文章编号: 1000−8152(2009)10−1172−03

广义系统的时滞依赖静态输出反馈控制

王翠红[1,2], 黄天民[2], 吴正江[2]

(1. 山西师范大学 数学与计算机科学学院, 山西 临汾 041004; 2. 西南交通大学 智能控制开发中心, 四川 成都 610031)

摘要: 针对一类不确定线性广义时滞系统, 给出了静态输出反馈控制器的设计方法. 首先基于标称广义时滞系统的稳定条件, 以受限线性矩阵不等式形式, 给出闭环广义时滞系统正则、无脉冲且渐近稳定的充分条件, 同时利用受限矩阵不等式的可行解给出静态输出反馈控制律的一个参数化表示；其次, 利用矩阵的正交补, 把求受限线性矩阵不等式的可行解问题转化为求严格线性矩阵不等式(LMIs)的可行解；最后应用数值实例说明了所给方法的有效性和正确性.

关键词: 广义系统; 静态输出反馈; 时滞; 线性矩阵不等式(LMIs)

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Delay-dependent static output feedback control for singular systems

WANG Cui-hong[1,2], HUANG Tian-min[2], WU Zheng-jiang[2]

(1. Shool of Mathematics and Computer Science, Shanxi Normal University, Linfen Shanxi 041004, China;
2. Intelligent Control Development Center, Southwest Jiaotong University, Chengdu Sichuan 610031, China)

Abstract: The static output feedback stabilization is investigated for a class of uncertain linear singular time-delay systems. Firstly, based on the stability criterion for the nominal singular time-delay system, we establish a sufficient condition, in terms of linear matrix inequality with linear matrix equality constraint, for the closed-loop system to be regular, impulse free and robustly asymptotically stable. A parameterized representation of the static output feedback control law is given by the feasible solution of the linear matrix inequality with linear matrix equality constraint. By using the matrix orthogonal complement, the linear matrix inequality with linear matrix equality constraints is reformulated into strict linear matrix equalities(LMIs) without any constraints. Finally, a numerical example is presented to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: singular system; static output feedback control; time-delay; linear matrix inequalities(LMIs)

1 引言(Introduction)

近年来, 人们对广义系统的鲁棒稳定及鲁棒镇定问题进行了比较深入的研究, 取得了一些研究成果[1~3]. 但是大部分研究成果都是基于系统的状态变量设计控制器使闭环控制系统鲁棒稳定, 本文利用文献[4]给出的广义时滞系统的稳定条件, 设计鲁棒静态输出反馈控制器.

2 问题的描述(Problem formulation)

考虑如下不确定广义时滞系统:

$$\begin{cases} E\dot{x}=(A+\Delta A)x(t)+(A_{\rm d}+\Delta A_{\rm d})x(t-d)+\\ \qquad (B+\Delta B)u(t),\\ y(t)=Cx(t),\\ x(t)=\varphi(t),\ t\in[-d,\ 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x(t)\in\mathbb{R}^n$为状态向量; $u(t)\in\mathbb{R}^m$为控制输入向量; $y(t)\in\mathbb{R}^m$为控制输出向量; $d>0$为系统未知状态时滞; $\varphi(t)$为状态$x(t)$在$[-d\ 0]$上的初始向量; $E,A,A_{\rm d},B$和C为适当维数的常数矩阵, 其中E可能是奇异的, 假设rank $E=r\leqslant n$; ΔA, $\Delta A_{\rm d}$和ΔB为系统的不确定参数, 且具有以下形式:

$$[\Delta A\ \ \Delta A_{\rm d}\ \ \Delta B]=HF(t)[N_{\rm a}\ \ N_{\rm d}\ \ N_{\rm b}]. \tag{2}$$

其中: $H,N_{\rm a},N_{\rm d},N_{\rm b}$为已知定常矩阵, $F(t)$为适当维数的未知矩阵, 且满足

$$F^{\rm T}(t)F(t)\leqslant I. \tag{3}$$

构造静态输出反馈控制器$u(t)=Ky(t)$, 则所得的闭环控制系统为

$$E\dot{x}(t)=(\bar{A}+\Delta\bar{A})x(t)+(A_{\rm d}+\Delta A_{\rm d})x(t-d). \tag{4}$$

收稿日期: 2007−05−25; 收修改稿日期: 2008−09−18.

其中: $\bar{A} = A + BKC, \Delta\bar{A} = \Delta A + \Delta BKC$.

本文的目的是构造静态输出反馈控制器, 使得闭环控制系统(4)对于任意满足$0 \leqslant d \leqslant d^*$的定常时滞$d$, 以及所有满足(2)和(3)的参数不确定性都是正则、无脉冲且渐近稳定的. 其中, $d^* > 0$为给定标量.

下面给出本文所需的一些引理和假设:

假设 1 C为行满秩矩阵.

引理 1[5] 给定对称矩阵$\varXi$和矩阵$\varPsi, \varPhi$, 不等式

$$\varXi + \varPsi F(t)\varPhi + \varPhi^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)\varPsi^{\mathrm{T}} < 0$$

对任意的满足$F^{\mathrm{T}}(t)F(t) \leqslant I$的$F(t)$都成立, 当且仅当存在一个标量$\varepsilon > 0$使得

$$\varXi + \varepsilon\varPsi\varPsi^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}\varPhi^{\mathrm{T}}\varPhi < 0.$$

引理 2[6,7] 假定$D \in \mathbb{R}^{n\times q}$和$G \in \mathbb{R}^{n\times q}$为满秩矩阵, 则存在正定矩阵$P \in \mathbb{R}^n$使得$PD = G$, 当且仅当$D^{\mathrm{T}}G = G^{\mathrm{T}}D > 0$, 且可进一步求得$P = G(D^{\mathrm{T}}G)^{-1}G^{\mathrm{T}} + D^{\perp^{\mathrm{T}}}XD^{\perp}$. 其中 $X \in \mathbb{R}^{(n-q)\times(n-q)}$为任意正定矩阵.

3 主要结论(Main results)

定理 1 给定$d^* > 0, \delta_1$和δ_2, 如果存在对称正定矩阵P_1, Q_1, Z_1, 矩阵$T, S_1, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, N$, 非奇异矩阵$M$和标量$\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$满足

$$\begin{bmatrix} \varOmega_{11} & \varOmega_{12} & \varOmega_{13} & \varOmega_{14} & \delta_1 T^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & \varOmega_{22} & \varOmega_{23} & \varOmega_{24} & \delta_2 T^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} \\ * & * & \varOmega_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix} < 0, \quad (5\mathrm{a})$$

$$\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & Y_1 \\ * & X_3 & Y_2 \\ * & * & Z_1 \end{bmatrix} \geqslant 0, \quad (5\mathrm{b})$$

$$MC = CT, \quad (5\mathrm{c})$$

则构造如下的输出反馈控制律:

$$u(t) = Ky(t) = NM^{-1}y(t), \quad (6)$$

使得闭环广义时滞系统(4)对于任意满足$0 \leqslant d \leqslant d^*$的定常时滞$d$都是正则、无脉冲且渐近稳定. 其中$R_1 \in \mathbb{R}^{n\times(n-r)}$ 为任意满足$ER_1 = 0$的列满秩矩阵,

$$\begin{aligned}
\varOmega_{11} = {} & \delta_1(AT + BNC) + \delta_1(AT + BNC)^{\mathrm{T}} + \\
& Y_1E^{\mathrm{T}} + EY_1^{\mathrm{T}} + d^*X_1 + Q + \varepsilon_1 HH^{\mathrm{T}}, \\
\varOmega_{22} = {} & -\delta_2(T + T^{\mathrm{T}}) + d^*X_3 + d^*Z_1, \\
\varOmega_{12} = {} & EP_1 + S_1R_1^{\mathrm{T}} - \delta_1 T^{\mathrm{T}} + \\
& \delta_2(AT + BNC) + EY_2^{\mathrm{T}} + d^*X_2, \\
\varOmega_{13} = {} & -Y_1E^{\mathrm{T}} + \delta_1 T^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}, \\
\varOmega_{23} = {} & -Y_2E^{\mathrm{T}} + \delta_2 T^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}, \\
\varOmega_{33} = {} & -Q_1 + \varepsilon_2 HH^{\mathrm{T}}, \\
\varOmega_{14} = {} & \delta_1(N_{\mathrm{a}}T + N_{\mathrm{b}}NC)^{\mathrm{T}}, \\
\varOmega_{24} = {} & \delta_2(N_{\mathrm{a}}T + N_{\mathrm{b}}NC)^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}$$

证 首先考虑标称广义时滞系统

$$E\dot{x}(t) = (A + BKC)x(t) + A_{\mathrm{d}}x(t - d). \quad (7)$$

定义$z(t) = E\dot{x}(t)$, 线性广义时滞系统(7)可写成如下等价形式:

$$\tilde{E}\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{A}_{\mathrm{d}}\tilde{x}(t - d). \quad (8)$$

其中:

$$\tilde{x}(t) = [\dot{x}(t)\ \dot{z}(t)]^{\mathrm{T}},\ \tilde{E} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ \bar{A} & -I \end{bmatrix}, \tilde{A}_{\mathrm{d}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ A_{\mathrm{d}} & 0 \end{bmatrix}.$$

线性广义时滞系统(8)对于任意满足$0 \leqslant d \leqslant d^*$的定常时滞$d$都是正则、无脉冲且渐近稳定, 如果存在对称正定矩阵P, Q, Z和矩阵S, X, Y满足文献[4]中的线性矩阵不等式(7), 其中E替换成$\tilde{E}$, A 替换成$\tilde{A}$, A_{d}替换成$\tilde{A}_{\mathrm{d}}$. 为了进一步简化所得结论, 可以取

$$P = \mathrm{diag}\{P_1,\ \epsilon I\},\ R = \mathrm{diag}\{R_1,\ P_3\},$$

$$Q = \mathrm{diag}\{Q_1,\ \epsilon I\},\ Z = \mathrm{diag}\{Z_1,\ \epsilon I\},$$

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ 0 & I \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} X_1 & X_2 \\ * & X_3 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ Y_2 & 0 \end{bmatrix},$$

引入矩阵$P_2 = P_3S_2^{\mathrm{T}}$, 并令$\epsilon \to 0^+$, 得式(5b)和如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \varPi_{11} & \varPi_{12} & -Y_1E + P_2^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}} \\ * & \varPi_{22} & -Y_2E + P_3^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}} \\ * & * & -Q_1 \end{bmatrix} < 0. \quad (9)$$

其中:

$$\begin{aligned}
\varPi_{11} = {} & P_2^{\mathrm{T}}(AT + BKC) + (AT + BKC)^{\mathrm{T}}P_2 + \\
& Y_1E^{\mathrm{T}} + EY_1^{\mathrm{T}} + d^*X_1 + Q, \\
\varPi_{12} = {} & E^{\mathrm{T}}P_1 + S_1R_1^{\mathrm{T}} - (AT + BKC)^{\mathrm{T}}P_3 + \\
& E^{\mathrm{T}}Y_2^{\mathrm{T}} + d^*X_2, \\
\varPi_{22} = {} & -P_3 - P_3^{\mathrm{T}} + d^*X_3 + d^*Z_1.
\end{aligned}$$

考虑线性广义时滞系统

$$E^{\mathrm{T}}\dot{\xi}(t) = (A + BKC)^{\mathrm{T}}\xi(t) + A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}\xi(t-d), \quad (10)$$

其中: $\xi(t)$为状态向量, 其他变量与式(1)中相同. 由文献[4]可知, 如果仅考虑系统的正则性、无脉冲

性和稳定性, 可以认为系统(7)和(10)是等价的. 把式(9)中的$E, A+BKC, A_{\mathrm{d}}$分别替换成$E^{\mathrm{T}}, ((A+\Delta A)+(B+\Delta B)KC)^{\mathrm{T}}$, $(A_{\mathrm{d}}+\Delta A_{\mathrm{d}})^{\mathrm{T}}$, 引入矩阵$P_2=\delta_1 T, P_3=\delta_2 T$, $MC=CT$和$K=NM^{-1}$, 并利用引理1, 可得式(5). 证毕.

下面给出鲁棒静态输出反馈控制器的设计算法:

定理 2 如果存在对称正定矩阵P_1, Q_1, Z_1, U, V, 矩阵$S_1, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, N$, 标量$\varepsilon_1>0, \varepsilon_2>0$满足式(5b)和如下线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} & \Xi_{14} & \Xi_{15} \\ * & \Xi_{22} & \Xi_{23} & \Xi_{24} & \Xi_{25} \\ * & * & \Xi_{33} & 0 & 0 \\ * & * & * & -\varepsilon_1 I & 0 \\ * & * & * & * & -\varepsilon_2 I \end{bmatrix}<0, \tag{11}$$

则式(5a)和(5c)存在可行解. 其中:

$$\begin{aligned} &C_0=C^{\mathrm{T}}(CC^{\mathrm{T}})^{-1}, \\ &\Xi_{11}=\delta_1(AC_0V^{\mathrm{T}}C_0^{\mathrm{T}}+C_0VC_0^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}+A\varUpsilon^{\mathrm{T}}+ \\ &\qquad \varUpsilon A^{\mathrm{T}}+BNC+C^{\mathrm{T}}N^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}})+Q_1+ \\ &\qquad Y_1E+EY^{\mathrm{T}}+d^*X_1+\varepsilon_1HH^{\mathrm{T}}, \\ &\Xi_{12}=(-\delta_1 I+\delta_2 A)(C_0VC_0^{\mathrm{T}}+\varUpsilon^{\mathrm{T}})+ \\ &\qquad BNC+EY_2^{\mathrm{T}}+d^*X_2+EP+S_1R_1^{\mathrm{T}}, \\ &\Xi_{22}=-2\delta_2(C_0V^{\mathrm{T}}C_0^{\mathrm{T}}+\varUpsilon^{\mathrm{T}})+d^*X_3+d^*Z_1, \\ &\Xi_{13}=-Y_1E^{\mathrm{T}}+\delta_1(C_0VC_0^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}+\varUpsilon A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}), \\ &\Xi_{23}=-Y_2E^{\mathrm{T}}+\delta_2(C_0VC_0^{\mathrm{T}}A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}+\varUpsilon A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}), \\ &\Xi_{14}=\delta_1(C_0VC_0^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}+\varUpsilon N_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}+(N_{\mathrm{b}}NC)^{\mathrm{T}}), \\ &\Xi_{24}=\delta_2(C_0VC_0^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}+\varUpsilon N_{\mathrm{a}}^{\mathrm{T}}+(N_{\mathrm{b}}NC)^{\mathrm{T}}), \\ &\Xi_{15}=\delta_1(C_0VC_0^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}+\varUpsilon N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}), \\ &\Xi_{25}=\delta_2(C_0VC_0^{\mathrm{T}}N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}+\varUpsilon N_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}), \end{aligned}$$

且静态输出反馈控制律可设计为 $u(t)=-NCC^{\mathrm{T}}V^{-1}y(t)$.

证 对称正定矩阵 P_1, Q_1, Z_1, U, V, 矩阵 $S_1, X_1, X_2, X_3, Y_1, Y_2, N$, 标量$\varepsilon_1>0$, $\varepsilon_2>0$满足式(11), 令$M=V(CC^{\mathrm{T}})^{-1}$, 则有

$$C_0VC_0^{\mathrm{T}}=C_0MC, \tag{12}$$

$$CC^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}=MCC^{\mathrm{T}}>0. \tag{13}$$

由引理2和式(13), 可知$MC=CT$有正定解且可表示为

$$T=(C_0MC)^{\mathrm{T}}+\varUpsilon. \tag{14}$$

其中: $\varUpsilon=C^{\mathrm{T}\perp^{\mathrm{T}}}UC^{\mathrm{T}\perp}$, $U>0$. 把式(12)(14)代入式(11)可得式(5a), 因此式(5a)存在可行解且可行解满足式(5c). 证毕.

4 数值实例(Numerical example)

考虑不确定广义时滞系统(1), 其参数如下:

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix},$$

$$A_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0.2 & 0.1\end{bmatrix}, N_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}, N_{\mathrm{b}}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix},$$

$$N_{\mathrm{a}}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, H=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\\ 0.1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}.$$

取$\delta_1=2$, $\delta_2=2$, $d=5$, $R=[0\ 1]^{\mathrm{T}}$, 求解线性矩阵不等式(11) 可得一个合适的静态输出反馈控制律为$u(t)=-0.5479y(t)$.

5 结论(Conclusions)

本文针对一类, 设计了不确定线性广义时滞系统静态输出反馈控制器, 使闭环控制系统正则、无脉冲且渐近稳定. 并利用矩阵的正交补, 把求受限线性矩阵不等式可行解问题转化为求严格线性矩阵不等式的可行解. 最后利用仿真实例说明该设计方法的正确性和有效性.

参考文献(References):

[1] DAI L. *Singular Control Systems*[M]. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1989.

[2] LEWIS F L. A survey of linear singular systems[J]. *Circuits Systems and Signal Processing*, 1986, 5(1): 3 – 36.3

[3] XU S, DOOREN P V, STEFAN R, et al. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122 – 1128.

[4] SU H, JI X, CHU J. Delay-dependent robust control for uncertain discrete singular time-delay systems[J]. *Asian Journal of Control*, 2006, 8(2): 1 – 10.

[5] LEE J, KIM W, KWON W H. Memoryless H_∞ controller for state delayed system[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(1): 159 – 162.

[6] HUANG C H, IOANNOU P A, MAROULAS J, et al. Design of strict positive real systems using constant output feedback[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(3): 569 – 1573.

[7] 王金枝, 张纪峰. 线性系统静态输出反馈镇定的LMI方法[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(56): 843 – 846.
(WANG Jinzhi, ZHANG Jifeng. An LMI approach to static output feedback stabilization of linear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(56): 843 – 846.)

作者简介:

王翠红 (1980—), 女, 博士, 研究方向为电气系统控制与信息技术, E-mail: sxwangcuihong@yahoo.com.cn;

黄天民 (1958—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为智能控制;

吴正江 (1981—), 男, 博士, 研究方向为智能评价、粗糙集理论及应用, E-mail: wuzhengjiang@hpu.edu.cn.