\tilde{x}_0)^{-\frac{r}{k}-3} + \delta\sigma_x^2(3 + \frac{r}{k})(m-\tilde{x}_0)^{-\frac{r}{k}-4}, \\ (m-\tilde{x}_0 - \delta\sigma_x^2)^{-\frac{2r}{k}-3} &\approx \\ (m-\tilde{x}_0)^{-\frac{2r}{k}-3} + \delta\sigma_x^2(3 + \frac{2r}{k})(m-\tilde{x}_0)^{-\frac{2r}{k}-4}. \end{aligned}$$

一般情况下, 以上近似式是足够精确的, 只有当 $\frac{r}{k}$ 非常小(与 σ_x^2 同一数量级), 此时由 $\tilde{x}_0$ 大小接近 m , 等式才有较大误差, 对这一罕见情形, 本文不作进一步讨论. 将上述近似式代入式(21)得:

$$\delta = \frac{C - D\gamma}{A + B\sigma_x^2}.$$

其中:

$$\begin{aligned} A &= \frac{r+k}{k(m-\tilde{x}_0)}, \\ B &= \frac{\gamma(3k+2r)(m-I)^2 r^3}{2k^2(r+k)^2(m-\tilde{x}_0)^4} - \frac{r(m-I)(3k+r)}{2k^3(m-\tilde{x}_0)^4}, \\ C &= \frac{r(m-I)}{2k^2(m-\tilde{x}_0)^3}, D = \frac{(m-I)^2 r^3}{2k(r+k)^2(m-\tilde{x}_0)^3}. \end{aligned}$$

$\delta\sigma^2$ 可反应不同 γ , σ_x^2 取值下决策者的投资触发水平相较于 $\tilde{x}_0$ 的变化情况, 其中 $A > 0, D > 0$ 保证了以下叙述的正确性. 不同于传统实物期权文献所述: “资产波动系数 σ_x 越大, 最优投资水平 $\tilde{x}$ 越大.” 本文中这还取决于决策者的风险态度, 即 γ 的大小: 当 γ 较小时, 随着 σ_x^2 增大 $\tilde{x}$ 增大; 但当 γ 不断增大时, 此时 σ_x^2 增大 $\tilde{x}$ 会不变甚至减小, 该现象可解释为传统理论中的波动率增加效应逐渐弱于决策者规避本质风险的意图. (详细解释可参见文献[7]). 借助MATLAB解方程(21), 结果如上述结论, 见图1.

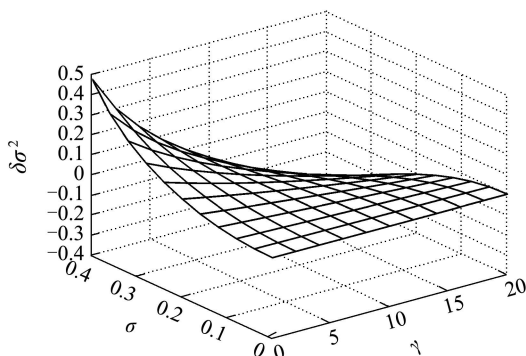


图1 投资触发水平随波动率、风险厌恶系数变化图
Fig. 1 The variation of investment trigger to accompany with both volatility and risk aversion

图1中 $\delta\sigma^2$ 用于描述不同类型决策者以及不同资产波动率情况下的投资触发水平的变化情况. 其他参数取值: $r = k = 0.05, m = 20, I = 10$.

2.4 投资触发水平与项目收益的均值回复速度之间的变化关系(variation between investment trigger and mean reversion)

若投资回报服从过程(2), 直觉告诉大家随着均值回复速度的增加, 投资触发水平应提高并接近均值. 借助计算机求解方程(21), 得图2. 发现在其他参数不变的情况下, 随着 k 增大, 投资触发水平不断增加; 若 k 较小, 投资收益回归均值较慢, 决策者则会选择收益更接近 I 时投资, 通过投资获得收益差价并将其用于无风险资产投资及消费. 图2中 X 代表投资触发水平, 其他参数取值: $r = 0.05, m = 20, I = 10, \sigma^2 = 0.05, \gamma = 10$.

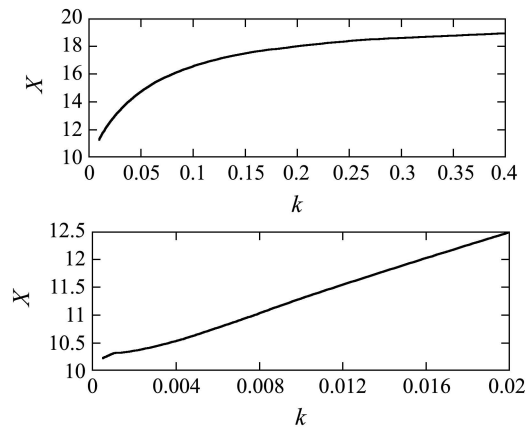


图2 投资触发水平随均值回复系数变化图
Fig. 2 The variation of investment trigger to accompany with mean reversion coefficient

3 现金流回报模型(Cash flow model)

与第2节中一次性回报情形不同的是, 本节假设项目收益回报以现金流形式给出. 由于现金流收益大小变动受本质风险影响, 故即使在投资发生后, 决策者仍需面对该风险; 而在一次性回报情形下, 投资发生意味着决策者对(本质)风险暴露的结束, 此后市场等同于一个完备市场, 决策者只需按经典投资理论进行资产配置.

本节中假设以及符号均沿用第2节中所采用的, 不同的是, 本节中自决策者执行投资时刻起, 其将获得一持续现金流收入, 收入大小服从变化:

$$dY_t = k(m - y)dt + \sigma_y dZ_t. \quad (22)$$

与一次性回报不同, 当回报以现金流方式给出的情况下, 不要求 $m > I$. 余下推导过程与第2节类似, 在此略去, 直接得以下定理:

定理2 实物期权的效用无差别价格 $G(y)$ 满足下列非线性常微分方程:

$$rG(y) = k(m - y)G_y + \frac{\sigma_y^2}{2}G_{yy} - \frac{r\gamma}{2}\sigma_y^2G_y^2. \quad (23)$$

且 $G(y)$ 满足无泡沫条件 $\lim_{y \rightarrow -\infty} G(y) = 0$, 以及边界条件

$$G(\tilde{y}) = F(\tilde{y}) - I, \quad (24)$$

$$G_y(\tilde{y}) = F_y(\tilde{y}) = \frac{1}{r + k}. \quad (25)$$

其中 $\tilde{y}$ 为投资触发水平, 且 $F(y) = \frac{y}{r} + \frac{k(m - y)}{r(r + k)} - \frac{\gamma\sigma_y^2}{2(r + k)^2}$, 若假设停时 τ 满足 $Y_\tau = \tilde{y}$, 则 $\tau = \inf\{t | G(X_t) \leq Y_t - I\}$; 并且投资者投资前后的最优消费策略分别满足:

$$\tilde{c} = r(w + G(y)), \quad (26)$$

$$\tilde{c} = r(w + F(y)). \quad (27)$$

此外, $G(y)$ 关于变量是单调递增的.

不同于第2节, 当回报以现金流形式给出时, 投资发生后的最优目标函数 $V_0(w)$ 不能简单记作 $-\frac{e^{-r\gamma w}}{r\gamma}$, 其仍与变量 y 有关, 在本定理推导过程中将其设为 $\frac{-\exp[-r\gamma(w + F(y))]}{r\gamma}$, $F(y)$ 在文献[7]中被解释为现金流经风险校正后的等价财富或是现金流的隐含价值(一次性收益情形下其对应大小即为 X_t).

如同第2节中方法, 可得不同波动率以及风险厌恶系数下的投资触发水平变化(图3).

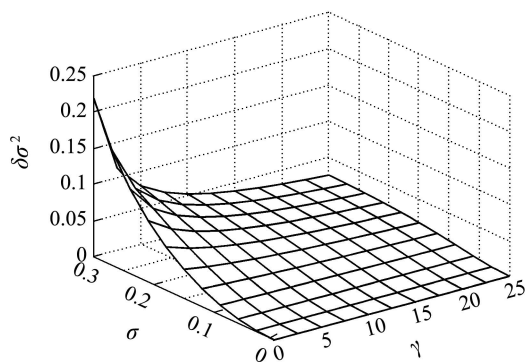


图3 投资触发水平随波动率、风险厌恶系数变化图
Fig. 3 The variation of investment trigger to accompany with both volatility and risk aversion

图3中其他参数取值: $r = 0.2, k = 0.1, m = 5, I = 10$. 然而与一次性回报情形不同的是, 当风险

厌恶系数逐渐提高时, 投资触发水平随波动率的变化趋势的变化相对不明显, 且当风险厌恶系数足够大时, 投资触发水平随着波动率增加仍增加. 该现象在现实中可解释为: 当回报一次性给定情形下, 投资前决策者面对项目收益变动而带来的本质风险, 而自投资发生时刻起该风险消失; 而当项目收益为现金流形式下时情况将有所不同, 此时即使决策者执行投资, 本质风险仍存在并影响现金流大小, 由于投资发生并不能结束决策者对风险的暴露, 使得既定风险大小下投资触发水平随风险厌恶系数的变化趋势并不明显, 当风险厌恶系数足够大时, 投资触发水平随波动率提高不断降低的现象也并未出现.

参考文献(References):

- [1] MYERS S. Determinants of corporate borrowing[J]. *Journal of Financial Economics*, 1977, 5(2): 147 – 152.
- [2] BRENNAN M J, SCHWARTZ E S. Evaluating natural resource investments[J]. *Journal of Business*, 1985, 58(2): 135 – 157.
- [3] MYERS S C, MAJD S. Abandonment value and project life[J]. *Advances in Futures and Options Research*, 1990, 22(4): 1 – 21.
- [4] MCDONALD R, SIEGEL D. The value of waiting to invest[J]. *Quarterly Journal of Economics*, 1986, 101(4): 707 – 728.
- [5] HENDERSON V. Valuing the option to invest in an incomplete market[J]. *Mathematics and Financial Economics*, 2007, 7(1): 103 – 128.
- [6] CHRISTIAN O E, ZHAOJUN Y. Utility based pricing and exercising of real options under geometric mean reversion and risk aversion toward idiosyncratic risk[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2008, 68(1): 97 – 123.
- [7] MIAO J J, WANG N. Investment, consumption and hedging under incomplete markets[J]. *Journal of Financial Economics*, 2007, 86(3): 608 – 642.
- [8] 杨招军. 部分信息下极大化终止时刻期望效用[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(5): 708 – 712.
(YANG Zhaojun. Maximizing the expected utility from terminal wealth under the case of partial information[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(5): 708 – 712.)
- [9] METCALF G, HASSET K. Investment under alternative return assumptions comparing random walk and mean reversion[J]. *Journal of Economics Dynamics and Control*, 1995, 19(8): 1471 – 1488.
- [10] MERTON R. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous time model[J]. *Journal of Economic Theory*, 1971, 3(4): 373 – 413.

作者简介:

易昊 (1984—), 男, 硕士, 研究方向为金融工程, E-mail: yihao102619@126.com;

杨招军 (1964—), 男, 博士, 教授, 英国Leeds大学数学学院与商学院访问学者, 中科院数学与系统科学研究院访问学者, 数量经济学专业博士生导师, 研究方向为金融工程, E-mail: zjyang@hnu.cn.