第 26 卷第 6 期
2009 年 6 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 6
Jun. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)06−0654−03

仿射非线性控制系统生存性的判别

高 岩

(上海理工大学 管理学院, 上海 200093)

摘要: 讨论了仿射非线性控制系统关于由不等式表示的区域生存性判别问题．基于非光滑分析理论, 给出了在一点处检验生存性条件是否成立的方法, 该方法将生存性条件的检验转化为判别凸不等式组的相容性(是否有解), 然后利用投影方法对凸不等式组的相容性进行判别.

关键词: 非线性控制; 仿射非线性; 生存性; 非光滑分析

中图分类号: O231.2, TD350　　　**文献标识码:** A

Determining the viability for a affine nonlinear control system

GAO Yan

(School of Management, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: This paper is devoted to the viability condition for an affine nonlinear control system in a region defined by inequality constraints. Based on the nonsmooth analysis, we give a method of determining the viability condition at a point. In this method, the determination of the viability is transformed into the determination of the consistency of a system of convex inequalities (the existence of a solution), then, a project method is applied to solve the convex inequalities.

Key words: nonlinear control; affine nonlinearity; viability; nonsmooth analysis

1　引言与预备知识(Introduction)

控制理论中许多问题本质上都可以利用生存理论这一工具刻画并加以解决, 例如系统的可达性(可控性), Lyapunov稳定性, 微分对策等[1~5]．另一方面, 系统的安全域设计本身就是一个直接的生存性问题, 它在一定意义下就是设计一个生存域．关于生存性的研究主要集中在给定一个区域, 如何判断其是否为生存的和对于生存域进行生存性设计, 即设计一个生存解．尽管已有分别利用逼近锥给出的生存性判别准则, 然而对于一般的非线性控制系统, 这些判别准则很难具体使用[6,7]. 本文将研究仿射非线性控制系统生存性的判别问题.

考虑一般形式的非线性控制系统

$$\dot{x}(t)=f(x,u),\ u\in U, \tag{1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n$ 是状态变量, $u\in U$是控制变量, $U\subset\mathbb{R}^m$, $f(x,u)$为$\mathbb{R}^{m+n}$到$\mathbb{R}^n$上的Lipschitz函数.

定义 1 [6]　设$W\subset\mathbb{R}^n$, 如果对任意初始点$x_0\in W$, 存在系统(1)的解$x(t)$, 使得$x(t)\in W,\forall t\geqslant 0$, 则称集合$W$关于控制系统(1)是生存的, 这样的解$x(t)$也称为生存解.

定义 2 [6]　假设$K\subset\mathbb{R}^n$非空, 集合K在点$x\in K$的切锥定义为

$$T_{\mathrm{K}}(x)=\{v\in\mathbb{R}^n\mid \lim_{t\to 0^+}\inf\frac{1}{t}d_{\mathrm{K}}(x+tv)=0\},$$

其中$d_{\mathrm{K}}(y)$为y到K的距离, 即$d_{\mathrm{K}}(y)=\inf\limits_{s\in K}\|y-s\|$.

命题 1[6]　闭集$W\subset\mathbb{R}^n$关于系统(1)是生存的充要条件是对任意$x\in W$, 有

$$(\bigcup_{u\in U}f(x,u))\cap T_{\mathrm{W}}(x)\neq\emptyset. \tag{2}$$

对于集合W的内点x总有$T_{\mathrm{W}}(x)=\mathbb{R}^n$, 这时式(2)成立．于是, 要判别式(2)是否成立, 只须考虑边界点.

对于$\mathbb{R}^n$上的凸函数$f(x)$, 存在凸紧集$\partial f(x)\subset\mathbb{R}^n$使得其方向导数可表示为$f'(x;d)=\max\limits_{\xi\in\partial f(x)}\xi^{\mathrm{T}}d$, $\forall d\in\mathbb{R}^n$, $\partial f(x)$称为$f(x)$的次微分[8]. 对于可微函数, 次微分简化为梯度, 即$\partial f(x)=\{\nabla f(x)\}$.

2　生存性判别方法(Method of determining viability)

考虑如下仿射非线性系统:

$$\dot{x}(t)=f(x)+g(x)u,\ u\in U, \tag{3}$$

收稿日期: 2007−05−31; 收修改稿日期: 2009−01−16.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671126); 上海市重点学科建设项目(S30501); 上海市科委基础研究重点项目资助项目(06JC14057).

其中: $x\in\mathbb{R}^n$, $u\in U$, $f(x)$和$g(x)$分别为$\mathbb{R}^n$到$\mathbb{R}^n$和$\mathbb{R}^{m+n}$上的Lipschitz函数, $U\subset\mathbb{R}^m$是凸集, 表示为

$$U=\{u\in\mathbb{R}^m|h_i(u)\leqslant 0, i=1,\cdots,p\},\tag{4}$$

其中$h_i(x), i=1,\cdots,p$是$\mathbb{R}^n$上的凸函数(不一定是可微的). 考虑如下区域:

$$D=\{x\in\mathbb{R}^n|\varphi_j(x)\leqslant 0, j=1,\cdots,q\},\tag{5}$$

其中$\varphi_j(x), j=1,\cdots,q$是$\mathbb{R}^n$上的连续可微函数.

给定点$x\in D$, 定义指标集

$$J(x)=\{1\leqslant j\leqslant q|\varphi_j(x)=0, j=1,\cdots,q\}.$$

如果$J(x)$为空集, 则x为D的内点, 因为判别生存性只需考虑边界点, 所以只需考虑指标集$J(x)$非空情况. 给出集合D在点$x\in D$处的约束品性.

约束品性 1[9]　存在$y_0\in\mathbb{R}^n$, 使得$\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}y_0<0, j=1,\cdots,q$.

约束品性 2[9]　cl $\gamma(x)=\varGamma(x)$成立, 其中cl为闭包,

$$\gamma(x)=\{y\in\mathbb{R}^n|\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}y<0, j\in J(x)\},$$
$$\varGamma(x)=\{y\in\mathbb{R}^n|\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}y\leqslant 0, j\in J(x)\}.$$

上述两个约束品性在约束优化最优性条件研究中广为使用, 通常的集合都会满足这些假设.

命题 2[9]　如果集合D在$x\in\mathbb{R}^n$处满足约束品性1或约束品性2, 则有$T_{\mathrm{D}}(x)=\varGamma(x)$.

对固定的点$x\in\mathbb{R}^n$, 构造下述不等式系统

$$\begin{cases}h_i(u)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,p,\\ \nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}f(x)+\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}g(x)u\leqslant 0,\ j\in J(x),\end{cases}\tag{6}$$

其中$u\in\mathbb{R}^m$为变量.

定理 1　如果集合D在$x\in\mathbb{R}^n$处满足约束品性1或约束品性2, 则它关于系统(3)是生存的充要条件是对每一固定的$x\in\mathbb{R}^n$不等式组(6)有解.

证　由命题2知

$$T_{\mathrm{D}}(x)=\{y\in\mathbb{R}^n|\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}y\leqslant 0, j\in J(x)\}.$$

在命题1中取$f(x,u)=f(x)+g(x)u$, 于是集合D关于系统(3)是生存的充要条件是对每一固定的点$x\in D$下式成立:

$$(\bigcup_{u\in U}(f(x)+g(x)u))\cap T_{\mathrm{W}}(x)\neq\emptyset.$$

考虑到集合U和$T_{\mathrm{D}}(x)$的表达式, 上式等价于

$$\{f(x)+g(x)u|h_i(u)\leqslant 0, i=1,\cdots,p\}\cap$$
$$\{y\in\mathbb{R}^n|\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}y\leqslant 0, j\in J(x)\}\neq\emptyset.\tag{7}$$

显然, 式(7)成立等价于下述系统有解:

$$\begin{cases}h_i(u)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,p,\\ \nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}y\leqslant 0,\ j\in J(x),\\ y=f(x)+g(x)u.\end{cases}\tag{8}$$

在式(8)中, 将$y=f(x)+g(x)u$代入$\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}y\leqslant 0, j\in J(x)$中得式(6); 在式(6)中引入$y=f(x)+g(x)u$得式(8), 这说明式(6)与式(8)等价. 定理得证.

定理1说明对于集合D和系统(3), 生存性条件(2)成立的充要条件为对每个固定$x\in D$不等式组(6)有解. 这样, 可通过判别不等式组(6)是否有解来检验生存性条件. 对固定的$x\in\mathbb{R}^n$, 在不等式(6)中, $h_i(u)(i=1,\cdots,p)$为凸函数, $\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}f(x)+\nabla\varphi_j(x)^{\mathrm{T}}g(x)u, j\in J(x)$为线性函数, 因此(6)为凸不等式组. 于是, 可以利用现有的解凸不等式组的方法来确定它是否有解(相容).

下面介绍解凸不等式的投影法. 考虑下述不等式组

$$c_i(x)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m.\tag{9}$$

其中$c_i(x),\ i=1,\cdots,m$为$\mathbb{R}^n$上的凸函数(不一定是可微的). 根据文献[10], 求解凸不等式组(9)的投影方法如下: 给定初始点$x_0\in\mathbb{R}^n$, 对于当前迭代点$x_k\in\mathbb{R}^n$, 求它到下述多面体上的投影:

$$c_i(x_k)+\xi_i^{\mathrm{T}}(y-x_k)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m.$$

其中: $\xi_i\in\partial c_i(x_k), i=1,\cdots,m$, 对于可微点$\xi_i$为$\nabla c_i(x_k)$, 即求解下述二次规划问题

$$\min\|y-x_k\|^2,$$
$$\text{s.t. } c_i(x^k)+{\xi_i}^{\mathrm{T}}(y-x_k)\leqslant 0,\ i=1,\cdots,m.$$

记它的解为y_k, 则令

$$x_{k+1}=x_k+\omega_k(y_k-x_k),$$

其中ω_k可取区间$[\eta,2-\eta](0\leqslant\eta\leqslant 1)$中的任意值. 点列$\{x_k\}$收敛到不等式组(9)的一个解.

例　考虑仿射非线性控制系统

$$\begin{pmatrix}\dot{x_1}(x)\\ \dot{x_2}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+\sin x_2\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_1u_1+x_2u_2\\ x_1u_1-x_2u_2\end{pmatrix},\tag{10}$$

其中$U=\{(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2|u_1^2+u_2^2\leqslant 1\}$, 考虑集合

$$D=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2|{x_1}^2+{x_2}^2\leqslant 1\}.$$

为判别集合D在点$(0,1)^{\mathrm{T}}$处是否满足生存性条件, 记

$$f(x)=(x_1+\sin x_2,x_2)^{\mathrm{T}},$$

$$g(x)=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_1 & -x_2 \end{pmatrix},\ h(u)=u_1^2+u_1^2-1,$$

$$\varphi_1(x)=x_1^2+x_2^2-1,\ x=(0,1)^{\mathrm{T}},$$

显然$J(x)=\{1\}$. 将以上代入不等式(6), 不难验证该不等式有解, 故集合D关于系统(10)在$x=(0,1)$处满足生存性条件.

3 生存性设计(Viable design)

对于给定的集合和系统构造一个生存解, 就是生存性设计问题. 例如, 文献[1,2]等在利用生存理论进行稳定化设计中, 本质上就是对系统Lyapunov函数上图这一集合关于一个辅助系统进行生存性设计. 生存设计的基本方法是对边界点确定满足条件(2)的控制变量[1,2,6]. 事实上, 对于仿射非线性系统, 上一节的方法本身不仅讨论了式(2)是否成立, 同时在式(2)成立的情况下给出了相应控制变量的计算方法, 因此该方法也是生存性设计方法, 可应用于系统控制中的许多问题, 例如可达性(可控性), 稳定性, 微分对策等.

参考文献(References):

[1] QUINCAMPOIX M, SEUBE N. Stabilization of uncertain control systems through piecewise constant feedback[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 1998, 218(1): 240 – 255.

[2] GAO Y, LGGEROS J, QUINCAMPOIX M, et al. On the control of uncertain impulsive system: approximate stabilisation and controlled invariance[J]. *International Journal of Control*, 2004, 77(16): 1393 – 1407.

[3] GAO Y, LGGEROS J, QUINCAMPOIX M. On the reachability problem of uncertain hybrid systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(9): 1572 – 1586.

[4] 蔡秀珊, 汪晓东, 吕干云. 具有零动态仿射非线性系统控制Lyapunov函数的构造[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 391 – 395.
(CAI Xiushan, WANG Xiaodong, LV Ganyun. Constructive control Lyapunov functions for affine nonlinear systems with zero dynamics[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(3): 391 – 395.)

[5] 罗毅平, 邓飞其, 胡根生. 具连续分布时滞的抛物型系统的变结构控制[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(4): 556 – 560.
(LUO Yiping, DENG Fengqi, HU Gensheng. Variable structure control of parabolic type systems with continuous distributed delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(4): 556 – 560.)

[6] AUBIN J P. *Viability Theory*[M]. Boston: Birkhauser, 1991.

[7] 高岩. 一类非线性控制系统关于非光滑区域生存性的判别[J]. 控制与决策, 2006, 21(8): 923 – 925.
(GAO Yan. Determining the viability for a class of nonlinear control system on a region with nonsmooth boundary[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(8): 923 – 925.)

[8] HIRRIART URRUTY J B, LEMARECHAL C. *Convex Analysis and Minimization*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

[9] DEMYANOV V F, RUBINOV A M. *Constructive Nonsmooth Analysis*[M]. Frankfurt am Main: Peterlang, 1995.

[10] GARCIA PALOMARES U M. A superlinearly convergence projection algorithm for solving the convex inequality problem[J]. *Operations Research Letter*, 1998, 22(2/3): 97 – 103.

作者简介:

高 岩 (1962—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为非光滑优化、非线性系统和混杂系统的稳定性与生存性, E-mail: gaoyan1962@263.net.