第 26 卷第 5 期 控制理论与应用 Vol. 26 No. 5
2009 年 5 月 Control Theory & Applications May. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)05−0535−05

有界扰动系统高效鲁棒预测控制器设计

李德伟, 席裕庚

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

摘要: 具有有界扰动的有约束线性系统是一类常见的不确定系统. 针对此类系统, 本文借鉴扰动不变集方法, 通过离线设计两个椭圆不变集以降低以往设计的保守性, 进而提出一种有界扰动系统的高效鲁棒预测控制器(SD–ERPC)的设计方法. 该方法能够较好地处理扰动对系统的影响, 在减小控制器在线计算量的同时, 扩大原ERPC设计的初始可行域, 且具有较好的控制性能. 文中给出了SD–ERPC控制器可行性和鲁棒稳定性的理论证明, 并通过仿真算例验证了该控制器的有效性.

关键词: 模型预测控制; 有界扰动; 鲁棒稳定性; 高效鲁棒预测控制器

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

Design of efficient robust model-predictive controller for systems with bounded disturbances

LI De-wei, XI Yu-geng

(Departmet of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: The constrained linear system with bounded disturbance is a familiar type of uncertain systems. For this type of uncertain systems, an efficient robust model-predictive controller for systems with bounded disturbances(SD–ERPC) is developed. By making use of the invariant set of bounded disturbances, we release the conservativeness in the design by offline designing two ellipsoidal invariant sets. This approach preferably deals with the system effect from the bounded disturbances, reduces the on-line computational work, enlarges the feasible initial-region in the design of ERPC, and guarantees a better control quality. The feasibility and robustly stability of SD–ERPC are also proved. Finally, a simulation example is presented to verify its validity.

Key words: model predictive control; bounded disturbances; robust stability; efficient robust predictive control

1 引言(Introduction)

由于可以方便地处理各种约束, 模型预测控制(model predictive control, MPC)从问世以来就受到工业界和学术界的广泛重视[1,2]. 在实际应用中, 模型的不确定性和外加扰动是不可避免的, 因此鲁棒预测控制作为模型预测控制的一个重要分支近年来受到学术界的普遍关注.

针对具有有界扰动的线性系统, Chisci等[3]提出一种鲁棒控制器, 将预测时域内的各步系统状态强制在一个考虑了扰动的更小范围中. Scokaert[4]在优化问题中考虑所有可能的扰动序列对系统状态的影响, 并以此为基础设计双模控制器. 而Mayne等在文[5]中利用线性系统的叠加性, 将系统当前状态分成扰动分量和名义系统分量, 进而分别设计反馈控制律和预测控制器.

众所周知, 预测控制需要在线求解非线性优化问题, 其在线计算量是一个重要问题. 为了减小预测控制器的在线计算量, 刘斌等[6]在文[3]的基础上引入集结[7], 提出一种基于集结的鲁棒预测控制器(ABRMPC). 但由于需要采用状态反馈以保证闭环系统的稳定性, ABRPC的初始可行域受到较大限制. 实际上, 在预测控制器设计中可将部分在线计算量转移由离线设计完成, 从而有效降低在线计算量, 如文[8]和高效鲁棒预测控制(efficient robust predictive control, ERPC)[9,10]. 其中ERPC具有在线计算量小, 控制性能好的特点.

借鉴ERPC思想和文[5]中的设计, 本文提出一种针对有界扰动系统的高效鲁棒预测控制器(SD–ERPC)的设计方法. 该方法在考虑扰动不变集的基础上, 对原ERPC设计进行改进, 通过离线设计两

收稿日期: 2007−09−20; 收修改稿日期: 2008−09−18.

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60674041,60504026); 国家863资助项目(2006AA04Z17); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20070248004).

个椭圆不变集, 在线进行凸组合的方法, 在保持原有ERPC在线计算量较小的优点同时, 使控制器具有较大的初始可行域和良好的控制性能.

为了方便起见, 本文记F_i表示矩阵F第i行.

2 问题描述(Problem formulation)

考虑有界扰动线性系统

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + \omega(k), \tag{1}$$

$$F_i x \leqslant f_i,\ |u_j| \leqslant d_j, f_i > 0,\ d_j > 0. \tag{2}$$

这里$x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m$, i的取值范围为系统状态约束的个数, $j = 1, \cdots, m$, 扰动$\omega(k) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $||\omega(k)||_2 \leqslant \overline{\omega}$, $(A|B)$可控.

对于系统(1)(2), 文[6]中采用衰减集结方法设计预测控制器ABRMPC, 即令$u(k+i|k) = \rho^i u(k|k)$(ρ为衰减率)以减少优化问题的优化变量个数, 进而降低在线计算量. 但ABRMPC要求对象满足$\max\{|\lambda(A)|\} < 1$, $\|A\| \triangleq \bar{\sigma}(A) \leqslant 1$. 这严重限制了该控制器的应用范围, 且由于减少了优化自由度, 造成其控制性能不佳.

对于系统(1)的有界扰动, 如果设计反馈律K_r, 可以得到系统有界扰动的不变集Z, $\phi Z \oplus \Omega \subseteq Z$, 这里$\phi = A + BK_r$, $\oplus$表示Minkowski集合之和. Mayne[5]等人利用线性系统的叠加性和扰动不变集, 将系统当前状态$x(k)$分成$x(k) = x_1(k) + \Delta x(k)$, 其中$\Delta x(k) \in Z$. 系统控制量为$u(k+i) = K_r \Delta x(k+i) + c(k+i)$, 控制分量序列$c(k), \cdots, c(k+N-1)$驱动状态分量$x_1(k)$趋向原点. 即预测控制器的任务是在线求解控制分量序列以及状态分量$x_1(k)$. 文献[5]中预测控制器的在线计算量主要由在线优化变量个数决定, 即由控制时域长度N来决定. 在实际应用中, 为了改善控制性能, 增大系统的适用范围, 往往需要选取较大的控制时域, 但却因此造成在线计算量大, 不利于实际应用. 另外, 由于新增加了优化变量$x_1(k)$, 使这一问题更为严重.

如何在有效处理扰动影响的同时, 减小在线计算量, 扩大系统可行域, 保证系统控制性能, 正是本文要研究的问题. 因此, 引入ERPC[9,10]思想.

对于系统(1)(2)的名义系统, 取性能指标为

$$J_{\mathrm{LQ}} = \sum_{i=0}^{\infty} [||x(k+i)||^2_{\mathrm{Q}} + ||u(k+i)||^2_{\mathrm{R}}], \tag{3}$$

ERPC的控制量为$u(k+i|k) = K_{\mathrm{LQ}} x(k+i|k) + v(k+i|k)$, 令$v(k+i|k) = C_{\mathrm{c}} A_{\mathrm{c}}^i c(k)$, 这里$C_{\mathrm{c}}$和$A_{\mathrm{c}}$分别为需设计的参数矩阵, $c(k)$为控制器在线优化变量, K_{LQ}为无约束最优反馈律. 将原系统状态和附加控制量$c(k)$组成增广系统

$$z_{k+1} = \Psi(k) z_k, z_k = [x^{\mathrm{T}}(k)\ \ c^{\mathrm{T}}(k)]^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^{n+n_{\mathrm{c}}},$$

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Phi & BC_{\mathrm{c}} \\ 0 & A_{\mathrm{c}} \end{bmatrix},\ \ \Phi = A + BK_{\mathrm{LQ}}.$$

这里$n_{\mathrm{c}} > n$. 同时将原系统约束(2)改写为

$$\widehat{F} x + \widehat{G} u \leqslant g, \tag{4}$$

$\widehat{F} = [F^{\mathrm{T}} \vdots 0]^{\mathrm{T}}$, $\widehat{G} = [0 \vdots I]^{\mathrm{T}}$, g为f_j和d_i组成的列向量.

离线求解以下优化问题:

$$\min_{Q_z, \Psi}\ \log\ \det(TQ_zT^{\mathrm{T}})^{-1}, \tag{5}$$

$$\text{s.t.}\ \begin{bmatrix} Q_z & Q_z\Psi^{\mathrm{T}} & Q_zP_1 \\ \Psi Q_z & Q_z & 0 \\ P_1^{\mathrm{T}}Q_z & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{6}$$

$$\begin{bmatrix} W & F_1Q_z \\ Q_z^{\mathrm{T}}F_1^{\mathrm{T}} & Q_z \end{bmatrix} \geqslant 0,\ \ W_{ii} \leqslant g_i^2 \tag{7}$$

得到C_{c}和A_{c}及增广系统的控制不变集$\{z|z^{\mathrm{T}}Q_z^{-1}z \leqslant 1\}$, 其在系统状态空间中的投影覆盖范围最大. 这里:

$$P_1 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ K_{\mathrm{LQ}} & C_{\mathrm{c}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2} \end{bmatrix},$$

$$F_1 = [\widehat{F} + \widehat{G}K_{\mathrm{LQ}}\ \widehat{G}C_{\mathrm{c}}], x = Tz,$$

γ为不变集$S = \{z|z^{\mathrm{T}}Q_z^{-1}z \leqslant 1\}$的性能上界. 文[10]证明了当$n_{\mathrm{c}} \geqslant n$时, 上述优化问题的最优值和$n_{\mathrm{c}}$无关(其求解方法可参考文献[10]).

ERPC的在线优化问题为

$$\min_{c(k)} ||c(k)||^2_{\Gamma}\ \ \text{s.t.}\ \ z(k) \in S. \tag{8}$$

这里:

$$P = Q + K_{\mathrm{LQ}}^{\mathrm{T}} R K_{\mathrm{LQ}} + \Phi^{\mathrm{T}} P \Phi,$$

$$\Gamma - A_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} \Gamma A_{\mathrm{c}} = C_{\mathrm{c}}^{\mathrm{T}} (R + B^{\mathrm{T}} P B) C_{\mathrm{c}}.$$

ERPC控制器采用闭环预测控制, 具有较好的控制性能和较小的在线计算量. 但它在可行域和性能上仍有一定保守性, 且不能直接应用到扰动系统中.

3 有界扰动系统的高效鲁棒预测控制器(The efficient robust MPC for systems with bounded disturbances(SD–ERPC))

在本节中, 首先将系统状态分成名义分量和扰动分量, 对扰动分量设计反馈律并求得其扰动不变集, 进而得到名义状态及其对应输入的允许集, 以此为基础设计高效鲁棒预测控制器(SD–ERPC).

3.1 有界扰动的处理(Handle the bounded disturbances)

根据文[5], 设系统(1)(2)当前时刻状态$x(k) =$

$\widehat{x}(k)+\Delta x(k)$, 则原系统改写为

$$\widehat{x}(k+1)=A\widehat{x}(k)+Bu_1(k), \tag{9}$$

$$\Delta x(k+1)=A\Delta x(k)+Bu_2(k)+\omega(k), \tag{10}$$

$$x(k+1)=\widehat{x}(k+1)+\Delta x(k+1). \tag{11}$$

控制输入$u(k)=u_1(k)+u_2(k)$. 针对$\Delta x(k)$采用反馈控制律$u_2(k)=K_r\Delta x(k)$, 这里$\phi=A+BK_r$, $\|\phi\|_2<1$. 对于(10), 其扰动不变集可表示为

$$Z=\{\Delta x|||\Delta x||_2\leqslant\Delta\overline{x}\},\ \Delta\overline{x}=\frac{\overline{\omega}}{(1-\|\phi\|_2)}. \tag{12}$$

考虑系统输入约束, 假设扰动不变集的状态和控制分量都满足系统约束, 由$|u_1(k)_i+u_2(k)_i|\leqslant|u_1(k)_i|+|u_2(k)_i|$, 如果$|u_1(k)_i|\leqslant d_i-|u_2(k)_i|$, 系统输入约束可以满足的. 故由范数运算可得

$$|u_1(k)_i|\leqslant d_i-||(K_r)_i||_2\frac{\overline{\omega}}{(1-\|\phi\|_2)}=d_i', \tag{13}$$

类似地处理状态约束可得

$$F_i\widehat{x}(k)\leqslant f_i-||F_i||_2\frac{\overline{\omega}}{(1-\|\phi\|_2)}=f_i', \tag{14}$$

则子系统(9)的约束可以写为

$$\widehat{F}\widehat{x}+\widehat{G}u_1\leqslant g'. \tag{15}$$

这里, g'是由f_i'和d_i'组成的一个列向量.

3.2 高效预测控制器(SD–ERPC)的设计(Detail design of SD–ERPC)

由3.1节中求得的子系统(9)的新约束, 本节将针对(9)提出一种改进的ERPC控制器.

3.2.1 离线设计(Offline design)

根据约束(15), 可以离线求解优化问题(5)~(7), 得到子系统(9)的控制不变集$S_1:=\{z(k)|z(k)^{\mathrm{T}}Q_{z1}^{-1}z(k)\leqslant 1\}$以及$C_{\mathrm{c1}}$和$A_{\mathrm{c1}}$.

原始的ERPC控制器就是采用上述设计得到的单个椭圆不变集进行在线优化控制的. 但上述设计在两个方面比较保守: 首先, 在可控范围方面, 由于预测控制的初始可行区域在一般情况下不是一个椭圆, 故采用一个椭圆不变集的原ERPC设计较为保守; 另外, 单一椭圆集的设计会带来优化的次优性[11]. 因此这里考虑设计其他的椭圆集以补偿单一椭圆集的缺点.

对椭圆不变集 S_1 在状态空间上的投影$S_{x1}(x^{\mathrm{T}}(TQ_{z1}T^{\mathrm{T}})^{-1}x\leqslant 1)$的矩阵$TQ_{z1}T^{\mathrm{T}}$进行酉变换($TQ_{z1}T^{\mathrm{T}}=U^{\mathrm{T}}\Lambda U$), 可得酉矩阵$U$和对角阵$\Lambda$. 矩阵$\Lambda$对角线上的元素中绝对值最大的元素对应于椭圆集$S_{x1}$的最长轴, 而绝对值最小的元素对应于$S_{x1}$的最短轴. S_{x1}的最短轴的方向矢量为$q=Up$, $p=[0\cdots010\cdots0]^{\mathrm{T}}$, 其中$p$向量中1元素的位置为对角阵的绝对值最小的元素所在的列.

由于S_{x1}是S_1在状态空间中覆盖范围最大的一个投影椭圆集, 但在各方向上(如S_{x1}的最短轴方向)并不是最大的. 因此可以设计第二个椭圆不变集$S_2:=\{z(k)|z(k)^{\mathrm{T}}Q_{z2}^{-1}z(k)\leqslant 1\}$, 使其在状态空间上的投影$S_{x2}$在$S_{x1}$的最短轴方向上越大越好, 以扩大$S_{x1}$的最短轴方向的可行范围.

应用第1个椭圆不变集的参数C_{c1}和A_{c1}, 令$Q_z=Q_{z2}$, $g_i=g_i'$, 求解以下优化问题

$$\min_{r,Q_{z2}} r\ \ \text{s.t.}\ (6),(7),\ \begin{bmatrix} r & q^{\mathrm{T}}\\ q & TQ_{z2}T^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{16}$$

由于采用和第1个椭圆不变集相同的参数C_{c1}和A_{c1}, 所以优化问题(16)是一个LMI问题.

针对椭圆不变集S_1和S_2, 可得到以下定理.

定理 1　对于有约束(15)的系统(9), 其增广系统的椭圆不变集S_1和S_2的凸组合$S:=\{z|z^{\mathrm{T}}(\lambda Q_{z1}+(1-\lambda)Q_{z2})^{-1}z\leqslant 1\}$仍然是该增广系统的不变集, 其控制律仍然为$u_1(k)=K_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}(k)+C_{\mathrm{c}}A_{\mathrm{c}}^{i}c(k)$, $0\leqslant\lambda\leqslant 1$.

证　由于S_1和S_2为增广系统的椭圆不变集, 且对于S_2采用和S_1相同的参数, 所以它们分别满足不变集条件和系统约束条件, 即满足不等式条件(6)(7). 将组合系统λ和$(1-\lambda)$分别乘以这两个不等式, 并分别相加, 可以很容易得到椭圆集$\{z|z^{\mathrm{T}}(\lambda Q_{z1}+(1-\lambda)Q_{z2})^{-1}z\leqslant 1\}$仍然满足不变集条件和系统约束条件, 即$S_1$和$S_2$的凸组合为有约束(15)的系统(9)的增广系统的不变集. 由于采用相同的A_{c1}和C_{c1}, 所以原控制律仍然为不变集S_1和S_2的控制律, 定理得证.

3.2.2 在线优化(Online optimization)

优化问题(8)的优化性能指标是对无穷时域性能指标的简化, 即省略了$\widehat{x}(k)$对应的项. 由于控制量$u_1(k)=K_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}(k)+C_{\mathrm{c1}}A_{\mathrm{c1}}^{i}c(k)$, 即$\widehat{x}$也是优化变量, 因此这里仍然采用无穷时域性能指标, 即采用控制量$u_1(k+i)=K_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}(k+i)+C_{\mathrm{c1}}A_{\mathrm{c1}}^{i}c(k)$, 其无穷时域性能指标为$J=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\{||\widehat{x}(k+i)||_{\mathrm{Q}}^2+||u_1(k+i)||_{\mathrm{R}}^2\}=||\widehat{x}(k)||_{\mathrm{P}}^2+||c(k)||_{\Gamma}^2$[10]. 则在线优化问题可以表示为以下LMI优化问题:

$$\min_{c(k),\Delta x(k),\lambda,r_1,r_2} r_1+r_2, \tag{17}$$

$$\text{s.t.}\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1, \tag{18}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \widehat{x}(k)^{\mathrm{T}}\ c(k)^{\mathrm{T}}\\ \begin{matrix}\widehat{x}(k)\\ c(k)\end{matrix} & \lambda Q_{z1}+(1-\lambda)Q_{z2}\end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{19}$$

$$\begin{bmatrix} r_2 & c(k)^{\mathrm{T}} \\ c(k) & \mathit{\Gamma}^{-1} \end{bmatrix} \geqslant 0, \ \begin{bmatrix} r_1 & \widehat{x}(k)^{\mathrm{T}} \\ \widehat{x}(k) & P^{-1} \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{20}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta\overline{x} & \Delta x(k)^{\mathrm{T}} \\ \Delta x(k) & I \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{21}$$

这里$\widehat{x}(k) = x(k) - \Delta x(k)$.

综上所述, 可以得到以下算法:

算法 3.1

i) 离线设计:

Step 1 设计状态反馈律K_r, 由式(12)~(14)计算$\overline{x}_i, d'_i, f'_i$, 进而得到式(15). 注意$K_r$应使$\|\phi\|_2 \leqslant 1$, d'_i和f'_i大于零, 且尽可能大.

Step 2 选取参数γ, 针对子系统(9), 求解优化问题(5)~(7)和(16), 得到椭圆控制不变集S_1和S_2.

ii) 在线控制: 求解优化问题(17)~(21), 将$u(k) = K_r\Delta x^*(k) + K_{\mathrm{LQ}}[x(k) - \Delta x^*(k)] + C_{\mathrm{c1}}c^*(k)$作用到控制对象.

注 1 由定理1可知, 改进后控制器的可行域范围是原单一椭圆集控制器的可行域范围和另一个和它正交的椭圆不变集的凸组合, 故其可行域一定比原控制器大. 控制性能上, 新控制器的优化求解的约束条件比原控制器放松, 故其控制性能应优于(至少不差于)原控制器. 另外, 在线控制器(17)~(21)的在线优化变量个数仅为$n + n_{\mathrm{c}} + 3$. 文[10]由于$n_{\mathrm{c}} \geqslant n$时, 优化问题(6)的最优值和$n_{\mathrm{c}}$无关[10], 故一般只需取$n_{\mathrm{c}} = n$. 此时, SD–ERPC的在线优化变量个数仅仅同文[5]中取$N = 1$时相当.

4 SD–ERPC控制器稳定性分析(Stability analysis of SD–ERPC)

针对第3节SD–ERPC控制器, 可得到以下定理:

定理 2 对于具有有界扰动的有约束线性系统(1)(2), 如果初始状态对于算法3.1有可行解, 则算法3.1是可行的, 且闭环系统是鲁棒稳定的.

证 由以上定理的条件, 假设k时刻, 系统的状态为$x(k)$, 算法3.1有最优解$(c^*(k), \Delta x^*(k), \lambda^*)$, 控制量为

$$u(k) = K_r\Delta x^*(k) + K_{\mathrm{LQ}}[x(k) - \Delta x^*(k)] + C_{\mathrm{c1}}c^*(k),$$

系统性能指标为

$$J^*(k) = \sum_{i=0}^{\infty}\{||\widehat{x}(k+i)||^2_{\mathrm{Q}} + ||K_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}(k+i) + C_{\mathrm{c1}}A^i_{\mathrm{c1}}c^*(k)||^2_{\mathrm{R}}\}.$$

由式(9)~(11)可得,

$$\widehat{x}(k+1) = A\widehat{x}(k) + BK_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}(k) + BC_{\mathrm{c1}}c^*(k),$$

$$\Delta x(k+1) = \phi\Delta x^*(k) + \omega(k),$$

$$x(k+1) = \widehat{x}(k+1) + \Delta x(k+1).$$

在k时刻, $\Delta x^*(k)$属于扰动不变集内, 所以可知在控制输入$K_r\Delta x^*(k)$的作用下, $\Delta x(k+1) = (A + BK_r)\Delta x^*(k) + \omega(k)$仍然属于扰动不变集$Z$, 即$||\Delta x(k+1)||_2 \leqslant \overline{x}$.

另外, 由定理1可知, $\widehat{x}(k)$, $c^*(k)$组成的增广状态$z(k)$属于控制不变集$\{z|z^{\mathrm{T}}(\lambda^*Q_{z1} + (1-\lambda^*)Q_{z2})^{-1}z \leqslant 1\}$. 由离线设计可知, $\widehat{x}(k+1)$以及$A_{\mathrm{c1}}c^*(k)$组成的增广状态$z(k+1)$也属于该控制不变集. 由于不变集$\{z|z^{\mathrm{T}}(\lambda^*Q_{z1} + (1-\lambda^*)Q_{z2})^{-1}z \leqslant 1\}$满足约束条件(15), 由式(12)~(14)可得:

$$u(k+1) = K_r\Delta x(k+1) + K_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}_1(k+1) + C_{\mathrm{c1}}A_{\mathrm{c1}}c^*(k)$$

以及

$$x(k+1) = \widehat{x}(k+1) + \Delta x(k+1)$$

满足约束(2). 则$\{A_{\mathrm{c1}}c^*(k), \Delta x(k+1), \lambda^*\}$为$k+1$时刻的优化问题(17)~(21)的可行解.

由$k+1$时刻的可行解, 可得

$$J(k+1) = \sum_{i=1}^{\infty}\{||\widehat{x}(k+i)||^2_{\mathrm{Q}} + ||K_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}(k+i) + C_{\mathrm{c1}}A^i_{\mathrm{c1}}c^*(k)||^2_{\mathrm{R}}\},$$

故

$$J(k+1) - J^*(k) = -(||\widehat{x}(k)||^2_{\mathrm{Q}} + ||K_{\mathrm{LQ}}\widehat{x}(k) + C_{\mathrm{c1}}c^*(k)||^2_{\mathrm{R}}) < 0,$$

即名义系统的性能指标单调递减. 当$J(k) = 0$, 即$\widehat{x}(k) = 0, c(k) = 0$, 则$x(k) \in \mathbb{Z}$, 此时系统实际控制律变为$u(k) = K_rx(k)$. 由于$Z$为扰动不变集, 故系统状态将满足$x(k) \in \mathbb{Z}$, 即系统状态范数有界, 故闭环系统是鲁棒稳定的.

证毕.

5 仿真实例(Numerical example)

考虑对象

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & 0.5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + \omega(k),$$

这里 $\omega(k) = 0.07\,[\sin k \ \ \cos k]^{\mathrm{T}}, |u(k)| \leqslant 1, \omega \leqslant 0.1$. 取 Q 为单位阵, $R = 0.01$. 采用 $K_r = [-0.5 \ -0.75]$, $K_{\mathrm{LQ}} = [-0.6626 \ \ -0.6643]$, $\gamma = 10000$, $n_{\mathrm{c}} = n = 2$, 由算法3.1可得$\overline{x} = 0.4775$, $d' = 0.5696$, SD–ERPC控制器的初始可行域如图1所示, 显然SD–ERPC控制器的初始可行域明显扩大.

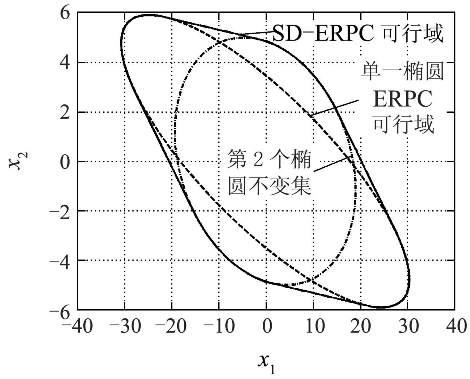

图 1　系统初始可行域

Fig. 1　Initial feasible regions

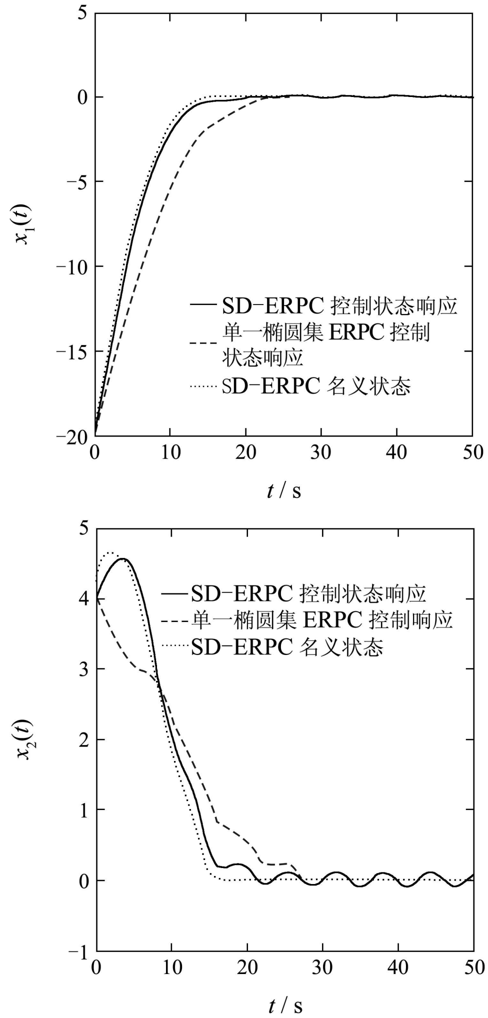

图 2　系统状态响应

Fig. 2　The response of system states

取$x(0) = [-20\quad 4]^{\mathrm{T}}$, 系统状态响应如图2所示. 由图2可以看出采用算法3.1进行控制, 系统状态要比只采用单一椭圆不变集更快地趋近于原点, 这说明系统控制性能得到了改善. 计算整个系统的性能指标也表明这一点, 采用算法3.1进行控制, 系统的性能指标为1575.1, 而只采用单一椭圆不变集进行控制则为2047.1. 考察系统输入, 满足系统输入约束.

通过仿真算例, 可以看出SD–ERPC是鲁棒稳定的, 具有较好的控制性能和较大的初始可行域.

6　结论(Conclusion)

本文借鉴文献[5]中处理扰动的方法, 采用ERPC思想提出一种针对有界扰动系统的高效鲁棒预测控制器(SD–ERPC). 由于对ERPC的原有设计进行了改进, 使SD–ERPC控制器同以往的控制器相比, 具有适用范围较广, 初始可行域较大, 控制性能较好, 且在线计算量较小的特点.

参考文献(References):

[1] 席裕庚. 预测控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1993.
(XI Yugeng. *Model Predictive Control*[M]. Beijing: National Defense Publishing House, 1993.)

[2] MAYNE D Q, RAWLINGS J B, RAO C V, et al. Constrained model predictive control: stability and optimality[J]. *Automatica*, 2000, 36(6): 789 – 814.

[3] CHISCI L, ROSSITER J A, ZAPPA G. Systems with persistent disturbance: predictive control with restricted constraints[J]. *Automatica*, 2001, 37(7): 1019 – 1028.

[4] SCOKAERT P Q M, MAYNE D Q. Min-max feedback model predictive control for constrained linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(8): 1136 – 1142.

[5] MAYNE D Q, SERON M M, RAKOVIC S V. Robust model predictive control of constrained linear systems with bounded disturbances[J]. *Automatica*, 2005, 41(2): 219 – 224.

[6] LIU B, XI Y G. An aggregation based robust model predictive controller[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2003, 29(6): 801 – 808.

[7] DU X N, XI Y G, LI S Y. A Computationally efficient aggregation optimization strategy of model predictive control[J]. *High Technology Letters*, 2002, 8(2): 68 – 71.

[8] 丁宝苍, 邹涛, 李少远. 时变不确定系统的变时域离线鲁棒预测控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 240 – 244.
(DING Baocang, ZOU Tao, LI Shaoyuan. A Varying-horizon off-line robust predictive control for time varying uncertain systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(2): 240 – 244.)

[9] KOUVARITAKIS B, ROSSITER J A, SCHUURMANS J. Efficient robust predictive control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(8): 1545 – 1549.

[10] CANNON M, KOUVARITAKIS B. Optimizing prediction dynamics for robust MPC[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1892 – 1897.

[11] LARS I, NADAV B, FOSS B A. More efficient predictive control[J]. *Automatica*, 2005, 41(8): 1395 – 1403.

作者简介:

李德伟　(1971—), 男, 目前在上海交通大学电子信息与电气工程学院做博士后研究工作, 目前研究方向为预测控制理论及方法, E-mail: dwli@sjtu.edu.cn;

席裕庚　(1946—), 男, 1984年在德国慕尼黑工业大学获得博士学位, 现为上海交通大学自动化系教授, 博士生导师, 主要从事预测控制、复杂系统控制理论和智能机器人的研究, E-mail: ygxi@sjtu.edu.cn.