文章编号: 1000−8152(2009)06−0651−03

模糊控制器输出值不变的两个充分条件

王加银[1], 刘　民[2], 李洪兴[3], 苗志宏[4]

(1. 北京师范大学 数学科学学院, 北京 100875; 2. 清华大学 自动化系, 北京 100084;

3. 大连理工大学 电信学院, 辽宁 大连 116023; 4. 中国人民武装警察部队学院 消防工程系, 河北 廊坊 065000)

摘要: 模糊控制器通常由模糊化、模糊推理以及清晰化三部分构成, 而模糊推理决定了一个由输入论域到输出论域的模糊映射. 当模糊映射为常值映射时, 任意选择模糊化和去模糊化方式, 模糊控制器的输出值不因输入信号变化而改变. 本文给出了模糊映射为常值映射的两个充分条件, 并将结论从单入单出模糊系统推广到多入单出模糊系统.

关键词: 模糊系统; 模糊划分; 模糊蕴涵算子

中图分类号: O159　　　**文献标识码**: A

Two sufficient conditions for the fuzzy controller with constant output

WANG Jia-yin[1], LIU Min[2], LI Hong-xing[3], MIAO Zhi-hong[4]

(1. School of Mathematical Sciences, Beijing Normal University, Beijing 100875, China;

2. Department of Automation, Tsinghua University, Beijing 100084, China;

3. School of Electronic & Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116023, China;

4. Department of Fire Protection Engineering, The Chinese People's Armed Police Force Academy, Langfang Hebei 065000, China)

Abstract: A fuzzy controller is usually composed of three parts: fuzzification, fuzzy inference and defuzzification. The fuzzy inference defines a fuzzy mapping from the input universe to the output universe. When the fuzzy mapping is a constant mapping, for any given fuzzification and defuzzification methods, the output of the fuzzy controller will never change with the input value. Two sufficient conditions are proposed under which the fuzzy mapping will remain constant. These conclusions are generalized from the single-input single-output fuzzy system to the multiple-input single-output one.

Key words: fuzzy system; fuzzy partition; fuzzy implication operator

1　引言(Introduction)

模糊控制模仿人的思维方式, 综合了领域专家的实践经验, 能对难以建立精确数学模型的对象实施控制, 是模糊理论中非常成功的领域之一, 同时也是智能控制的重要组成部分. 模糊控制器通常包含输入信号的模糊化、基于规则库的模糊推理以及清晰化为输出信号3部分, 而模糊蕴涵算子的选择在模糊推理中尤为关键. 众多学者在这一方面进行了深入的讨论.

文献[1]揭示了模糊系统的概率论意义, 基于不同的模糊蕴涵算子给出了几种典型的概率分布, 证明了模糊系统的概率分布为全局均匀分布时, 模糊系统的输出为常值. 本文将进一步讨论模糊系统的概率分布何时为全局均匀分布. 文献[2]证明了采用单值模糊化、三角模糊化或高斯模糊化以及中心平均去模糊化的Lukasiewicz推理机(即模糊蕴涵算子选择Lukasiewicz算子的模糊系统)或Dienes-Rescher推理机均为常值输出. 但文献[2]未对其他的去模糊化方式以及模糊蕴含算子进行说明. 模糊控制器设计时模糊蕴涵算子如何选取? 本文侧重分析模糊控制器中基于推理规则库的模糊推理, 这实际上是一个输入论域到输出论域的模糊映射. 结合推理规则库前件和后件模糊集族的特点, 给出模糊映射为常值映射的两个充分条件. 显然, 模糊映射为常值映射时, 任意选择模糊化和去模糊化方法, 模糊控制器的输出不因输入信号变化而改变; 同时, 这样的模糊系统概率分布为全局均匀分布.

2　两个充分条件(Two sufficient conditions)

设单入单出模糊控制器输入论域为X, $\mathcal{A}=\{A_i|i\in I_n\}\subset\mathcal{F}(X)$; 输出论域为$Y$, $\mathcal{B}=\{B_i|i\in$

收稿日期: 2008−03−16; 收修改稿日期: 2008−08−02.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774049, 60721003, 60834004); "973"国家重大基础研究发展规划基金资助项目(2002CB312200); 北京师范大学应用数学重点学科建设项目; 教育部新世纪优秀人才支持计划; 国家863计划课题基金资助项目(2006AA04Z163).

$I_n\} \subset \mathcal{F}(Y)$, 其中$I_n = \{1, 2, \cdots, n\}$. 选取模糊蕴涵算子$\theta$, 聚合算子为取大运算, 推理规则库共有$n$条if-then规则, 分别为

$$\text{Rule } i\text{: if } x \text{ is } A_i, \text{ then } y \text{ is } B_i, \ i \in I_n. \tag{1}$$

Zadeh提出的关系合成推理法(compositional rule of inference, 简记为CRI算法)计算过程如下: 首先得到$X \times Y$上规则i确定的模糊关系R_i, $R_i(x,y) = \theta(A_i(x), B_i(y))$, 并聚合为总模糊关系$R = \bigcup\limits_{i=1}^{n} R_i$, 由此可以诱导输入论域$X$到输出论域$Y$的模糊映射

$$\varphi\colon \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y), \ A \mapsto \varphi(A) = A \circ R. \tag{2}$$

因此, $\forall\, x \in X$, 选择模糊化方式得到模糊集$A_x \in \mathcal{F}(X)$ (比如单值模糊化、三角模糊化或者高斯模糊化), 由式(2)可计算出单入单出模糊控制器模糊推理结果, 即$B = \varphi(A_x) = A_x \circ R$. 最后, 对模糊集$B$去模糊化, 得到模糊控制器输出.

在模糊控制器设计时, 论域的模糊划分同样时常涉及. 文献[3]给出时下普遍认可的模糊划分定义: 设$\mathcal{A} = \{A_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$为论域$X$上一族模糊集, 称$\mathcal{A}$为论域$X$上模糊划分, 若

$$\forall\, i \in I_n, A_i \neq \emptyset \text{且} \forall\, x \in X, \sum_{i=1}^{n} A_i(x) = 1.$$

定理 1 假设$\mathcal{A}, \mathcal{B}$分别为X和Y上模糊划分, 且模糊蕴涵算子θ满足条件

$$\text{若 } a \leqslant b, \text{则 } \theta(a,b) = 1, \tag{3}$$

则单入单出模糊控制器确定的模糊映射为常值映射, 且$\varphi(A_x) \equiv Y, \forall\, x \in X$.

证 $\forall\, x \in X$, 任取模糊化方式得到模糊集A_x, 由式(2)可计算出$B = \varphi(A_x) = A_x \circ R$. 下面证明$B \equiv Y$.

$$\begin{aligned} &\forall\, y \in Y, \\ &B(y) = \bigvee_{x' \in X} (A_x(x') \wedge R(x', y)). \end{aligned} \tag{4}$$

由$\mathcal{A}, \mathcal{B}$均为模糊划分知$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x') = \sum\limits_{i=1}^{n} B_i(y) = 1$. 故$\exists j$有$A_j(x') \leqslant B_j(y)$. 由条件式(3)知 $\theta(A_j(x'), B_j(y)) = 1$. 因此, $R(x', y) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \theta(A_i(x'), B_i(y)) = 1$, 利用式(4)可以得到$B(y) = \bigvee\limits_{x' \in X} A_x(x')$. 此外, 无论是单值模糊化、三角模糊化还是高斯模糊化, 均有$A_x(x) = 1$ (注: 模糊化方法应当保障模糊集A_x在点x处隶属程度$A_x(x) = 1$). 因此, $B(y) = 1$. 综上所述, 有$B \equiv Y$.

类似定理1容易证明如下推论. 实际上, 推论1适用于更广泛的模糊系统, 定理1仅仅是其中一个特例.

推论 1 假设单入单出模糊控制器$\mathcal{A}, \mathcal{B}$满足条件(#.1), 即$\forall\ (x', y) \in X \times Y, \exists i \in I_n$, 有$A_i(x') \leqslant B_i(y)$(#.1) 且模糊蕴涵算子$\theta$满足式(3), 则模糊控制器确定的模糊映射为常值映射, 且$\varphi(A_x) \equiv Y$, $\forall\, x \in X$.

定理1证明了当$\mathcal{A}, \mathcal{B}$分别为输入论域和输出论域上模糊划分且模糊蕴涵算子满足式(3)时, 对于任意选择的模糊化方法(应当保障$A_x(x) = 1$), 模糊控制器确定的模糊映射始终为常值映射; 其次, 对于任意选择的去模糊化方法, 模糊控制器的输出值始终不因输入信号变化而改变. 我们对模糊蕴涵算子的要求式(3)是否很强? 答案是否定的, 大部分模糊蕴涵算子均满足这一条件, 因为这一条件有它的逻辑背景. 满足这一条件的常见模糊蕴涵算子有: Lukasiewicz算子, Gaines-Rescher算子, Gödel算子, Goguen算子以及Wang算子(亦称R_0算子)等.

有时, if-then规则库的前件模糊集族$\mathcal{A}$或后件模糊集族$\mathcal{B}$不满足模糊划分定义, 即$\exists x_0 \in X$, 使得$\sum\limits_{i=1}^{n} A_i(x_0) < 1$或$\exists y_0 \in Y$, 使得$\sum\limits_{i=1}^{n} B_i(y_0) < 1$. 对于不满足模糊划分定义的推理规则库, 该如何处理? 定理2回答了这一问题. 在给出定理2之前, 先给出如下定义:

定义 1 $\mathcal{C} = \{C_i \in \mathcal{F}(U) | i \in I_n\}$为论域$U$上模糊集族, 约定点$u(u \in U)$处的覆盖(covering)数为$\mathrm{cov}(u, \mathcal{C}) = |\{i | C_i(u) > 0\}|$, 其中$|\cdot|$表示有限集元素个数. 显然, $0 \leqslant \mathrm{cov}(u, \mathcal{C}) \leqslant n$. 此外, 约定$\mathrm{cov}(\mathcal{C}) = \sup\{\mathrm{cov}(u, \mathcal{C}) | u \in U\}$为论域$U$上模糊集族$\mathcal{C}$的覆盖数.

显然, 常见的二相基元组$\mathcal{C}$的覆盖数$\mathrm{cov}(\mathcal{C}) = 2$, 而高斯型模糊集族$\mathcal{C}$的覆盖数$\mathrm{cov}(\mathcal{C}) = n$.

定理 2 假设单入单出模糊控制器推理规则如式(1), 若$\mathrm{cov}(\mathcal{A}) < n$ 且θ满足条件

$$\theta(0, b) \equiv 1, \tag{5}$$

则模糊映射为常值映射, 且$\varphi(A_x) \equiv Y$.

任取$(x', y) \in X \times Y$, 由$\mathrm{cov}(x', \mathcal{A}) \leqslant \mathrm{cov}(\mathcal{A}) < n$知, $\exists j \in I_n$有$A_j(x') = 0$, 因此

$$R_j(x', y) = \theta(A_j(x'),\ B_j(y)) = 1.$$

故

$$R(x', y) = \bigvee_{i=1}^{n} R_i(x', y) = 1.$$

余下证明与定理1相同, 略去.

当$\mathrm{cov}(\mathcal{A}) < n$且模糊蕴涵算子满足式(5)时, 定理2的结论与定理1类似, 即模糊控制器决定的模糊

映射为常值映射. 同时, 所有满足式(3)的模糊蕴涵算子, 显然满足式(5); 因此, 满足式(5)的常见模糊蕴涵算子除前面列举的Lukasiewicz算子, Gaines-Rescher算子, Gödel算子, Goguen算子以及Wang算子以外, 还有Zadeh算子, Reichenbach算子, Yager算子, Kleene-Dienes算子以及Dienes-Rescher算子等.

3 多入单出模糊控制器(Multiple-input single-output fuzzy controller)

设多入单出模糊控制器输入变量为$\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_k)$, 论域为$X = X_1 \times \cdots \times X_k$, 模糊集族$\mathcal{A}_s = \{A_{si_s} | 1 \leqslant i_s \leqslant p_s\} \subset \mathcal{F}(X_s), 1 \leqslant s \leqslant k$; 输出变量为 y, 论域为 Y, 模糊集族 $\mathcal{B} = \{B_{i_1,\cdots,i_k} | 1 \leqslant i_1 \leqslant p_s, \cdots, 1 \leqslant i_k \leqslant p_k\} \subset \mathcal{F}(Y)$. 选取模糊蕴涵算子$\theta$, 聚合算子为取大运算, 推理规则库共有$p_1 p_2 \cdots p_k$条if-then规则, 分别为

$$\begin{aligned}&\text{If } x_1 \text{ is } A_{1i_1} \text{ and } \cdots \text{ and } x_k \text{ is } A_{ki_k},\\ &\text{then } y \text{ is } B_{i_1,\cdots,i_k}.\end{aligned} \tag{6}$$

假定AND运算选择乘积算子, 则规则$(i_1, \cdots, i_k)$确定的模糊关系$R_{i_1,\cdots,i_k} \in \mathcal{F}(X \times Y)$, 且

$$R_{i_1,\cdots,i_k}(\boldsymbol{x}, y) = \theta(\prod_{s=1}^{k} A_{si_s}(x_s), B_{i_1,\cdots,i_k}(y)).$$

由此聚合为总模糊关系$R = \bigcup\limits_{i_1=1}^{p_1} \cdots \bigcup\limits_{i_k=1}^{p_k} R_{i_1,\cdots,i_k}$, 并诱导出论域$X$到$Y$的模糊映射

$$\Psi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(Y),\ A \mapsto \Psi(A) = A \circ R. \tag{7}$$

因此, $\forall\, \boldsymbol{x} \in X$, 选择模糊化方式得到模糊集$A_{\boldsymbol{x}} \in \mathcal{F}(X)$, 由式(7)可计算出多入单出模糊控制器模糊推理结果, 即$B = \Psi(A_{\boldsymbol{x}}) = A_{\boldsymbol{x}} \circ R$. 最后, 对模糊集$B$去模糊化, 得到模糊控制器输出.

此外, 在模糊系统中AND运算选择取小算子也很常见, 这时模糊映射表达式与式(7)相同, 只是模糊关系R改变为

$$R(\boldsymbol{x}, y) = \bigvee_{i_1=1}^{p_1} \cdots \bigvee_{i_k=1}^{p_k} \theta(\bigwedge_{s=1}^{k} A_{si_s}(x_s), B_{i_1,\cdots,i_k}(y)).$$

由于AND运算选择乘积算子和取小算子时, 结论和推导过程雷同, 在此, 仅讨论AND运算选择乘积算子这一情形.

类似单入单出模糊控制器, 可以证明如下定理:

定理 3 若 $\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_k$, $\mathcal{B}$ 满足条件(8), 即 $\forall\, (\boldsymbol{x}', y) \in X \times Y$,

$$\exists i_1, \cdots, i_k,\ \text{有}\ \prod_{s=1}^{k} A_{si_s}(x'_s) \leqslant B_{i_1,\cdots,i_k}(y), \tag{8}$$

且模糊蕴涵算子θ满足条件(3), 则模糊映射为常值映射, 且$\Psi(A_{\boldsymbol{x}}) \equiv Y, \forall\, \boldsymbol{x} \in X$.

由定理3容易推导如下推论成立:

推论 2 若$\mathcal{A}_1, \cdots, \mathcal{A}_k, \mathcal{B}$同为模糊划分且模糊蕴涵算子$\theta$满足条件(3), 则模糊映射为常值映射, 且$\Psi(A_{\boldsymbol{x}}) \equiv Y, \forall\, \boldsymbol{x} \in X$.

模糊划分是衡量模糊推理前件和后件模糊集族的一个重要方面, 除此之外, 类似定理2, 容易将单入单出模糊系统的覆盖数定理推广到多入单出模糊系统:

定理 4 若$\forall\, s$有$\operatorname{cov}(\mathcal{A}_s) < q_s$且模糊蕴涵算子$\theta$满足条件式(5), 则模糊映射为常值映射, 且$\Psi(A_{\boldsymbol{x}}) \equiv Y$, $\forall\, \boldsymbol{x} \in X$.

4 结论(Conclusion)

本文从模糊映射出发, 研究什么条件下, 模糊映射为常值映射. 当这一结论成立时, 对于任意的模糊化方式以及任意的去模糊化方式, 模糊控制器输出值始终不因输入信号改变而改变. 本文结合推理规则库前件和后件模糊集族的特点, 给出了模糊映射为常值映射的两个充分条件, 并将结论从单入单出模糊系统推广到多入单出模糊系统. 此外, 本文还给出满足常值映射所需条件的部分常见模糊蕴涵算子, 这在模糊控制器设计时, 需特别考虑.

参考文献(References):

[1] LI H X. Probability representations of fuzzy systems[J]. *Science in China(Series F)*, 2006, 49(3): 339 – 363.

[2] 王立新. 模糊系统与模糊控制教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.
(WANG Lixin. *A Course in Fuzzy Systems & Control*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2006.)

[3] RUSPINI E H. A new approach to clustering[J]. *Information and Control*, 1969, 15(1): 22 – 32.

作者简介:

王加银 (1974—), 男, 副教授, 主要研究方向为计算机辅助建模与仿真、模糊推理与模糊控制, E-mail: wjy@bnu.edu.cn;

刘 民 (1965—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为复杂生产过程智能优化调度、智能控制与智能操作优化等, E-mail: lium@tsinghua.edu.cn;

李洪兴 (1953—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为模糊系统、智能控制、知识表示与数据挖掘等, E-mail: lihx@dlut.edu.cn;

苗志宏 (1964—), 男, 教授, 主要研究方向为鲁棒控制、机器智能与模糊控制, E-mail: miaozhh@21cn.com.