

离散纯方位系统的可观测性判据

李洪瑞^{1,2}, 盛安冬¹

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 江苏自动化研究所, 江苏 连云港 222005)

摘要: 传统的纯方位测量系统可观测性判据复杂且依赖目标运动参数. 通过线性化测量方程, 推导了可观测性判据Gram矩阵行列式的解析表达式, 得到了纯方位测量系统可观测性的充分必要条件, 即存在4个方位测量使得由它们构成的可观测性判别式不等于0, 其特点为判据仅依赖方位测量, 无需进行求导运算以及求解微分方程.

关键词: 可观测性; 判据; 纯方位; 充分必要条件

中图分类号: TP271 **文献标识码:** A

Observability criteria for discrete bearings-only system

LI Hong-rui^{1,2}, SHENG An-dong¹

(1. Automation School, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;

2. Jiangsu Automation Institute, Lianyungang Jiangsu 222005, China)

Abstract: The conventional observability criteria for bearings-only system are complex and dependent on target motion parameters. The analytic expression of Gram matrix(GM) determinant is derived by linearizing the measurement equation; and a sufficient and necessary condition for observability of bearings-only system is then obtained. According to the condition, a bearings-only system is observable if and only if there exist four bearings of which the observability discriminant equation is not equal to zero. In applying this observability criterion, we need only the bearings-information; neither its differentiation nor the solution of a differential equation is required.

Key words: observability; criteria; bearings-only; sufficient and necessary condition

1 引言(Introduction)

纯方位测量系统的可观测性的研究始于1978年, 由于问题的特殊性和工程上的重要性, 在Lindgren和Gong^[1]提出其可观测性问题后, 涌现了一些文献资料和研究结果^[2~6]. 传统的研究, 从方法上看大体可归为两类, 一类是运用控制理论对系统进行可观测分析^[2,4]; 另一类是运用数学工具, 从目标运动参数解的存在唯一性原理研究^[3,5]. 从表示方法上看, 所得到的系统可观测或解的存在唯一条件主要也有两类, 一是用目标相对观测器的运动位置表示^[2,4], 由于目标位置一般不能确定, 因此这种条件用于实际判断是比较困难的; 二是用目标方位表示^[3,5], 但是所表述的可观测或解的存在唯一条件非常复杂, 有些只给出必要条件. 其中Nardone和Aidala^[2]的研究结果最为经典, 被广泛引用, 其原理是通过对方位观测方程进行数学变换, 得到关于目标速度、相对距离的线性方程, 并进行3次微分得到1个关于方位的3阶常微分方程, 然后解这个方程得到了观测器加速度矢量、初始时刻目标相对位置和速度矢量的关系表达式, 根据可观测

条件, 得到了方位的3阶微分方程不等式和观测器加速度矢量、初始时刻目标相对位置和速度矢量的不等式, 这被认为是系统可观测的充要条件. 在文献[2]中没有给出离散状态的表达式, 且涉及方位的高阶导数和目标的运动方程. Fogel和Gavish^[4]对于3维、 N 阶动态运动目标的可观测性的研究, 得到了由目标相对观测器运动坐标表示的充要条件. 这种条件表达与文献[2]的表示方式类似, 明确了观测器和目标运动轨迹的相对运动关系. 董志荣等^[3,5]得到了用方位及其变化率不同组合的4个测量量求目标运动参数时, 解存在唯一的充要条件.

对方位测量方程不进行线性化处理, 直接应用非线性系统分析方法研究其可观测性^[6]是一种较为通用的方法, 得到的结果也具有通用性, 理论上适合任意方式运动目标的观测系统的可观测性, 但不容易给出系统可观测判断的具体表达式.

近年来关于纯方位系统可观测性的公开文献并不多见, 而在观测器的最优机动、各种纯方位跟踪(包括机动跟踪)算法、性能分析或评估、多目标关联等集中了大量文献, 以改进参数估计精度和缩短

估计时间^[7~11].

本文采用由数学变换线性化的测量方程, 详细推导观测系统的Gram矩阵行列式的解析式, 从而导出一种新的可观测判别式, 给出了系统可观测性的纯方位判据(充分必要条件), 不需要计算方位的导数, 也无需观测器和目标相对位置.

2 问题描述(Problem statement)

如图1所示, 设目标 P 作匀速直线运动, 状态变量由 t_0 时刻目标初始位置坐标和目标速度分量组成, 即 $X_k = (x_{t_0k} \ y_{t_0k} \ \dot{x}_k \ \dot{y}_k)^T$, 将方位量测方程经数学变换, 建立如下离散时变线性系统:

$$\begin{cases} X_{k+1} = \Phi_k X_k, \\ Z_{k+1} = H_{k+1} X_{k+1}. \end{cases} \quad (1)$$

其中状态转移矩阵 $\Phi_k = I_{4 \times 4}$ 是单位矩阵.

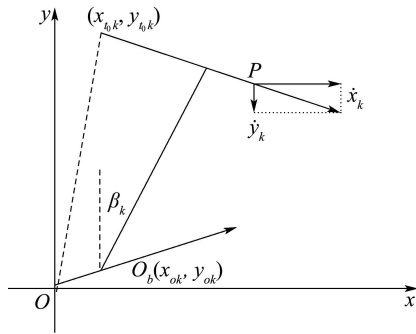


图1 目标 P 与观测器 O_b 运动态势

Fig. 1 Kinematic state of target P and observer O_b

测量矩阵为

$$H_k = [\cos \beta_k \ -\sin \beta_k \ (t_k - t_0) \cos \beta_k \ -(t_k - t_0) \sin \beta_k]. \quad (2)$$

伪量测为

$$G_m = \sum_{i=1}^m H_i^T H_i = \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} \cos^2 \beta_i & -\sin \beta_i \cos \beta_i & \cos^2 \beta_i & -\sin \beta_i \cos \beta_i \\ -\sin \beta_i \cos \beta_i & \sin^2 \beta_i & -\sin \beta_i \cos \beta_i & \sin^2 \beta_i \\ \cos^2 \beta_i & -\sin \beta_i \cos \beta_i & \cos^2 \beta_i & -\sin \beta_i \cos \beta_i \\ -\sin \beta_i \cos \beta_i & \sin^2 \beta_i & -\sin \beta_i \cos \beta_i & \sin^2 \beta_i \end{pmatrix}. \quad (7)$$

将求和符号放入行列式中, 根据Laplace行列式展开定理, 将行列式按 $|G_m|$ 二阶子式展开、整理得到如下4重和:

$$|G_m| = \sum_{i,j,k,l=1}^m t_i t_j \sin \beta_{ij} \sin \beta_{kl} [-t_i t_k \sin \beta_{ik} \sin \beta_{jl} + (t_i t_j + t_k t_l) \cos \beta_i \sin \beta_j \cos \beta_k \sin \beta_l]. \quad (8)$$

其次, 对上述和号下的表达式用4重函数 $S_1(i, j, k, l)$ 表示, 根据有限和的可交换性, 有

$$|G_m| = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^m [S_1(i, j, k, l) + S_1(j, i, k, l) +$$

$$Z_k = x_{ok} \cos \beta_k - y_{ok} \sin \beta_k, \quad (3)$$

其中: x_{ok}, y_{ok} 为 t_k 时刻观测器坐标; β_k 为 t_k 时刻目标方位测量:

$$\beta_k = \operatorname{tg}^{-1} \frac{x_{t_0k} + (t_k - t_0)\dot{x}_k - x_{ok}}{y_{t_0k} + (t_k - t_0)\dot{y}_k - y_{ok}}. \quad (4)$$

本文主要研究观测系统(1)可观测性的理论结果, 因此没有考虑观测系统的各种误差.

在 $[t_0, t_m]$ 观测时间内系统(1)可观测判别的Gram矩阵为 $G_m = \sum_{i=1}^m H_i^T H_i$.

3 主要结果(Main result)

定理1 系统(1)在观测时间 $[t_0, t_m]$ 内可观测的充分必要条件是: 存在正整数 $1 \leq i_0 < j_0 < k_0 < l_0 \leq m$, 使得 $\Delta(t_{i_0}, t_{j_0}, t_{k_0}, t_{l_0}) \neq 0$, 其中

$$\begin{aligned} \Delta(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = & -\tau_{12}\tau_{34} \sin \beta_{14} \sin \beta_{13} \cos \beta_{12} + \\ & \tau_{13}\tau_{24} \sin \beta_{14} \cos \beta_{13} \sin \beta_{12} - \\ & \tau_{23}\tau_{14} \cos \beta_{14} \sin \beta_{13} \sin \beta_{12} \end{aligned} \quad (5)$$

称为可观测判别式; 时间和方位的双下标表示取差: $\tau_{ij} = \tau_j - \tau_i, \beta_{ij} = \beta_j - \beta_i$.

4 主要结果证明(Proof of main result)

为证明上述主要结果, 先证明下述引理.

引理1 关于Gram矩阵 G_m , 其行列式为:

$$|G_m| = \frac{1}{24} \sum_{i,j,k,l=1}^m \Delta^2(t_i, t_j, t_k, t_l). \quad (6)$$

证 由于行列式、三角函数以及求和的交替, 式(6)的推导是复杂的, 这里只给出思路和推导技巧. 先写出 G_m 的详细表达式如下:

$$S_1(i, j, l, k) + S_1(j, i, l, k)]. \quad (9)$$

对式(9)进行归类、整理得

$$|G_m| = \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^m t_i t_j \sin \beta_{ij} \sin \beta_{kl} \Delta(t_i, t_j, t_k, t_l). \quad (10)$$

类似地, 令 $S_2(i, j, k, l)$ 表示式(10)右端求和项, 并应用可观测判别式性质(见附录), 有

$$|G_m| = \frac{1}{12} \sum_{i,j,k,l=1}^m [S_2(i, j, k, l) +$$

$$S_2(i, k, j, l) + S_2(k, j, i, l)] = \frac{1}{12} \sum_{i,j,k,l=1}^m \Delta(t_i, t_j, t_k, t_l) [t_i t_j \sin \beta_{ij} \sin \beta_{kl} - t_i t_k \sin \beta_{ik} \sin \beta_{jl} + t_j t_k \sin \beta_{jk} \sin \beta_{il}]. \quad (11)$$

最后, 令 $S_3(i, j, k, l)$ 表示式(11)右端求和项, 并再次应用可观测判别式性质以及将 $\beta_{jl} = \beta_{il} - \beta_{ij}$, $\beta_{jk} = \beta_{ik} - \beta_{ij}$, $\beta_{kl} = \beta_{il} - \beta_{ik}$ 代入表达式中得到

$$|G_m| = \frac{1}{24} \sum_{i,j,k,l=1}^m [S_3(i, j, k, l) + S_3(i, j, l, k)] = \frac{1}{24} \sum_{i,j,k,l=1}^m \Delta^2(t_i, t_j, t_k, t_l). \quad (12)$$

此即式(6), 引理1证毕.

定理1证明 根据现代控制理论, 系统(1)在观测时间 $[t_0, t_m]$ 内可观测的充分必要条件是矩阵 G_m 满秩, 即 $|G_m| \neq 0$. 由于

$$\sum_{i,j,k,l=1}^m \Delta^2(t_i, t_j, t_k, t_l) \neq 0 \Leftrightarrow \exists: 1 \leq i_0 < j_0 < k_0 < l_0 \leq m$$

s.t. $\Delta(t_{i_0}, t_{j_0}, t_{k_0}, t_{l_0}) \neq 0$,

因此, 定理1结论显然成立. 证毕.

5 结论(Conclusions)

关于纯方位测量系统的可观测性问题, 通过计算纯方位系统可观测判断的Gram矩阵, 分析得到并证明了如下结论:

1) 可观测的方位判断准则: 系统可观测的充分必要条件是, 存在4个时刻, 其方位观测量满足 $\Delta(\tau_1^0, \tau_2^0, \tau_3^0, \tau_4^0) \neq 0$;

它的逆否命题是: 系统不可观测的充分必要条件是对于任意4个时刻的方位满足 $\Delta(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = 0$.

2) 当 $\sin \beta_{14} \sin \beta_{13} \sin \beta_{12} \neq 0$ 时

$$\Delta(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) = (-\tau_{12}\tau_{34}\text{ctg}\beta_{12} + \tau_{13}\tau_{24}\text{ctg}\beta_{13} - \tau_{23}\tau_{14}\text{ctg}\beta_{14}) \sin \beta_{14} \sin \beta_{13} \sin \beta_{12}, \quad (13)$$

因此当系统不可观测时, 若 $\sin \beta_{14} \sin \beta_{13} \sin \beta_{12} \neq 0$, 则

$$-\tau_{12}\tau_{34}\text{ctg}\beta_{12} + \tau_{13}\tau_{24}\text{ctg}\beta_{13} - \tau_{23}\tau_{14}\text{ctg}\beta_{14} = 0. \quad (14)$$

这扩展了文献[5]的公式(4.7)的应用条件, 在文献[5]中要求目标和观测器都匀速直线运动.

3) 通过三角函数运算整理可以得到:

$$\Delta(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4) =$$

$$\tau_{13}\tau_{24} \sin \beta_{12} \sin \beta_{34} - \tau_{12}\tau_{34} \sin \beta_{13} \sin \beta_{24}. \quad (15)$$

这扩展了文献[3]中获得的用4个方位求目标运动参数解存在唯一的充要条件(见文献[3]的式(8)).

参考文献(References):

- [1] LINGDGREN A G, GONG K F. Position and velocity estimation via bearing observations[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1978, 14(4): 567 – 577.
- [2] NARDONE S C, AIDALA V J. Observability criteria for bearings-only target motion analysis[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1981, 17(2): 162 – 166.
- [3] 董志荣. 论隐蔽攻击[J]. 火控技术, 1982, 7(3): 1 – 11. (DONG Zhirong. On concealment attack[J]. *Fire Control Technology*, 1982, 7(3): 1 – 11.)
- [4] FOGEL E, GAVISH M. Nth-Order dynamics target observability from angle measurements[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1988, 24(3): 305 – 308.
- [5] 董志荣. 舰艇指挥控制系统的理论基础[M]. 北京: 国防工业出版社, 1995. (DONG Zhirong. *The Theory Bases of Navel Vessels Command and Control System*[M]. Beijing: National Defence Industry Publishing Corporation, 1995.)
- [6] 潘泉, 戴冠中, 张洪才. 被动跟踪可观测性的非线性系统方法[J]. 信息与控制, 1997, 26(3): 168 – 173. (PAN Quan, DAI Guanzhong, ZHANG Hongcai. Nonlinear observability method for bearing-only target motion analysis[J]. *Information and Control*, 1997, 26(3): 168 – 173.)
- [7] PASSERIEUX, VAN CAPPEL D. Optimal observer maneuver for bearings-only tracking[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1998, 34(3): 777 – 778.
- [8] TAO X J, ZOU C R, HE Z Y. Passive target tracking using maximum likelihood estimation[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1996, 32(4): 1348 – 1354.
- [9] XU B L, WANG Z Q. An intelligent algorithm for bearings-only maneuvering target tracking[C] // *Proceedings of the Sixth International Conference on Machine Learning and Cybernetics*. [S.l.]: [s.n.], 2007: 100 – 105.
- [10] MUSICKI D. Bearings only multi-sensor maneuvering target tracking[J]. *Systems & Control Letters*, 2008, 51(3): 216 – 221.
- [11] BREHARD T, LECADRE J P. Closed-form posterior cramer-rao bounds for bearings-only tracking[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(4): 1198 – 1223.

附录 可观测判别式性质(Appendix Properties of observability discriminant)

可观测判别式有如下性质:

1) 交换可观测判别式 $\Delta(t_i, t_j, t_k, t_l)$ 中任意两个变量, 其值改变符号;

2) 若 t_i, t_j, t_k, t_l 中存在两个相等时刻, 则 $\Delta(t_i, t_j, t_k, t_l) = 0$.

性质1)可以应用三角函数性质推导出来, 性质2)可以由性质1)推导出来.

作者简介:

李洪瑞 (1963—), 男, 博士研究生, 研究员, 1992年重庆大学毕业获硕士学位, 2002年至2003年在俄罗斯国立圣彼得堡海洋技术大学作访问学者, 主要研究方向为水下信息系统, E-mail: wylhr863@163.com;

盛安冬 (1964—), 男, 博士生导师, 南京理工大学自动化学院研究员, 主要研究方向为非线性估计与应用.