

不确定广义系统的弹性 H_∞ 控制

张 伟, 时 宝, 盖明久

(海军航空工程学院 应用数学研究所, 山东 烟台 264001)

摘要: 研究了具有范数有界不确定性的广义系统的弹性 H_∞ 控制问题. 首先证明了广义系统的有界实引理可以用一个严格的线性矩阵不等式来描述. 在此基础上, 针对控制器存在加性摄动的情形, 以严格线性矩阵不等式约束条件给出了弹性 H_∞ 状态反馈控制器存在的充分必要条件, 并给出了控制器的显式表示. 算例验证了本文方法的可行性.

关键词: 不确定广义系统; 弹性控制器; H_∞ 控制; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Resilient H-infinity control for uncertain descriptor systems

ZHANG Wei, SHI Bao, GAI Ming-jiu

(Institute of Applied Mathematics, Naval Aeronautical and Astronautical University, Yantai Shandong 264001, China)

Abstract: The problem of the resilient H-infinity control for descriptor systems with norm-bounded uncertainty is considered. It is shown that the bounded real lemma for the nominal descriptor system can be described by a strict linear matrix inequality. Based on this new bounded real lemma, the sufficient and necessary conditions for the existence of the resilient H-infinity state-feedback controller under the additive perturbation is presented in the form of a strict linear matrix inequality. The explicit expression for the desired controller is also given. Numerical examples are given to demonstrate the effectiveness of the proposed methods.

Key words: uncertain descriptor systems; resilient controller; H-infinity control; linear matrix inequality(LMI)

1 引言(Introduction)

广义系统在许多领域有着广泛的应用, 如经济系统、大规模系统、生物工程和航空航天技术等. 由于广义系统能够描述比正常系统更加广泛的一类问题, 因而受到许多学者的关注, 并取得了许多研究成果^[1~4]. 另一方面, H_∞ 控制弥补了经典控制理论在实际应用中的某些不足, 具有广泛的实用性, 已发展成为控制理论重要的分支之一. 因此, 对于广义系统 H_∞ 控制问题的研究, 具有重要的理论和应用价值^[5,6].

文献[5]以一组矩阵不等式的形式给出了广义系统的有界实引理, 但该结论中含有半正定矩阵及等式约束, 使其在用于数值运算时存在一定的困难. 文献[6]用严格线性矩阵不等式方法设计了 H_∞ 状态反馈控制器, 但在其考虑的不确定广义系统中, 矩阵 E 是一个特殊矩阵, 且控制器增益中不含增益摄动. 文献[7]指出, 现有的控制器设计方法在控制器存在参数摄动时可导致闭环系统失稳, 因此, 在设计控

制器时, 限制控制器增益在一定范围内变化就显得很有意义.

本文针对控制器存在加性摄动的情形, 研究了具有范数有界的不确定性广义系统的弹性 H_∞ 控制问题. 首先以严格线性矩阵不等式的形式给出了标称广义系统容许且具有 H_∞ 性能指标的充要条件. 然后以严格线性矩阵不等式的形式给出了不确定广义系统存在弹性 H_∞ 状态反馈控制器的充要条件, 并给出了控制器的显式表示. 最后, 通过仿真算例验证了本文结论的可行性.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下的不确定广义系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + B_w w(t), \\ z(t) = (C + \Delta C)x(t) + (D + \Delta D)u(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 为控制输入向量, $z(t) \in \mathbb{R}^s$ 为被控输出向量, $w(t) \in \mathbb{R}^l$ 为干扰

输入向量. $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 且 $0 < \text{rank}(E) = r < n$, A, B, B_w, C, D 为已知适维常矩阵. $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$ 为常矩阵, 表征系统的不确定性, 并且具有如下结构:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} F(t) \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

其中: E_1, E_2, H_1, H_2 为适当维数的已知常数矩阵, $F(t) \in \mathbb{R}^{i \times j}$ 为不确定实时变矩阵, 且满足 $F(t)^T F(t) \leq I$.

当 $u(t) = 0$ 时, 系统(1)的标称广义系统如下:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = Ax(t) + B_w w(t), \\ z(t) = Cx(t). \end{cases} \quad (3)$$

定义 1 [9] 如果式(3)正则、脉冲自由且稳定, 那么称广义系统(3)是容许的.

考虑弹性状态反馈控制器

$$u(t) = (K + \Delta K)x(t), \quad (4)$$

其中 $K \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 是要设计的状态反馈控制器增益. 控制器增益摄动 ΔK 满足

$$\Delta K = E_3 F_1(t) H_3, \quad F_1(t)^T F_1(t) \leq I. \quad (5)$$

式中: E_3, H_3 为适当维的已知实矩阵, $F_1(t)$ 为不确定实时变矩阵.

系统(1)在弹性状态反馈控制器(4)作用下的闭环系统如下:

$$\begin{cases} E\dot{x}(t) = \bar{A}x(t) + B_w w(t), \\ z(t) = \bar{C}x(t). \end{cases} \quad (6)$$

其中:

$$\bar{A} = A + \Delta A + (B + \Delta B)(K + \Delta K),$$

$$\bar{C} = C + \Delta C + (D + \Delta D)(K + \Delta K).$$

定义 2 若系统(1)在控制器(4)作用下的闭环系统(6)满足

1) 当 $w(t) = 0$ 时, 闭环系统(6)是容许的;

2) 具有 H_∞ 性能指标 γ , 即从干扰输入 $w(t)$ 到受控输出 $z(t)$ 的传递函数满足

$$\|G_{zw}(s)\|_\infty < \gamma.$$

这里: $G_{zw}(s) = \bar{C}(sE - \bar{A})^{-1}B_w$, γ 为给定的正常数, 则称控制器(4)为不确定广义系统(1)的弹性 H_∞ 状态反馈控制器.

引理 1 [5] 标称广义系统(3)是容许的且具有 H_∞ 性能指标 γ 的充分必要条件是存在矩阵 Y , 满足

$$YE^T = EY^T \geq 0, \quad (7)$$

$$YA^T + AY^T + B_w B_w^T + \gamma^{-2} Y C^T C Y^T < 0. \quad (8)$$

引理 2 [10] 设 Y, H, E 具有适当维数的常数矩阵, 而且 Y 是对称矩阵, 则对任意满足 $F^T F \leq I$ 的矩阵 F , $Y + HFE + E^T F^T H^T < 0$ 的充要条件是, 存在常数 $\varepsilon > 0$, 使得 $Y + \varepsilon H H^T + \varepsilon^{-1} E^T E < 0$ 成立.

3 主要结果(Main results)

定理 1 标称广义系统(3)是容许的且具有 H_∞ 性能指标 γ 的充分必要条件是存在正定对称矩阵 P 以及矩阵 R , 使得

$$\Omega := \begin{bmatrix} AW^T + WA^T & * & * \\ CW^T & -\gamma^2 I & * \\ B_w^T & 0 & * \end{bmatrix} < 0, \quad (9)$$

其中 $W = EP + R^T S$, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ 为任意满足 $SE^T = 0$ 的行满秩矩阵.

证 充分性: 令 $W = Y$. 因为 P 为正定对称矩阵且 $SE^T = 0$, 所以式(7)成立. 再根据不等式(9)及 Schur 补引理, 可知不等式(8)成立. 由引理1, 充分性得证.

必要性: 设标称广义系统(3)容许且具有 H_∞ 性能指标 γ , 则存在非奇异矩阵 M 和 N , 使得

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix},$$

其中 $A_1 \in \mathbb{R}^{r \times r}$ 为 Schur 稳定矩阵. 记

$$MB_w = [B_{w1}^T \ B_{w2}^T]^T, \quad CN = [C_1 \ C_2],$$

可以推得

$$C(sE - A)^{-1}B_w = C_1(sI_r - A_1)^{-1}B_{w1} - C_2B_{w2}.$$

由文献[8]知, 存在正定对称矩阵 Q_1 使得

$$\begin{bmatrix} A_1 Q_1^T + Q_1 A_1^T + B_{w1} B_{w1}^T \\ C_1 Q_1^T - C_2 B_{w2} B_{w1}^T \\ Q_1 C_1^T - B_{w1} B_{w2}^T C_2^T \\ -\gamma^2 I + C_2 B_{w2} B_{w2}^T C_2^T \end{bmatrix} < 0. \quad (10)$$

令

$$Q = M^{-1} \begin{bmatrix} Q_1 & -B_{w1} B_{w2}^T \\ 0 & -B_{w2} B_{w2}^T - \alpha I \end{bmatrix} N^T,$$

由不等式(10)可得

$$QA^T + AQ^T + B_w B_w^T + \gamma^{-2} QC^T C Q^T < 0, \quad (11)$$

进一步地, 在不等式(11)中矩阵 Q 可以写成

$$Q = M^{-1} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} N^{-1} N \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} N^T +$$

$$M^{-1} \begin{bmatrix} -B_{w1}B_{w2}^T Q_3^{-1} \\ -(B_{w2}B_{w2}^T + \alpha I)Q_3^{-1} \end{bmatrix} [0 \ Q_3] N^T =$$

$$EN \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} N^T +$$

$$M^{-1} \begin{bmatrix} -B_{w1}B_{w2}^T Q_3^{-1} \\ -(B_{w2}B_{w2}^T + \alpha I)Q_3^{-1} \end{bmatrix} [0 \ Q_3] N^T,$$

其中: $Q_2 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ 为任意正定矩阵, $Q_3 \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ 为任意非奇异矩阵. 令

$$P = N \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} N^T, \quad S = [0 \ Q_3] N^T,$$

$$R = \begin{bmatrix} -M^{-1}B_{w1}B_{w2}^T Q_3^{-1} \\ -M^{-1}(B_{w2}B_{w2}^T + \alpha I)Q_3^{-1} \end{bmatrix}.$$

根据不等式(11)和Schur补引理知, 存在正定对称矩阵 P 以及矩阵 R , 使得不等式(9)成立, 又由 N 为特定的非奇异矩阵, Q_3 为任意的非奇异矩阵, 且

$$SE^T = [0 \ Q_3] N^T E^T = [0 \ Q_3] \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} M^{-T},$$

知 $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n)}$ 为任意满足 $SE^T = 0$ 的行满秩矩阵. 必要性得证.

注1 定理1给出了标称广义系统(3)的一个新的有界实引理. 通过将引理1中的矩阵 Y 改写为 $EP + R^T S$, 该结论消除了引理1中的等式和半正定矩阵约束, 从而可以直接应用MATLAB软件中的LMI工具箱求解.

下面在定理1的基础上, 给出了不确定广义系统(1)存在弹性 H_∞ 状态反馈控制器的一个充分必要条件.

定理2 不确定广义系统(1)存在弹性 H_∞ 状态反馈控制器的充分必要条件是, 存在正定对称矩阵 P 和矩阵 R, Z 以及常数 $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, 使得

$$\Xi = \begin{bmatrix} \Xi_{11} & * & * & * & * \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} & * & * & * \\ B_w^T & 0 & -I & * & * \\ \Xi_{41} & 0 & 0 & \Xi_{44} & * \\ H_3 W^T & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (12)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= \text{sym}(AW^T + BZ) + \varepsilon_1 E_1 E_1^T + \varepsilon_2 B E_3 E_3^T B^T, \\ \Xi_{21} &= CW^T + DZ + \varepsilon_1 E_2 E_1^T + \varepsilon_2 D E_3 E_3^T B^T, \\ \Xi_{22} &= -\gamma^2 I + \varepsilon_1 E_2 E_2^T + \varepsilon_2 D E_3 E_3^T D^T, \\ \Xi_{41} &= H_1 W^T + H_2 Z + \varepsilon_2 H_2 E_3 E_3^T B^T, \\ \Xi_{44} &= -\varepsilon_1 I + \varepsilon_2 H_2 E_3 E_3^T H_2^T, \end{aligned}$$

$W = EP + R^T S$ 为非奇异矩阵, $S \in \mathbb{R}^{(n-r) \times n}$ 为任意满足 $SE^T = 0$ 的行满秩矩阵, $\text{sym}(AW^T + BZ) = AW^T + BZ + WA^T + Z^T B^T$, 并且相应的弹性 H_∞ 状态反馈控制器为 $u(t) = (ZW^{-T} + E_3 F_1(t) H_3) x(t)$.

证 在不等式(12)中, 令 $Z = KW^T$. 根据Schur补引理, 不等式(12)可等价于

$$\Lambda + \varepsilon_2 \Pi_1 \Pi_1^T + \varepsilon_2^{-1} \Theta_1^T \Theta_1 < 0. \quad (13)$$

式中:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \text{sym}(AW^T + BKW^T) + \varepsilon_1 E_1 E_1^T & & & \\ CW^T + DKW^T + \varepsilon_1 E_2 E_1^T & & & \\ & B_w^T & & \\ & H_1 W^T + H_2 KW^T & & \\ * & * & * & \\ -\gamma^2 I + \varepsilon_1 E_2 E_2^T & * & * & \\ 0 & -I & * & \\ 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & \end{bmatrix},$$

$$\Pi_1 = [E_3^T B^T \ E_3^T D^T \ 0 \ E_3^T H_2^T]^T,$$

$$\Theta_1 = [H_3 W^T \ 0 \ 0 \ 0].$$

在矩阵 Λ 中以 $K + \Delta K$ 代替 K , 并记为 Λ_1 . 由式(5)和引理2知, 不等式(13)等价于

$$\Lambda_1 < 0.$$

根据Schur补引理, 上式可等价于

$$\Lambda_2 + \varepsilon_1 \Pi_2 \Pi_2^T + \varepsilon_1^{-1} \Theta_2^T \Theta_2 < 0. \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \begin{bmatrix} \text{sym}(AW^T + B(K + \Delta K)W^T) & * & * \\ CW^T + D(K + \Delta K)W^T & -\gamma^2 I & * \\ & B_w^T & 0 \ -I \end{bmatrix}, \\ \Pi_2 &= [E_1^T \ E_2^T \ 0], \\ \Theta_2 &= [H_1 W^T + H_2 (K + \Delta K)W^T \ 0 \ 0]. \end{aligned}$$

在矩阵 Λ_2 中分别以 $A + \Delta A, B + \Delta B, C + \Delta C, D + \Delta D$ 代替 A, B, C, D , 并记为 Λ_3 . 由式(2)及引理2可知, 不等式(14)等价于 $\Lambda_3 < 0$.

根据定理1, $\Lambda_3 < 0$ 等价于闭环系统(6)容许且具有 H_∞ 性能指标 γ , 并由 $\Lambda_3 < 0$ 可知 W 为非奇异矩阵. 证毕.

注2 对给定的 H_∞ 性能指标 γ , 可以通过求解线性矩阵不等式(12)的可行问题得到系统(1)的一个合适的弹性 H_∞ 状态反馈控制器. 系统(1)的最优弹性 H_∞ 状态反馈控制器则可以通过求解如下优化问题得到

$$\begin{cases} \min_{P, R, \varepsilon_1, \varepsilon_2} \gamma^2, \\ \text{s.t. LMI(12), } P > 0, \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0. \end{cases} \quad (15)$$

4 算例(Example)

下面给出两个算例.

例1 考虑具有如下参数的标称广义系统(3):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0.5 & 1 \end{bmatrix}, \\ B_w = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.2 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0].$$

取 $S = [1 \ -1]$, $\gamma = 0.6$, 由MATLAB中的LMI工具箱可知存在如下可行解

$$P = \begin{bmatrix} 28.3375 & -28.2922 \\ -28.2922 & 28.3375 \end{bmatrix}, R = [0.2996 \ 0.1785]$$

满足线性矩阵不等式(9).

例2 考虑具有如下参数的不确定广义系统(1):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 1.5 & -1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \\ B_w = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 2], D = 0.2, E_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}, \\ E_2 = [0.1 \ 0], H_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

取 $S = [0 \ 1]$, 为系统(1)设计弹性 H_∞ 状态反馈控制器(3), 并允许控制器增益摄动具有式(5)的形式, 其中:

$$E_3 = [1 \ 1], H_3 = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

若给定 H_∞ 性能指标 $\gamma = 0.6$, 则利用MATLAB中的LMI工具箱feasp求解线性矩阵不等式(12)的可行性问题, 可以算得

$$K = [9.8915 \ 3.7999].$$

进一步, 利用MATLAB中的LMI工具箱gevp求解优化问题(15), 可以求得最优 H_∞ 性能指标 $\gamma = 0.1857$, 并且对应的控制器增益为

$$K = [-10.7390 \ 24.8529].$$

5 结论(Conclusion)

在控制器存在加性摄动的情形下, 本文研究了具有范数有界的不确定广义系统的弹性 H_∞ 控制问题,

给出了用一个严格的线性矩阵不等式来描述的有界实引理. 在这个新的有界实引理的基础上, 用线性不等式的方法建立了不确定广义系统存在弹性 H_∞ 状态反馈控制器的充要条件, 并得到了控制器的显示表达式. 最后仿真算例验证了本文方法的可行性.

参考文献(References):

- [1] 王岩, 张庆灵. 不确定广义系统动态输出反馈鲁棒 H_∞ 控制器设计[J]. 控制与决策, 2002, 17(6): 948 – 951.
(WANG Yan, ZHANG Qingling. Dynamic output feedback robust H_∞ control for uncertain descriptor systems[J]. *Control and Decision*, 2002, 17(6): 948 – 951.)
- [2] 杨雪, 刘晓华. 一不确定广义系统的弹性保性能控制[J]. 系统工程与电子技术, 2006, 28(7): 1074 – 1076.
(YANG Xue, LIU Xiaohua. Resilient guaranteed cost control for uncertain descriptor systems[J]. *Systems Engineering and Electronic*, 2006, 28(7): 1074 – 1076.)
- [3] 王惠姣, 薛安克, 鲁仁全, 等. 参数不确定离散奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 自动化学报, 2007, 33(12): 1300 – 1305.
(WANG Huijiao, XUE Anke, LU Renquan, et al. Robust H_∞ control for discrete singular systems with parameter uncertainties[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(12): 1300 – 1305.)
- [4] XU S Y, LAM J. Reduced-order H_∞ filtering for singular systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(1): 48 – 57.
- [5] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ -control for descriptor systems: a matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(4): 669 – 673.
- [6] 徐胜元, 牛玉刚, 杨成梧. 参数不确定奇异系统的鲁棒 H_∞ 控制[J]. 自动化学报, 2001, 27(3): 397 – 400.
(XU Shengyuan, NIU Yugang, YANG Chengwu. Robust control for singular systems with parameter uncertainty[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(3): 397 – 400.)
- [7] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust, fragile, or optimal[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 – 1105.
- [8] 俞立. 鲁棒控制—线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(YU Li. *Robust Control—Linear Matrix Inequality Approach*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
- [9] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [10] PETERSEN I R. A stabilization algorithm for a class of uncertain linear systems[J]. *Systems & Control Letters*, 1987, 8(4): 351 – 357.

作者简介:

张伟 (1986—), 男, 硕士研究生, 主要研究方向为广义系统和鲁棒控制, E-mail: feizhu2@126.com.cn;

时宝 (1962—), 男, 理学博士, 教授, 博士生导师, 海军航空工程学院应用数学研究所所长, 主要研究方向为时滞动力系统与控制理论, E-mail: baoshi781@sohu.com.cn.

盖明久 (1965—), 男, 工学博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为时滞动力系统、数据融合的数学理论, E-mail: gaimingjiu@rui.com.cn.