

基于 $K_p = LDU$ 分解的多变量离散时间系统鲁棒 模型参考自适应控制

李俊领, 陈 伟, 邵长彬

(曲阜师范大学 自动化研究所, 山东 曲阜 273165)

摘要: 针对具有未建模动态且相对阶大于1的一类多变量离散时间系统, 利用其高频增益矩阵分解建立新的参数模型, 在较弱假设下, 进一步研究了直接型鲁棒模型参考自适应控制问题. 由离散时间系统的交换引理, 建立了闭环系统的所有信号与规范化信号的联系. 以一种系统化的方法, 严格地分析了闭环系统的稳定性与鲁棒性.

关键词: 模型参考自适应控制; 动态规范化信号; 多变量离散时间系统; LDU 分解

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Robust model-reference adaptive control using $K_p = LDU$ factorization for multivariable discrete-time systems

LI Jun-ling, CHEN Wei, SHAO Chang-bin

(Institute of Automation, Qufu Normal University, Qufu Shandong 273165, China)

Abstract: For a class of multivariable discrete-time systems with unmodeled dynamics and a relative order greater than one, we develop the parametric models by factorizing the gain matrix in high frequencies. Based on these models, we design a direct robust model-reference adaptive controller under the weak assumptions. By the swapping lemmas for the discrete-time systems, we establish the relations among all signals in the closed-loop with the normalized signals. The stability and robustness of the closed-loop system are analyzed rigorously in a systematic way.

Key words: model-reference adaptive control; dynamically normalized signal; multivariable discrete-time systems; LDU factorization

1 引言(Introduction)

近20年来, 多变量系统模型参考自适应控制(MRAC)问题一直受到关注, 常见方法参见文献[1~5], 但要对系统高频增益矩阵 K_p 作出严格的假设限制, 随后针对连续时间系统来减弱该假设限制而深入开展的工作可参见文献[6~10]. 控制复杂系统往往是通过数字计算机进行的, 那么直接研究多变量离散时间系统MRAC, 自然有更大的现实意义.

文献[2]先由贝祖恒等式将系统模型化为预测器参数形式, 然后设计自适应律在线校正未知参数, 再由必然等价原理推导控制器, 其中却要求一时变矩阵可逆. 本文为避开这一问题, 采用由高频增益矩阵分解建立起来的新参数化模型, 该方案是文献[11]的结论在多输入多输出情形的推广. 尽管文献[4]对理想情形的多变量连续时间与离散时间系统, 以一种

统一的形式, 利用高频增益矩阵的分解, 提出自适应控制方案的设计方法, 但稳定性分析并没有给出, 并且本文针对具有未建模动态且相对阶大于1的更一般系统来研究. 主要工作有: 1) 针对多变量离散时间系统, 基于高频增益 $K_p = LDU$ 分解^[7]建立新的参数化模型, 合理设置投影条件, 由多变量投影梯度算法, 构造新的自适应律, 使其具有很好的性质(引理1). 2) 通过深入考察系统内在信号幅值的大小关系, 给出一个较小的参数估计误差规范化信号. 该规范化信号既能有效防止未知参数在线校正过程中出现有限时间逃逸现象, 又能减弱因过大的规范化信号而降低未知参数的校正速度. 3) 找出闭环系统的所有信号与虚拟规范化信号之间的关系, 正如多变量连续时间系统一样, 以一种系统化的方法严格地分析了自适应系统的稳定性和鲁棒性.

2 问题描述(Problem statement)

考虑多变量离散时间系统

$$(I + \mu_1 \Delta_1(z))y(t) = G(z)(I + \mu_2 \Delta_2(z))u(t), \quad (1)$$

其中: $t = \{1, 2, \dots\}$, $y(t), u(t) \in \mathbb{R}^m$ 是输入和输出, $G(z) = (g_{ij}(z)) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 符号 z 为 $\mathcal{Z}$ 变换变量或时间提前算子, $g_{ij}(z)$ 中的参数是未知常数, $\Delta_1(z), \Delta_2(z) \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 表示未建模动态, $\mu_1, \mu_2 > 0$ 为其相应幅值. 目标是设计控制律 u 使得闭环系统的所有信号都有界, 且系统的输出 y 尽可能的跟踪如下参考模型的输出 y_m :

$$y_m(t) = W_m(z)r(t), \quad t = \{1, 2, \dots\}, \quad (2)$$

其中: $W_m(z) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, 参考输入信号 $r(t) \in \mathbb{R}^m$, 且 $r \in L_\infty$. 为此对系统(1)和(2)作如下假设:

A1) $G(z)$ 的传输零点都在单位圆内, 且 $G^{-1}(z)$ 的每一个元素都在 $|z| \geq \sqrt{\delta}$ 上解析, $\delta \in (0, 1]$ 已知.

A2) $G(z)$ 严格正则且满秩, 其修正左互作用器矩阵(left interactor matrix) $\xi_m(z)$ 是已知对角形阵.

A3) $G(z)$ 的可观性指数 ν 已知.

A4) 高频增益矩阵 $K_p = \lim_{z \rightarrow \infty} \xi_m(z)G(z)$ 是有限且非奇异的, 其顺序主子式的符号已知.

A5) $G(z)\Delta_1(z), \Delta_2(z)$ 是正则的, 且它们的每个元素都在 $|z| \geq \sqrt{\delta}$ 上解析.

M1) $W_m(z)$ 的所有零极点都是稳定的, 且它的每一个元素都在 $|z| \geq \sqrt{\delta}$ 上解析.

M2) $W_m(z)$ 在无穷远处的零点结构与 $G(z)$ 相同, 即 $\lim_{z \rightarrow \infty} \xi_m(z)W_m(z)$ 是有限且非奇异的. 不失一般性, 假设 $W_m(z) = \xi_m^{-1}(z)$.

注 1 上述假设是文[11]中的假设在多变量情形的推广, 这也与文[1,4,12]中的连续系统假设相对应, A1) 是为实现控制目标的一个基本假设; 假设A2)~A4) 只需把文[1,4]中多变量连续系统的传递函数矩阵中的变量作相应改动即可; 另外的参考模型假设M1)M2)和不确定项的假设A5)也分别对应单变量情形^[11]的相应假设.

注 2 为简洁起见, 下面表述中有时用 x 表示时间函数或时间向量值函数 $x(t)$, $\nabla(\cdot)$ 表示差分算子, 即

$$\nabla x(t) = x(t+1) - x(t);$$

向量 $x(t) \in \mathcal{D}(\omega)$ 表示向量

$$x(t) \in \{ \{x(t)\} \mid \sum_{t=k_0}^{t=k_0+N-1} x^T(t)x(t) \leq c_0 \sum_{t=k_0}^{t=k_0+N-1} \omega(t) + c_1 \},$$

其中 $\omega(t) > 0$, c_0, c_1 为正常数, 整数 $k_0 \geq 0, N \geq 1$ 可任意取值. 向量 $x(t) \in \mathcal{S}(\nu)$ 表示

$$x(t) \in \{ \{x(t)\} \mid \sum_{t=t_0}^{k_0+N-1} x^T(t)x(t) \leq c_0 \nu N + c_1 \},$$

其中常数 $\nu \geq 0$, 独立于 ν 的常数 $c_0, c_1 > 0$, 整数 $k_0 \geq 0, N \geq 1$ 可任意取值. 用 X 表示微分算子 $X(z)$, 用 $\|\cdot\|_{2\delta}$ 表示 $L_{2\delta}$ -范数^[4].

3 控制器设计(Controller design)

理想情况即系统为 $y(t) = G(z)u(t)$ 时, 若 $G(z)$ 的参数已知, 由匹配条件^[1,5]使 $y(t) = y_m(t)$ 的控制律为

$$u^* = \theta^{*T} \omega, \quad (3)$$

$$\theta^{*T} = [\theta_1^{*T}, \theta_2^{*T}, \theta_3^{*T}, \theta_4^{*T}],$$

$$\theta_1^*, \theta_2^* \in \mathbb{R}^{m(\nu-1) \times m},$$

$$\theta_3^*, \theta_4^* \in \mathbb{R}^{m \times m}, \quad \omega = [\omega_1, \omega_2, y, r]^T,$$

$$\omega_1 = \frac{A(z)}{\Lambda(z)}u, \quad \omega_2 = \frac{A(z)}{\Lambda(z)}y,$$

$$A(z) = [I, Iz, \dots, Iz^{\nu-2}]^T, \quad I \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

$\Lambda(z)$ 是首一的稳定多项式, 且 $\Lambda^{-1}(z)$ 在 $|z| \geq \sqrt{\delta}$ 上解析. 由式(1)~(3), $e(t) = y(t) - y_m(t)$ 和 $W_m(z) = \xi_m^{-1}(z)$, 类似于文[13], 经整理易得

$$\xi_m e = K_p (u - \theta^{*T} \omega) + \eta_m, \quad (4)$$

$$\eta_m = K_p (I - \theta_1^{*T} \frac{A}{\Lambda}) (\mu_2 \Delta_2 u - \mu_1 G^{-1} \Delta_1 y). \quad (5)$$

由 $K_p = LDU$ 分解^[7], U, L 分别是单位上下三角形, $D = \text{diag}\{d_i\}$, $d_i = \Sigma_i / \Sigma_{i-1}$, Σ_i 是 K_p 的第 i 阶顺序主子式, $i = 1, 2, \dots, m$. 再引进分解 $Uu = u - (I - U)u$ 和 $L^{-1} = I - \Lambda^*$, $\Lambda^* = I - L^{-1}$ 是对角线全为零元下三角矩阵. 为减少在线估计参数个数, 类似文[13], 把该些分解代入式(4)经简单计算得

$$\xi_m(z)e = \Lambda^* \xi_m(z)e + D(u - [\Theta_1^{*T} \Omega_1, \dots, \Theta_m^{*T} \Omega_m]^T) + L^{-1} \eta_m, \quad (6)$$

分解后得到的新未知参数 Θ_i^{*T} 是由 $U\theta^{*T}$ 的第 i 行与 $(I - U)$ 的第 i 行中非零元串接成的行向量, $\Omega_i^T = [\omega_1^T, \omega_2^T, y^T, r_1, \dots, r_i, u_{i+1}, \dots, u_m]$, $i = 1, \dots, m$. 由式(6), 取控制律为

$$u = [\Theta_1^T \Omega_1, \Theta_2^T \Omega_2, \dots, \Theta_m^T \Omega_m]^T, \quad (7)$$

其中 Θ_i 是 Θ_i^* 的估计. 定义 $W(z)^{-1} = f(z)$, 其次数为 $W_m(z)$ 中所有元素的最大相对阶, 且 $W(z)$ 在 $|z| \geq \sqrt{\delta}$ 上解析. 定义

$$\bar{z} = -W \xi_m e, \quad \Phi_i = W \Omega_i, \quad \bar{z}_0 = -W u. \quad (8)$$

用 $W(z)$ 作用式(6)两边, 定义 $\Lambda^* \bar{z} = [0, \Lambda_2^{*T} \zeta_2, \dots, \Lambda_m^{*T} \zeta_m]$, 行向量 Λ_i^{*T} 是由 Λ^* 的第 i 行中的非零元素构成, $\zeta_i^T = [\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_{i-1}]$, $\bar{z}_i$ 是 $\bar{z}$ 的第 i 个元素, 则基于矩阵分解的新参数化模型和其估计为

$$\bar{z} = [0, \Lambda_2^{*T} \zeta_2, \dots, \Lambda_m^{*T} \zeta_m]^T + D([\Theta_1^{*T} \Phi_1, \dots,$$

$$\Theta_m^* \Phi_m]^T + \bar{z}_0) - W(z)L^{-1}\eta_m. \quad (9)$$

$$\hat{z} = [0, \Lambda_2^T \zeta_2, \dots, \Lambda_m^T \zeta_m]^T + \hat{D}([\Theta_1^T \Phi_1 \dots, \Theta_m^T \Phi_m]^T + \bar{z}_0). \quad (10)$$

上式中 $\hat{z}, \Lambda_i, \hat{D}$ 分别为 $\bar{z}, \Lambda_i^*, D$ 的估计. 定义 $\xi = [\Theta_1^T \Phi_1, \dots, \Theta_m^T \Phi_m]^T + \bar{z}_0$, 则规范化估计误差 ε 为

$$\varepsilon \triangleq \frac{\bar{z} - \hat{z}}{\eta^2} = -\frac{1}{\eta^2}([0, \tilde{\Lambda}_2^T \zeta_2, \dots, \tilde{\Lambda}_m^T \zeta_m]^T + \tilde{D}\xi + D[\tilde{\Theta}_1^T \Phi_1, \dots, \tilde{\Theta}_m^T \Phi_m]^T + \eta_m). \quad (11)$$

其中:

$$\begin{aligned} \tilde{\Lambda}_i &= \Lambda_i - \Lambda_i^*, \quad \tilde{D} = \text{diag}\{\hat{d}_i - d_i\}, \\ \tilde{\Theta}_i &= \Theta_i - \Theta_i^*, \quad \eta_m = W(z)L^{-1}\eta_m, \\ \eta^2(t) &= 1 + \zeta_m^T \zeta_m + \xi^T \xi + \Phi_1^T \Phi_1 + \bar{r}^T \bar{r}, \end{aligned} \quad (12)$$

注3 在式(12)中, $\bar{r} = W(z)r$. 考虑到被规范化向量的内在联系, 规范化信号 $\eta(t)$ 比以往文献中的要小, 这样有利于提高参数的校正速度, 从而最终改善闭环系统瞬态性能.

选取 $\Lambda_i, \hat{d}_i, \Theta_i$ 的自适应律为

$$\begin{cases} \nabla \Lambda_i(t) = \gamma_{L_i} \varepsilon_i \zeta_i + \alpha_{\Lambda_i} \frac{M_0 - |\bar{\Lambda}_i|}{|\bar{\Lambda}_i|} \bar{\Lambda}_i, \\ \nabla \hat{d}_i(t) = \gamma_{D_i} \varepsilon_i \xi_i + \alpha_{\hat{d}_i} \frac{M_0 - |\bar{\hat{d}}_i|}{|\bar{\hat{d}}_i|} \bar{\hat{d}}_i, \\ \nabla \Theta_i(t) = \gamma_{\Theta_i} \text{sgn}(d_i) \varepsilon_i \Phi_i + \alpha_{\Theta_i} \frac{M_0 - |\bar{\Theta}_i|}{|\bar{\Theta}_i|} \bar{\Theta}_i. \end{cases} \quad (13)$$

自适应增益 $0 < \gamma_{L_i}, \gamma_{D_i} < 1, 0 < \gamma_{\Theta_i} |d_i| < 1$; 初值参数满足 $\max\{\Lambda_i^T(0)\Lambda_i(0), \hat{d}_i^2(0), \Theta_i^T(0)\Theta_i(0)\} \leq M_0^2$, M_0 是满足 $\max\{\Lambda_i^{*T} \Lambda_i^*, d_i^2, \Theta_i^{*T} \Theta_i^*\} \leq M_0^2$ 的已知正常数;

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_i &= \Lambda_i + \gamma_{L_i} \varepsilon_i \zeta_i, \quad \bar{\hat{d}}_i = \hat{d}_i + \gamma_{D_i} \varepsilon_i \xi_i, \\ \bar{\Theta}_i &= \Theta_i + \gamma_{\Theta_i} \text{sgn}(d_i) \varepsilon_i \Phi_i, \\ \alpha_{\Lambda_i} &= \alpha_{\hat{d}_i} = \alpha_{\Theta_i} = \begin{cases} 0, & |\bar{\Lambda}_i| \leq M_0, \\ 1, & |\bar{\Lambda}_i| > M_0. \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

4 主要结果(Main results)

引理1 自适应律(13)保证:

- 1) $\Lambda_i(t), \hat{d}_i(t), \Theta_i(t) \in L_\infty$;
- 2) $\nabla \Lambda_i(t), \nabla \hat{d}_i(t), \nabla \Theta_i(t), \varepsilon(t)\eta(t) \in L_\infty \cap \mathcal{D}(|\frac{\eta_m}{\eta}|)$.

证 见附录.

引理2^[13] 考虑多变量离散时间系统 $y = H(z)u$, 若 $H(z) = (h_{ij}(z)) \in \mathbb{R}^{p \times q}$ 是正则矩阵,

$y \in \mathbb{R}^q, u \in \mathbb{R}^p$, 且对 $\forall \delta \in (0, 1], H(z)$ 的每一元素都在 $|z| \geq \sqrt{\delta}$ 上解析, 若 $u \in L_{2e}$, 则

$$\begin{aligned} \|y_t\|_{2\delta} &\leq \|H(z)\|_{\infty\delta} \|u_t\|_{2\delta}, \\ \|H(z)\|_{\infty\delta} &= \sqrt{pq} \max_{i,j} \|h_{ij}(z)\|_{\infty\delta}, \\ \|h_{ij}(z)\|_{\infty\delta} &= \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} |h_{ij}(\sqrt{\delta}e^{j\omega})|; \end{aligned}$$

若 $H(z)$ 是严格正则的, 则

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \|zH(z)\|_{2\delta} \|u_t\|_{2\delta}, \\ \|zH(z)\|_{2\delta} &= \sqrt{pq} \max_{i,j} \|zh_{ij}(z)\|_{2\delta}, \\ \|zh_{ij}(z)\|_{2\delta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} |\sqrt{\delta}e^{j\omega} h_{ij}(\sqrt{\delta}e^{j\omega})|^2 d\omega \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

下面分析由式(7)(13)组成的多变量离散时间鲁棒MRAC方案. 由 $e(t)$ 的定义、式(1)(2)(4)(7)和假设 $W_m(z) = \xi_m^{-1}(z)$ 及假设A1)得

$$\begin{cases} y = W_m(r + LD\tilde{u}) + \eta_y, \\ u = G^{-1}W_m(r + LD\tilde{u}) + \eta_u, \\ \eta_y = W_m\eta_m, \quad \tilde{u} = [\tilde{\Theta}_1^T \Omega_1, \dots, \tilde{\Theta}_m^T \Omega_m]^T, \\ \eta_u = G^{-1}\eta_y - (\mu_2 \Delta_2 u - \mu_1 G^{-1} \Delta_1 y). \end{cases} \quad (15)$$

为分析所有信号的有界性, 定义虚拟规范化信号

$$\eta_f^2(t) \triangleq 1 + \|u_{t-1}\|_{2\delta}^2 + \|y_{t-1}\|_{2\delta}^2. \quad (16)$$

引理3 虚拟信号 $\eta_f(t)$ 有以下性质:

- 1) $\eta_m/\eta_f, \|(\omega_1)_{t-1}\|_{2\delta}/\eta_f, \|(\omega_2)_{t-1}\|_{2\delta}/\eta_f, \omega_1(t)/\eta_f, \omega_2(t)/\eta_f, \| \omega_{t-1} \|_{2\delta}/\eta_f, \|(\Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta}/\eta_f, \| \bar{z}_{t-1} \|_{2\delta}/\eta_f, \|(\zeta_i)_{t-1}\|_{2\delta}/\eta_f \in L_\infty$.

2) 若 $\Theta_i(t) \in L_\infty$. 则

$$\begin{aligned} y/\eta_f, u/\eta_f, \omega/\eta_f, \Omega_i/\eta_f, \\ W_3(z)\Omega_i/\eta_f, \bar{z}_0/\eta_f, \\ \|W_3(z)\Omega_i\|_{2\delta}/\eta_f, \bar{z}/\eta_f, \\ \Phi_i/\eta_f, \xi/\eta_f, \eta/\eta_f \in L_\infty, \end{aligned}$$

其中 $i = 1, 2, \dots, m$, $W_3(z)$ 是任一正则函数, 且它的每一元素在 $|z| \geq \sqrt{\delta}$ 上解析.

证 见附录.

定理1 由系统(1)、参考模型(2)、控制律(7)和自适应律(13)组成的多变量离散时间直接型鲁棒MRAC方案, 如果假设A1)~A5)M1)M2)成立, 则

存在正常数 μ^* , 对任意的 $\mu = \max\{\mu_1, \mu_2\} \in [0, \mu^*)$, 有: 1) 闭环系统的所有信号都有界; 2) 跟踪误差 $e \in \mathcal{S}(a_0^2 + \mu^2(\Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2))$, 其中:

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \|WL^{-1}N\Delta_2\|_{\infty\delta} + \|WL^{-1}NG^{-1}\Delta_1\|_{\infty\delta}, \\ \Delta_4 &= \|zW(z)L^{-1}N\Delta_2\|_{2\delta} + \|zW(z)L^{-1}NG^{-1}\Delta_1\|_{2\delta}, \\ \Delta_5 &= \|zW_m(z)N\Delta_2\|_{2\delta} + \|zW_m(z)NG^{-1}\Delta_1\|_{2\delta}, \\ N &= K_p(I - \theta_1^{*T} \frac{A(z)}{\Lambda(z)}).\end{aligned}$$

证 见附录.

注 4 该定理正如连续时间系统一样, 以一种系统化的方法, 严格地分析了闭环系统的稳定性与鲁棒性.

5 仿真(Simulation)

考察系统(1),

$$G(z) = \begin{bmatrix} \frac{k_1(z+b)}{(z+a)(z+a)} & \frac{k_2(z+b)}{(z+a)(z+a)} \\ \frac{k_3}{(z+a)(z+b)} & \frac{k_4 z}{(z+b)(z+a)^2} \end{bmatrix},$$

系统参数 a, b 和 k_i 是未知的常数, $i = 1, 2, 3, 4$; 但满足不等关系

$$\begin{aligned}|a| < 1, |b| < 1, \left| \frac{k_1 k_4}{k_2 k_3} - a \right| < 1, \\ 1.5 \leq k_1 < 2.5, 1 \leq k_1 k_4 - k_2 k_3 < 1.5,\end{aligned}$$

由此可验证该系统满足系统假设. 选取参考模型

$$y_m = W_m(z)r,$$

其中:

$$\begin{aligned}W_m(z) &= \text{diag}\left\{\frac{1}{(z+0.5)}, \frac{1}{(z+0.5)^2}\right\}, \\ r &= [\text{step}, \text{step}]^T,\end{aligned}$$

滤波器

$$W(z) = \frac{1}{(z+0.5)^2},$$

多项式

$$\Lambda(z) = (z+0.25)^2.$$

结合本文的设计方案, 通过MATLAB/SIMULINK进行仿真, 选取系统参数

$$a = 0.5, b = 0.25, k_1 = 2, k_2 = k_3 = k_4 = 1;$$

未建模部分

$$\Delta_1(z) = \Delta_2(z) = \frac{z}{z+0.5}, \mu_1 = \mu_2 = 0.1,$$

校正参数初值

$$\Theta_i(0) = [0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{12}, i = 1, 2, \Lambda_2(0) = 0.2$$

和 $\hat{d}_1(0) = 0, \hat{d}_2(0) = 0$.

图1给出了方案的仿真结果.

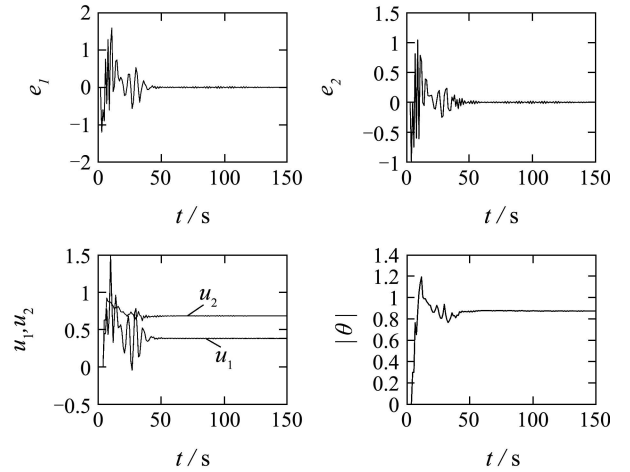


图1 跟踪误差、控制量和控制参数向量的范数分别对时间的响应

Fig. 1 The response of tracking error and the control and the norm of the controller parameters versus time

6 结论(Conclusion)

针对具有未建模动态且相对阶大于1的一般多变量离散时间系统, 利用其高频增益矩阵 $K_p = LDU$ 分解建立的新参数模型, 在较弱假设条件下, 考虑了直接型鲁棒模型参考自适应控制问题. 通过利用离散时间系统交换引理, 建立了闭环系统的所有信号与规范化信号的联系, 正如连续时间系统一样, 以一种系统化的方法, 严格地分析了闭环系统的稳定性与鲁棒性. 但仍有一些问题值得进一步讨论, 比如, 如何具体针对未建模动态和输入干扰, 像单输入单输出连续时间系统那样, 研究多变量离散时间的瞬态性能提高的方案; 能否用本文的系统化方法来分析多速率离散时间系统^[14].

参考文献(References):

- [1] IOANNOU P A, SUN J. *Robust Adaptive Control*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1996.
- [2] GOODWIN G C, SIN K S. *Adaptive Filtering, Prediction and Control*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1984.
- [3] NARENDRA K S, ANNASWAMY A M. *Stable Adaptive Systems*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.
- [4] TAO G. *Adaptive Control Design and Analysis*[M]. New York: Wiley-Interscience, 2003.
- [5] SASTRY S S, BODSON M. *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 1989.
- [6] ORTEGA R, HSU L, ASTOLFI A. Adaptive control of multivariable systems with reduce prior knowledge[C]//*Proceeding of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, Florida, USA: IEEE, 2001: 4198 - 4203.
- [7] IMAI A K, COSTA R R, HSU L, et al. Multivariable MRAC using hight frequency gain matrix factorization[C]//*Proceeding of the 40th*

IEEE conference on Decision and Control. Orlando, Florida, USA: IEEE, 2001: 1193 – 1199.

- [8] XIE X J, ZHANG Z Q. Robust direct model reference adaptive control using factorization for multivariable plants[J]. *International Journal of Control*, 2005, 78(10): 762 – 772.
- [9] 解学军, 张正强. 多变量系统的基于矩阵 $K_p = LDU$ 分解的鲁棒模型参考自适应控制[J]. 系统科学与数学, 2006, 26(2): 206 – 216. (XIE Xuejun, ZHANG Zhengqiang. Robust model reference adaptive control using matrix factorization for multivar systems[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2006, 26(2): 206 – 216.)
- [10] 林岩, 董文翰, 孙秀霞. 高频增益符号未知时的变结构模型参考自适应控制: 任意相对阶的控制律设计[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(3): 383 – 390. (LIN Yan, DONG Wenhan, SUN Xiuxia. Variable structure model reference adaptive control with unknown high frequency gain sign: general case[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(3): 383 – 390.)
- [11] XIE X J, LI J L. A robustness analysis of discrete-time direct model reference adaptive control[J]. *International Journal of Control*, 2006, 79(10): 1196 – 1204.
- [12] SINGH R P, NARENDRA K S. Prior information in the design of multivariable adaptive controllers[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 1984, 29(12): 1108 – 1111.
- [13] LI J L, XIE X J. Direct model reference adaptive control using $K_p = LDU$ factorization for multivariable discrete-time plants[J]. *Journal of Control Theory and Applications*, 2008, 6(4): 392 – 398.
- [14] DING F, CHEN T. Least squares based self-tuning control of dual-rate system[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 2004, 18(8): 697 – 714.
- [15] LI J L, XIE X J. Discrete-time direct model reference adaptive control: a systematic approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(10): 1048 – 1052.

附录(Appendix)

引理1的证明. 1) 由式(13)(14)知, 当 $|\bar{A}_i(t)| \leq M_0$ 时, $\alpha_{A_i} = 0$, $A_i(t+1) = \bar{A}_i(t)$, 则 $|A_i(t+1)| = |\bar{A}_i(t)| \leq M_0$; 当 $|\bar{A}_i(t)| > M_0$ 时, $\alpha_{A_i} = 1$, $A_i(t+1) = \frac{M_0}{|\bar{A}_i(t)|} \bar{A}_i(t)$, 则 $|A_i(t+1)| = M_0$. 因此, 对任意时间 $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$, 有 $A_i(t) \in L_\infty$. 同理可证 $\hat{d}_i(t), \Theta_i(t) \in L_\infty$.

2) 取类李雅普诺夫函数

$$V(\cdot) = \sum_{i=2}^m \gamma_{L_i}^{-1} \bar{A}_i^T \bar{A}_i + \sum_{i=1}^m \gamma_{D_i}^{-1} \bar{d}_i^2 + \sum_{i=1}^m \gamma_{\Theta_i}^{-1} |d_i| \bar{\Theta}_i^T \bar{\Theta}_i, \quad (A1)$$

沿着式(13), $V(\bar{A}_i, \bar{d}_i, \bar{\Theta}_i)$ 的增量 $\nabla V(\bar{A}_i, \bar{d}_i, \bar{\Theta}_i)$ 满足

$$\begin{cases} \nabla V(\bar{A}_i, \bar{d}_i, \bar{\Theta}_i) = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \Delta V_3, \\ \Delta V_1 = \sum_{i=2}^m \gamma_{L_i}^{-1} \nabla(\bar{A}_i^T(t) \bar{A}_i(t)), \\ \Delta V_2 = \sum_{i=1}^m \gamma_{D_i}^{-1} \nabla(\bar{d}_i^2(t)), \\ \Delta V_3 = \sum_{i=1}^m \gamma_{\Theta_i}^{-1} |d_i| \nabla(\bar{\Theta}_i^T(t) \bar{\Theta}_i(t)), \end{cases} \quad (A2)$$

那么经讨论可证明

$$\begin{cases} \Delta V_1 \leq \sum_{i=2}^m (2\bar{A}_i^T \zeta_i \varepsilon_i(t) + \gamma_{L_i} \zeta_i^T \zeta_i \varepsilon_i^2), \\ \Delta V_2 \leq \sum_{i=1}^m (2\bar{d}_i \xi_i \varepsilon_i + \gamma_{D_i} \xi_i^2 \varepsilon_i^2), \\ \Delta V_3 \leq \sum_{i=1}^m (2d_i \bar{\Theta}_i^T \Phi_i(t) \varepsilon_i + \gamma_{\Theta_i} |d_i| \Phi_i^T \Omega_i \varepsilon_i^2). \end{cases} \quad (A3)$$

上式的变量都省略了时间变量 t , 把式(A3)代入式(A2)的第1式整理得

$$\nabla V(\bar{A}_i, \bar{d}_i, \bar{\Theta}_i) \leq - \sum_{i=1}^m \alpha_i \varepsilon_i^2(t) \eta^2(t) + \sum_{i=1}^m \frac{\eta_{n,i}^2(t)}{\eta^2(t)}. \quad (A4)$$

其中: 常数 $\alpha_i > 0$, $\eta_{n,i}$ 是 η 的第 i 个分量. 接下来的证明类似于文献[1]中定理(8.5.6), 故结论成立.

引理3的证明 1) 根据式(5), $\eta_m = W(z)L^{-1}\eta_m$ 和 $W(z)$ 的定义及假设A5), 由文献[15]中离散时间交换引理1得

$$|(\eta_m)| \leq c\mu\Delta_4\eta_f, \quad (A5)$$

其中 Δ_4 的定义见定理1. 剩余部分证明类似文献[13]中引理3的证明.

2) 当 $\Theta_i \in L_\infty$ 时, $i = 1, \dots, m$. 由式(15)和文献[15]中离散时间交换引理1得

$$|\eta_y| \leq c\mu\Delta_5\eta_f, \quad (A6)$$

其中 Δ_5 的定义见定理1. 剩余部分证明类似文献[13]中引理3的证明.

定理1的证明 证明过程分为4步. 为简单起见, 证明过程中会用符号 c , 在不同位置来表示某个不同的正常数.

第1步 由式(5)(12)(15)结合前面的假设条件, 利用离散时间交换引理1^[15]得

$$\begin{aligned} \|y_{t-1}\|_{2\delta} &\leq c + c \sum_{i=1}^m \|(\bar{\Theta}_i \Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta} + \mu\Delta_6\eta_f, \\ \|u_{t-1}\|_{2\delta} &\leq c + c \sum_{i=1}^m \|(\bar{\Theta}_i \Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta} + \mu\Delta_7\eta_f, \end{aligned} \quad (A7)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Delta_6 &= \|W_m N \Delta_2\|_{\infty\delta} + \|W_m N G^{-1} \Delta_1\|_{\infty\delta}, \\ \Delta_7 &= \|G^{-1} W_m N \Delta_2\|_{\infty\delta} + \|(G^{-1} W_m N - I) G^{-1} \Delta_1\|_{\infty\delta}, \\ \mu &= \max\{\mu_1, \mu_2\}. \end{aligned}$$

由式(16)可得

$$\eta_f^2 \leq c + c \sum_{i=1}^m \|(\bar{\Theta}_i^T \Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta}^2 + c\mu^2(\Delta_6^2 + \Delta_7^2)\eta_f^2. \quad (A8)$$

第2步 利用离散时间交换引理^[15]及 $L_{2\delta}$ 范数的性质确定 $\|(\bar{\Theta}_i^T \Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta}$ 的上界. 由离散时间交换引理2^[15], $\bar{\Theta}_i^T \Omega_i$ 可表示为

$$[\bar{\Theta}_i^T \Omega_i](t-1) = F_1[\bar{\Theta}_i^T \Omega_i](t-2) + F_2[\bar{\Theta}_i^T \Omega_i](t-1), \quad (A9)$$

其中: $F_1 = (1 - F_2)z$, $F_2 = \frac{a_0^{n^*}}{(z + a_0)^{n^*}}$, a_0 是满足 $|a_0| \leq \sqrt{\delta}/2$ 的正常数, n^* 是 $W_m(z)$ 的所有元的最大相对阶. 由离散时间交换引理1^[15], $\bar{\Theta}_i^T \Omega_i$ 又可表示为

$$\tilde{\Theta}_i^T \Omega_i = W^{-1}(\tilde{\Theta}_i^T W \Omega_i + W_c W_b(z[\Omega_i]^T(z-1)\tilde{\Theta}_i)), \quad (\text{A10})$$

其中: W 见式(6)下面的定义, W_c , W_b 与 W 有相同的极点. 由式(7)(8)(11)(A10)知

$$\begin{cases} \tilde{\Theta}_i^T \Phi_i = -\frac{1}{d_i}(\varepsilon_i \eta^2 + \tilde{A}_i \zeta_i + \tilde{d}_i \xi_i + \eta_{n,i}), \\ \tilde{A}_1 \zeta_1 = 0, \\ \xi_i = -W_c(z)[W_b(z)z[\Omega_i]^T(z-1)\Theta_i]. \end{cases} \quad (\text{A11})$$

其中 ε_i , η_{ni} , ξ 分别是 ε , η_n , ξ 的第 i 个分量. 注意到 $(z-1)\tilde{\Theta}_i = (z-1)\Theta_i$, 由式(A5)和引理2,3得

$$\begin{cases} \|(W_c(W_b(z[\Omega_i]^T(z-1)\tilde{\Theta}_i)))_{t-1}\|_{2\delta} \leq \\ c\|((z-1)\tilde{\Theta}_i)\eta_f)_{t-1}\|_{2\delta}, \\ \|(\eta_{n,i})_{t-1}\|_{2\delta} \leq \|(\eta_n)_{t-1}\|_{2\delta} \leq c\mu\Delta_3\eta_f, \\ \|(\tilde{\Theta}_i^T \Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta} \leq c\|(\Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta} \leq c\eta_f, \\ \|(\varepsilon_i \eta^2)_{t-1}\|_{2\delta} \leq c\|(\varepsilon_i \eta \eta_f)_{t-1}\|_{2\delta}, \\ \|(\tilde{A}_i^T \zeta_i)_{t-1}\|_{2\delta} \leq c\|(\zeta_i)_{t-1}\|_{2\delta} \leq c\eta_f. \end{cases} \quad (\text{A12})$$

其中: c 表示不同的某个正常数. 由离散时间交换引理^[15]知, 当 $a_0 \in (0, \sqrt{\delta})$ 时, $\|F_1\|_{\infty\delta} \leq ca_0$, $\|F_2 W^{-1}\|_{\infty\delta} \leq ca_0^{n^*}$, 其中 c 是独立于 a_0 的某个正常数. 把式(A10)(A11)代入式(A9)后两边取 $L_{2\delta}$ -范数, 并结合式(A12)得

$$\begin{aligned} \|(\tilde{\Theta}_i^T \Omega_i)_{t-1}\|_{2\delta} &\leq (ca_0 + ca_0^{n^*} + ca_0^{n^*} \mu \Delta_3) \eta_f + \\ &ca_0^{n^*} \|(\tilde{g}_i \eta)_{t-1}\|_{2\delta}, \end{aligned} \quad (\text{A13})$$

其中 $\tilde{g}_i^2 = |\varepsilon_i \eta|^2 + |\tilde{\Theta}_i(t+1) - \tilde{\Theta}_i(t)|^2$.

第3步 利用离散时间Bellman-Gronwall引理^[4]确定闭环系统所有信号有界. 定义 $\tilde{g} = [\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_m]^T$. 由引理1易知 $\tilde{g} \in \mathcal{D}(|\frac{\eta_n}{\eta}|)$. 由式(A8)(A12)得

$$\begin{aligned} \eta_f^2 &\leq c + c(a_0^2 + a_0^{2n^*} + a_0^{2n^*} \mu^2 \Delta_3^2 + \mu^2 (\Delta_6^2 + \\ &\Delta_7^2)) \eta_f^2 + ca_0^{2n^*} \|(\tilde{g} \eta)_{t-1}\|_{2\delta}^2. \end{aligned} \quad (\text{A14})$$

由推导过程知, 不等号右边第2项的系数 c 独立于 a_0 , 因此取适当小的 a_0 , 则一定存在 $\mu_1^* > 0$ 使当 $\mu \in [0, \mu_1^*]$ 时,

$$1 - c(a_0^2 + a_0^{2n^*} + a_0^{2n^*} \mu^2 \Delta_3^2 + \mu^2 (\Delta_6^2 + \Delta_7^2)) > 0,$$

从而,

$$\eta_f^2 \leq c + ca_0^{2n^*} \|(\tilde{g} \eta)_{t-1}\|_{2\delta}^2. \quad (\text{A15})$$

其中 c 是独立于 a_0 的某个常数. 由式(A5)和引理3中 $\eta/\eta_f \in L_\infty$, 得 $|\frac{\eta_n}{\eta}| \leq \mu \Delta_4$. 从而由 $\tilde{g} \in \mathcal{D}(|\frac{\eta_n}{\eta}|^2)$ 及 $\mathcal{S}(\cdot)$ 的定义知, $\tilde{g} \in \mathcal{S}(\mu^2 \Delta_4^2)$, 易证 $\|(\tilde{g})_{t-1}\|_{2\delta} \in \mathcal{S}(\mu^2 \Delta_4^2)$. 应用离散的 $L_{2\delta}$ 范数定义^[4], 及文献[4]中的离散时间Bellman-Gronwall引理和一个重要的不等式(2.220)可推出

$$\eta_f^2 \leq c + ca_0^{2n^*} \sum_{i=0}^{t-1} ((1 + ca_0^{2n^*} \mu^2 \Delta_4^2) \delta)^{t-i-1} \tilde{g}^T(i) \tilde{g}(i). \quad (\text{A16})$$

类似于文献[11], 存在 $\mu_2^* > 0$, 使得对于任意的 $\mu \in [0, \mu_2^*]$ 及 $t \geq 0$, 有 $(1 + ca_0^{2n^*} \mu^2 \Delta_4^2) \delta < 1$, 取 $\mu^* = \min(\mu_1^*, \mu_2^*)$, 当 $\mu \in [0, \mu^*]$ 时, $\eta_f(t) \in L_\infty$. 因此, 由引理3知, 闭环系统的所有信号有界, 从而定理1中的结论1)成立.

第4步 确定跟踪误差 e 的界.

由 $\|(\tilde{g})_{t-1}\|_{2\delta} \in \mathcal{S}(\mu^2 \Delta_4^2)$ 和 e 的定义、式(15)(A6)及 $\eta_f \in L_\infty$, 通过引理2得

$$\begin{aligned} |e|^2 &\leq c \sum_{i=1}^m \|\tilde{\Theta}_i^T \Omega_i\|_{2\delta}^2 + |\eta_y|^2 \leq \\ &c + c(a_0^2 + \mu^2 (\Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2)). \end{aligned}$$

由 $\mathcal{S}(\nu)$ 的定义, 易得 $e \in \mathcal{S}(a_0^2 + \mu^2 (\Delta_3^2 + \Delta_4^2 + \Delta_5^2))$. 从而, 定理1中的结论2)成立.

作者简介:

李俊领 (1976—), 男, 讲师, 目前研究方向为自适应控制和混杂系统, E-mail: ljltongzhi@163.com;

陈伟 (1981—), 女, 硕士, 目前研究方向为自适应控制, E-mail: chchenwei2006@163.com;

邵长彬 (1976—), 男, 讲师, 目前研究方向为嵌入式系统设计, E-mail: shaochangbin@126.com.