文章编号: 1000−8152(2009)06−0673−05

基于不完全量测下离散线性滤波的修正Riccati方程

许志刚[1,2], 盛安冬[1], 郭　治[1]

(1. 南京理工大学 自动化学院, 江苏 南京 210094; 2. 淮海工学院 理学院, 江苏 连云港 222005)

摘要: 在量测数据丢失下滤波方程和Riccati方程出现一些新的性质变化．探测概率小于1的不完全量测条件下, 利用正定矩阵性质和Lyapunov不等式, 研究了离散系统修正Riccati差分方程(MRDE)与数据丢失位置之间的关系．结果表明在一定条件下MRDE解与丢失数据位置满足单调递减的函数关系．由于统计意义下的理论MRDE模型求解计算量随丢失/探测数量增加而呈指数型递增, 本文最后给出了一组便于工程应用的期望状态误差协方差上下界算法, 算法复杂度为$\mathrm{O}(k^2)$.

关键词: 线性滤波; 不完全量测; 修正Riccati差分方程(MRDE); 数据丢失位置

中图分类号: TP13　　**文献标识码**: A

The modified Riccati equation for discrete-time linear filtering with incomplete measurements

XU Zhi-gang[1,2], SHENG An-dong[1] , GUO Zhi[1]

(1. School of Automation, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing Jiangsu 210094, China;
2. School of Sciences, Huaihai Institute of Technology, Lianyungang Jiangsu 222005, China)

Abstract: There are some changes of property in the filter equation and Riccati equation when missing measurements occur. When the probability of detection is less than unity, by utilizing the properties of a positive-definite matrix and the Lyapunov inequality, we investigate the relation between the modified Riccati difference equation(MRDE) and the location of missing data in incomplete measurements for a discrete-time system. It is shown that under certain conditions the MRDE is a monotonically decreasing function of the location of missing data. Because the computation load for a theoretical MRDE statistically grows exponentially with respect to the number of possible miss/detection sequences, we give the upper and lower bounds of the covariance for the state-error for practical applications. The calculation complexity is $\mathrm{O}(k^2)$.

Key words: linear filtering; incomplete measurements; modified Riccati difference equation(MRDE); location of missing data

1　引言(Introduction)

在目标跟踪[1]等许多估计问题中, 普遍存在量测信息不完全的情形．量测中出现的野值与漏测点、传输中出现的丢包和大于控制间隔的延迟、声纳网探测中出现间隙量测[2]等现象都可归为不完全量测．其中文献[3,4]研究了目标信息探测概率小于1的情形, 相应的估计问题被称为不完全量测的估计问题．引起不完全量测的原因很多, 如被跟踪目标的强机动能力、量测中的误操作、量测数据偶然丢失、传感器(声纳、激光等)探测能力的有限性、网络传输中的拥塞或者高噪音环境等.

在不完全量测条件下, 估计理论和计算方法都将发生不同的变化, 并导致估计精度的变化, 一些指标如Cramer-Rao下界(CRLB)[5,6]、Riccati方程[7]等均会有所改变．最早的对不完全量测条件下的滤波问题进行研究的学者, 可以追溯到Nahi[8]和Robert[9], 他们主要研究了不完全量测下的离散线性系统状态递归估计问题．Wang等[10]则研究了参数不确定随机系统在量测丢失下方差约束控制问题．研究修正Riccati方程较早的是文献[11], 在研究目标跟踪问题中给出了一个MRDE．Ruxin等[12]采用信息缩减因子(IRF)法, 即用信息阵乘上一个不大于1的非负常数因子来表示不完全量测, 将其结果推广到非高斯情形下, 并给出了MRDE的一般形

收稿日期: 2007−11−22; 收修改稿日期: 2008−09−19.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60804019); 2004年度江苏省高校“青蓝工程”优秀青年骨干教师培养人选资金资助项目; 淮海工学院自然科学基金资助项目(Z2007021).

式．IRF法得到的是在平均意义下的指标, 而不是理想的指标值．Farina[3]在研究不完全量测非线性滤波CRLB时, 提出了一种统计意义下的穷举算法, 即列出所有可能的丢失/探测序列计算加权平均值(数学期望), 给出了最优理想CRLB下界. 2004年, M.Hernandez等[4]证明了IRF法的CRLB小于列举法的CRLB, 即IRF法存在“过优”．Sinopoli等[2]给出了一系列间隙量测下的Kalman滤波相关结果: 讨论了滤波收敛的临界探测率, 给出了临界探测率的上下界以及估计误差协方差的上下界．文献[13]则通过算例将上述文献中的几种下界大小进行了比较, 指出MRDE是理想估计方差的上界, 而IRF法和修正Lyapunov方程解均是估计方差的下界．以上成果均为进一步深入研究不完全量测滤波问题奠定了良好的基础.

IRF法是不考虑数据丢失位置的一种平均意义下的求解方法, 文献[4]的仿真以及结论揭示出MRDE与量测数据丢失位置具有强关联, 但没有具体指出它们满足何种规律. 如果能找到指标与数据丢失位置之间的关系, 可以利用这种关系寻找理想指标适合工程应用的上下界; 还可以用在辨识、检测等领域; 如通过将某些指标作为输入, 数据传送状况作为状态建立动态模型, 利用指标的变化对数据传输状态(如不良位置、故障发生时间、元件稳定与否等)进行检测. 本文首先利用文献[3]中修正Kalman滤波公式, 在文献[4]基础上对线性定常系统滤波问题中MRDE解与量测数据丢失位置的关系进行了研究, 指出了它们之间的变化关系; 其次, 针对统计意义下计算理想MRDE计算量随时间呈指数型增长而带来工程应用上的不便, 文中给出了一组MRDE上下界的简便计算方法.

2 问题描述(Problem statement)

2.1 不完全量测(Incomplete measurements)

离散线性系统:

$$x_{k+1} = F_k x_k + w_k, \tag{1}$$

$$z_k = d_k H_k x_k + v_k. \tag{2}$$

其中: 噪音$\{w_k\}$和$\{v_k\}$是零均值高斯分布, 方差分别为Q和R. 离散随机变量d_k服从0–1分布, 它的取值分别表示k时刻是否测量到目标数据, 即

$$d_k = \begin{cases} 1, \text{ 测量到数据}, \\ 0, \text{ 未测量到数据}. \end{cases} \tag{3}$$

设它的概率分布为

$$\begin{array}{c|c|c} d_k & 1 & 0 \\ \hline p & \lambda & 1-\lambda \end{array}.$$

式(2)被称为不完全量测方程．在不完全量测下输出噪音v_k与d_k满足

$$p(v_k|d_k) = \begin{cases} N(0,R), & d_k = 1, \\ N(0,\sigma^2 I), & d_k = 0. \end{cases} \tag{4}$$

这里: $d_k = 0$, 即没有探测到目标时, 对应的σ取极限形式: $\sigma \to \infty$.

现在要讨论的问题是: 在不完全量测下, 滤波中MRDE解与数据丢失位置是否有关？如果有关, 它们满足什么关系？给定声纳探测概率λ, 如何估计理想MRDE解？

为了解决上述问题, 首先对探测/丢失序列进行分析.

2.2 探测/丢失序列(Detection/missing sequences)

在k时刻, 所有可能探测/丢失序列共有2^k个, 设其中第l个序列为

$$S_{k,l}: d_{1,l}, d_{2,l}, \cdots, d_{k,l}. \tag{5}$$

注意探测/丢失序列标号l取值与k有关, 即$l(k) = 1, 2, \cdots, 2^k$．在序列$S_{k,l}$中探测到目标的次数为

$$\Pi_{k,l} = \sum_{i=1}^{k} d_{i,l}. \tag{6}$$

相应地丢失数据的次数为$\bar{\Pi}_{k,l} = k - \sum\limits_{i=1}^{k} d_{i,l}$, 对一给定常探测率$\lambda$, 序列$S_{k,l}$发生的概率为

$$\Pr\{S_{k,l}\} = \lambda^{\Pi_{k,l}}(1-\lambda)^{\overline{\Pi}_{k,l}}. \tag{7}$$

2.3 修正Kalman滤波方程(Modified Kalman filter equations)

在不完全量测下, Kalman滤波公式将发生新的变化, 对于某一给定量测序列$S_{k+1,l}$, 文献[3]给出了修正Kalman滤波公式:

$$\hat{x}_{k+1|k}(S_{k+1,l}) = F_k \hat{x}_{k|k}, \tag{8}$$

$$P_{k+1|k}(S_{k+1,l}) = F_k P_{k|k} F_k' + Q, \tag{9}$$

$$\hat{x}_{k+1|k+1}(S_{k+1,l}) = \hat{x}_{k+1|k} + d_{k+1,l} K_{k+1}(z_{k+1} - H_{k+1}\hat{x}_{k+1|k}), \tag{10}$$

$$P_{k+1|k+1}(S_{k+1,l}) = P_{k+1|k} - d_{k+1,l} K_{k+1} H_{k+1} P_{k+1|k}. \tag{11}$$

其中Kalman增益为

$$K_{k+1} = P_{k+1|k} H_{k+1}' (H_{k+1} P_{k+1|k} H_{k+1}' + R)^{-1}. \tag{12}$$

在Kalman滤波新形式下, 本文来研究关于状态估计误差协方差阵的Riccati方程的一些性质.

3 MRED解与数据丢失位置的关系(Relationship between MRED solution and location of missing measurements)

将式(11)代入式(9)容易写出修正Riccati差分方程

$$P_{k+1}(S_{k+1,l}) = F_kP_kF_k'+Q-d_{k,l}F_kK_kH_kP_kF_k' = F_k(I-d_{k,l}K_kH_k)P_kF_k'+Q. \tag{13}$$

这里记号作了省略, 即$P_k = P_{k|k-1}$.

从式(13)可以看出, MRDE与丢失数据位置有关. 为了推演出这种关系, 不加证明的给出2个关于基本矩阵代数性质的引理.

引理 1 设方阵A, B, C, 如果$A > B$且$|C| \neq 0$, 则

$$C^{\mathrm{T}}AC > C^{\mathrm{T}}BC.$$

引理 2 设可逆对称矩阵A和B, 如果$A > B > 0$, 则

$$B^{-1} > A^{-1}.$$

将对线性定常系统中某个量测序列进行讨论, 研究某个数据丢失位置发生变化对MRDE解的影响. 由于着重考虑量测序列中数据丢失位置因素, 本文暂不考虑系统噪音, 即假设$Q = 0$.

考虑线性定常系统

$$x_{k+1} = Fx_k + w_k, \tag{14}$$

$$z_k = d_kHx_k + v_k. \tag{15}$$

下面定理给出了状态估计误差协方差与数据丢失位置之间的关系.

定理 1 线性定常系统(14)(15), 假设矩阵F可逆、可稳; 不考虑系统误差. 设采样序列中只有一次数据丢失, τ表示丢失数据的位置($\tau = 1, 2, \cdots$); 则$P_k(\tau)$是τ的单调递减函数. 其中: $P_k(\tau)$是关于τ的函数, 表示k时刻状态估计误差协方差. 这里: $\tau < k$.

证 由于$P_k(\tau)$是τ的离散函数, 只需证明对任意τ, 有$P_k(\tau+1) \leqslant P_k(\tau)$即可, 一般情况可递推得出. 为了方便, 不妨将$\tau$取不同数值看作两个探测序列: $\{S_k^{\mathrm{A}}\}$组和$\{S_k^{\mathrm{B}}\}$组; $\{S_k^{\mathrm{A}}\}$组: k时刻数据丢失, 即$d_k^{\mathrm{A}} = 0(\tau = k)$, $k+1$时刻探测到数据, 即$d_{k+1}^{\mathrm{A}} = 1$. $\{S_k^{\mathrm{B}}\}$组: k时刻探测到数据, 即$d_k^{\mathrm{B}} = 1$, $k+1$时刻探测到数据丢失, 即$d_{k+1}^{\mathrm{B}} = 0(\tau = k+1)$;

两组序列其余探测信息完全相同. 无妨设两组在$k-1$时刻协方差阵相同, 即

$$P_{k-1|k-1} = P_{k-1|k-1}^{\mathrm{A}} = P_{k-1|k-1}^{\mathrm{B}}.$$

对$\{S_k^{\mathrm{A}}\}$组:

$$P_k^{\mathrm{A}} = FP_{k-1}F', \tag{16}$$

$$P_{k+1}^{\mathrm{A}} = FP_k^{\mathrm{A}}F' - FP_k^{\mathrm{A}}H'(HP_k^{\mathrm{A}}H'+R)^{-1}HP_k^{\mathrm{A}}F' = F[(P_k^{\mathrm{A}})^{-1}+H'R^{-1}H]^{-1}F'. \tag{17}$$

对$\{S_k^{\mathrm{B}}\}$组:

$$P_k^{\mathrm{B}} = FP_{k-1}F'-FP_{k-1}H'(HP_{k-1}H'+R)^{-1}HP_{k-1}F' = F(P_{k-1}^{-1}+H'R^{-1}H)^{-1}F', \tag{18}$$

$$P_{k+1}^{\mathrm{B}} = FP_k^{\mathrm{B}}F'. \tag{19}$$

由矩阵逆的性质, 知

$$P_{k-1}H'(HP_{k-1}H'+R)^{-1}HP_{k-1} = P_{k-1}-(P_{k-1}^{-1}+H'R^{-1}H)^{-1}, \tag{20}$$

以及

$$P_{k-1}F'H'(HFP_{k-1}F'H'+R)^{-1}HFP_{k-1} = P_{k-1}-(P_{k-1}^{-1}+F'H'R^{-1}HF)^{-1}. \tag{21}$$

因系统矩阵 F 可稳, 据 Lyapunov 稳定性理论, 有$H'R^{-1}H > F'H'R^{-1}HF$. 由引理2, 可得

$$(P_{k-1}^{-1}+F'H'R^{-1}HF)^{-1} > (P_{k-1}^{-1}+H'R^{-1}H)^{-1}. \tag{22}$$

将式(20)(21)代入式(22)得

$$P_{k-1}H'(HP_{k-1}H'+R)^{-1}HP_{k-1} > P_{k-1}F'H'(HFP_{k-1}^{-1}F'H'+R)^{-1}HFP_{k-1}^{-1}. \tag{23}$$

依据引理1, 由式(23)可得

$$H'(HP_{k-1}H'+R)^{-1}H > F'H'(HFP_{k-1}^{-1}F'H'+R)^{-1}HF. \tag{24}$$

将式(16)和式(18)相减, 并利用引理1可得

$$P_k^{\mathrm{A}} - P_k^{\mathrm{B}} = FP_{k-1}H'(HP_{k-1}H'+R)^{-1}HP_{k-1}F' > 0. \tag{25}$$

式(17)和(19)相减得

$$P_{k+1}^{\mathrm{A}} - P_{k+1}^{\mathrm{B}} = FFP_{k-1}H'(HP_{k-1}H'+R)^{-1}HP_{k-1}F'F' - FFP_{k-1}F'H'(HFP_{k-1}F'H'+R)^{-1}HFP_{k-1}F'F'. \tag{26}$$

由引理1和式(24)易知

$$P_{k+1}^{\mathrm{A}} > P_{k+1}^{\mathrm{B}}.$$

由序列$\{S_k^{\mathrm{A}}\}$和$\{S_k^{\mathrm{B}}\}$定义, 即有

$$P_k(\tau+1) \leqslant P_k(\tau),\ \forall\,\tau.$$

所以$P_k(\tau)$是τ的单调递减函数.

证毕.

注 1 从定理1及证明可以看出, 若某个量测序列中某个量测数据被去掉(丢失), 则MRDE解同比将变大; 定理1含义也可以理解为量测数据丢失越早, 一般来说MRDE解同比越大.

由定理1及其证明可知定理1也可重述为如下结论.

定理 2 线性定常系统(14)(15), 假设矩阵F可逆、可稳; 不考虑系统误差. $i<j\leqslant k$, 在量测数据数量(采样时间)相同的两组量测序列中, 如果$\{S_k^{\mathrm{A}}\}$组量测序列第i时刻数据丢失($d_i^{\mathrm{A}}=0$), 第j时刻量测到数据($d_j^{\mathrm{A}}=1$), 而$\{S_k^{\mathrm{B}}\}$组量测序列第i时刻测量到数据($d_i^{\mathrm{B}}=1$), 第j时刻数据丢失($d_j^{\mathrm{B}}=0$), 两组其他量测数据信息相同, 则$P_k^{\mathrm{A}}>P_k^{\mathrm{B}}$.

将定理2关于单个丢失数据结论推广到多个丢失数据情形可得推论1.

推论 1 线性定常系统(14)(15), 假设矩阵F可逆、可稳; 不考虑系统误差. 若k个采样组成的量测序列$\{S_k^{\mathrm{B}}\}$中包含m个丢失数据; 丢失位置最小值为τ_1, 丢失位置最大值为τ_2.

1) 若将m个丢失位置置换到前面位置$\tau_1,\tau_1+1,\cdots,\tau_1+m-1,(\tau_1+m-1\leqslant k)$, 其他数据信息不变, 形成新量测序列$\{S_k^{\mathrm{A}}\}$, 则有$P_k^{\mathrm{A}}\geqslant P_k^{\mathrm{B}}$.

2) 若将m个丢失位置置换到后面位置$\tau_2-m+1,\cdots,\tau_2-1,\tau_2,(\tau_2-m\geqslant 0)$, 其他数据信息不变, 形成新量测序列$\{S_k^{\mathrm{C}}\}$, 则有$P_k^{\mathrm{C}}\leqslant P_k^{\mathrm{B}}$.

证 利用定理1及证明方法, 从第τ_1位置开始递推到第τ_1+m-1位置比较P_k^{A}和P_k^{B}大小, 即可证明1). 同理可证2).

证毕.

利用推论1可以估计理想MRDE值的取值范围, 或者用来确定指标上下界.

4 MRDE估计问题(Estimation problem of MRDE)

4.1 MRDE的统计计算法(Statistic algorithm of MRDE)

对式(13)取期望可得所谓信息缩减因子(IRF)的MRDE[3]

$$P_{k+1}=F_kP_kF_k'-\lambda F_kP_kH_k'(H_kP_kH_k'+R)^{-1}H_kP_kF_k'. \quad (27)$$

从定理1可知同样数目不同丢失位置的丢失数据对协方差阵的影响也不同, 式(27)不是理想协方差阵, 因为没有考虑丢失数据的位置; 为了得到理想协方差阵解, 文献[3]采取统计方法对探测序列$S_{k,l}$取数学期望得到统计意义下的Cramer-Rao下界, 这里我们用同样的方法写出统计意义下的MRDE计算公式. 由于

$$\mathrm{E}[P_k(S_{k,l})]=\sum_{l=1}^{2^k}P_k(S_{k,l})\cdot\Pr\{P_k(S_{k,l})\}. \quad (28)$$

记$P_k(\mathrm{ENUM})\triangleq\mathrm{E}[P_k(S_{k,l})]$, 注意到概率满足$\Pr\{P_k(S_{k,l})\}=\Pr(S_{k,l})$, 式(28)即为

$$P_k(\mathrm{ENUM})=\sum_{l=1}^{2^k}P_k(S_{k,l})\cdot\Pr(S_{k,l}). \quad (29)$$

这样式(7)和(29)组成了不完全量测下的理论协方差计算公式.

公式(29)实际上是将所有可能的量测/丢失序列进行加权平均, 所以它是真实精确的MRDE.

4.2 MRDE上下界的估计(Estimation of upper and lower bounds for MRDE)

公式(29)的计算量随时间呈指数增长; 一般来说, 在大多数实际工程问题中要得到理想MRDE是非常困难的, Sinopoli等[2]给出了在一定条件下的均方误差协方差上下界一个计算方法, 公式需要计算Lyapunov 方程和变形Riccati方程, 给实际工程应用带来了困难.

这里我们利用前面CRLB与丢失数据位置关系结果, 给出理想MRDE的1组上下界简便计算方法, 计算量非常小.

定理 3 离散系统(14)(15)中矩阵F可逆、可稳; 不考虑系统噪音; 探测率λ为常数, 采样时刻k. 记

$$\delta_{k,j}^{(i)}=\begin{cases}0, & i\geqslant j,\\ 1, & i<j,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,k,$$

$$\tilde\delta_{k,j}^{(i)}=\begin{cases}1, & i+j\leqslant k,\\ 0, & i+j>k,\end{cases}\quad i,j=1,2,\cdots,k.$$

构造两组量测/丢失序列

$$S_k^{(i)}:\{\delta_{k,j}^{(i)}\}_{j=1}^{k},\ i=0,1,2,\cdots,k,$$
$$\tilde S_k^{(i)}:\{\tilde\delta_{k,j}^{(i)}\}_{j=1}^{k},\ i=0,1,2,\cdots,k.$$

每组各包含$k+1$个量测/丢失序列. 则

$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(1-\lambda)^r\lambda^{k-r}P_k\{S_k^{(r)}\}\geqslant P_k(\mathrm{ENUM})\geqslant$$
$$\sum_{r=0}^{k}\binom{k}{r}(1-\lambda)^r\lambda^{k-r}P_k\{\tilde{S}_k^{(r)}\}. \tag{30}$$

证　在采样k时刻含有r个丢失数据的量测/丢失序列共有$\binom{k}{r}$个, 将它们依次编号, 编号集记为$\Omega_r=\{1,2,\cdots,\binom{k}{r}\}$; 第$l$个序列记为$S_{k,l}^{(r)}$, 每个序列的概率都是一样, 即$\Pr(S_{k,l}^{(r)})=(1-\lambda)^r\lambda^{k-r}$, 由式(29)可写出列举法MRDE为

$$P_k(\mathrm{ENUM})=\sum_{r=0}^{k}\sum_{l\in\Omega_r}P(S_{k,l}^{(r)})\Pr(S_{k,l}^{(r)}). \tag{31}$$

依据推论1, 有

$$P_k(S_k^{(r)})\geqslant P_k(S_{k,l}^{(r)})\geqslant P_k(\tilde{S}_k^{(r)}). \tag{32}$$

由式(31)(32)经简单数学运算可得式(30).

证毕.

注 2　理想统计意义下MRDE计算复杂度为$\mathrm{O}(2^k)$, 定理3给出的上下界估计公式(30)计算量为$\mathrm{O}(k^2)$, 计算复杂度大为减少, 由于探测率$\lambda\gg 0.5$(典型雷达$\lambda>0.9$), 随着采样时间k的增加, 上下界估计精度将变高, 实际工程中可用在对估计误差协方差等进行预估方面的应用.

5　结论(Conclusion)

作为二次最优意义下滤波评价指标CRLB的计算[14]一直是一个困难的问题, 在一定条件下不完全量测CRLB的上界是MRDE解; 本文给出了线性定常系统理想MRDE与信息丢失位置之间的关系, 从本质上对基于平均意义下MRDE的IRF法一般不是理想MRDE值给出了理论解释; 基于理想MRDE与信息丢失位置之间的关系, 给出了一组计算量非常小MRDE上下界估计公式, 可在工程中对估计量进行预估应用. 利用理想MRDE与信息丢失位置之间的关系寻找计算量合适精度更高近似计算方法是进一步研究的问题; 而在一般动力系统中研究MRDE与信息丢失位置之间内在关系及其在满意控制中应用[15]也是一个有趣的问题.

参考文献(References):

[1] BAR-SHALOM Y, LI X R, KIRUBARAJAN T. *Estimation with Applications to Tracking and Navigation*[M]. New York: Wiley, 2001.

[2] SINOPOLI B, SCHENATO L, FRANSCESCHETTI M, et al. Kalman filtering with intermittent observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2004, 49(9): 1453 – 1464.

[3] FARINA A, RISTIC B, TIMMONERI L. Cramer-Rao bound for nonlinear filtering with $P_d<1$ and its application to target tracking[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2002, 50(8): 1916 – 1924.

[4] HERNANDEZ M, RISTIC B, FARINA A, et al. A comparison of two Cramer-Rao bounds for nonlinear filtering with $P_d<1$[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2004, 52(9): 2361 – 2369.

[5] VAN TREES H. *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*[M]. New York: Wiley, 1968.

[6] TICHAVSKY P, MURAVCHIK C H, NEHORAI A. Posterior Cramer-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 1998, 46(5): 1386 – 1396.

[7] KERR T H. Status of CR-like lower bounds for nonlinear filtering[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 1989, 25(9): 590 – 601.

[8] NAHI N E. Optimal recursive estimation with uncertain observation[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1969, 15(7): 457 – 462.

[9] ROBERT A M. Discrete optimal linear smoothing for systems with uncertain observations[J]. *IEEE Transactions on Information Theory*, 1975, 21(3) : 271 – 275.

[10] WANG Z D, HO D, LIU X. Variance-constrained control for uncertain stochastic systems with missing measurements[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-PartA: Systems and Humans*, 2005, 35(5): 746 – 753.

[11] FORTMANN T E, BAR-SHALOM Y, SCHEFFE M, et al. Detection thresholds for tracking in clutter–a connection between estimation and signal processing[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1985, 30(3): 221 – 229.

[12] RUXIN N, WILLETT P, BAR-SHALOM Y. Matrix CRLB scaling due to measurements of uncertain origin[J]. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 2001, 49(7): 1325 – 1334.

[13] BOERS Y, DRIESSEN H. Results on the modified riccati equation: target tracking applications[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(1): 379 – 384.

[14] HUE C, CADRE J P, PEREZ P. Posterior cramer-Rao bounds for multi-target tracking[J]. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, 2006, 42(1): 37 – 49.

[15] GUO Z. A survey of satisfying control and estimation[C] //*Proceedings of the 14th IFAC Congress*. Beijing: Pergamon Press, 1999: 443 – 447.

作者简介:

许志刚　(1965—), 男, 副教授, 博士, 主要从事控制理论与应用、BOT系统的研究, E-mail: xuzhigang@126.com;

盛安冬　(1964—), 男, 南京理工大学自动化学院研究员, 博士生导师, 主要从事非线性估计与应用的研究, E-mail: shengandong@mail.njust.edu.cn;

郭　治　(1937—), 男, 南京理工大学自动化学院教授, 博士生导师, 国务院学位委员会控制科学与工程学科评议组成员, 中国兵工学会理事, 目前主要研究领域为随机系统的满意控制与估计、工程控制, E-mail: guozhi@mail.njust.edu.cn.