第 26 卷第 11 期
2009 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 11
Nov. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)11−1303−06

不确定性关联奇异大系统时滞相关分散鲁棒镇定

蒋朝辉, 桂卫华, 谢永芳

(中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083)

摘要: 针对一类不确定关联时滞奇异大系统, 利用Lyapunov稳定性理论与时滞积分矩阵不等式相结合的方法, 研究其时滞相关分散鲁棒镇定问题, 目的是设计一无记忆状态反馈分散控制器, 使闭环系统鲁棒稳定. 用矩阵不等式方法, 给出了该类系统时滞相关分散鲁棒镇定的充分条件. 所得结果与系统时滞的大小有关, 并以矩阵不等式的形式给出. 最后用数值算例说明了所给方法的可行性和有效性.

关键词: 时滞相关;关联奇异大系统;不确定性;分散鲁棒镇定;矩阵不等式

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Delay-dependent decentralized robust stabilization for interconnected singular large-scale system with uncertainties

JIANG Zhao-hui, GUI Wei-hua, XIE Yong-fang

(School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan, 410083

Abstract: The delay-dependent decentralized robust stabilization problem for an interconnected singular large-scale system with uncertainties is investigated by using Lyapunov stability theory and the delay-integral matrix inequality method. The purpose is to design a memoryless state feedback decentralized controller such that the whole closed-loop system is robust asymptotically stable. Sufficient conditions for the delay-dependent decentralized robust stabilization are obtained in terms of a set of matrix inequalities. The results depend on the size of the delays and are given in terms of matrix inequalities. A numerical example is provided to illustrate the effectiveness and the availability for the design.

Key words: delay-dependent; interconnected singular large-scale system; uncertainty; decentralized robust stabilization; matrix inequalities

1 引言(Introduction)

奇异系统比正则系统能更精确地描述实际动态系统, 而时滞客观存在于各种实际系统中, 且常常是导致系统不稳定甚至性能恶化的重要原因之一, 因而对时滞奇异系统的研究引起了人们的关注, 并得到了有关时滞无关和时滞相关稳定及稳定化的一些结论[1~4]. 随着实际生产过程中系统复杂性的增加, 集中控制方法表现出了很大的局限性, 而分散控制以其实现的可靠性、实时性、经济性等优点而成为大系统理论中一个十分重要的分支, 因此人们对时滞关联大系统分散控制也倾注了极大的热情, 取得了许多有意义的研究结果[5,6]. 但对时滞奇异关联大系统的时滞相关分散鲁棒镇定问题却很少研究, 文[7]用线性矩阵不等式方法给出了一类关联时滞广义大系统的稳定性与分散镇定的充分条件, 但该文所获得的结论与时滞大小无关, 且没有考虑系统存在不确性问题; 文[8]用Lyapunov稳定性理论与LMI相结合的方法, 给出了一类奇异关联大系统时滞相关分散鲁棒镇定的充分条件, 但该文研究的系统中关联项不存在时滞和不确定性, 且文中多次用到不等式$2\left|x^{\mathrm T}y\right| \leqslant x^{\mathrm T}Sx + y^{\mathrm T}S^{-1}y$. 关联系统中关联项常常存在时滞和不确定, 且实际工程系统中时滞往往是有界的, 因此研究不确定关联奇异大系统时滞相关分散鲁棒镇定问题具有十分重要的意义, 而目前有关这方面的研究还鲜见报道. 本文的主要创新点在于给出了一个适应于奇异系统的时滞积分矩阵不等式, 该不等式不需要对交叉项$x^{\mathrm T}y$直接进行界定, 因此比不等式$2\left|x^{\mathrm T}y\right| \leqslant x^{\mathrm T}Sx + y^{\mathrm T}S^{-1}y$具有更少的保守性. 文章应用该时滞积分矩阵不等式来研究具有关联时滞

收稿日期: 2008−02−25; 收修改稿日期: 2008−12−29.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60634020); 博士点基金资助项目(20070533132; 20050533028); 新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET–07–0867); 湖南省科研创新基金资助项目(1343–74236000011)”.

的不确定关联奇异大系统的分散鲁棒镇定问题, 得到其时滞相关分散鲁棒镇定的充分条件. 文中所得结论均以矩阵不等式方式给出, 容易求解. 仿真结果表明了文中方法的可行性和有效性.

2 问题描述(Problem description)

考虑由N个相互关联的子系统构成的时滞关联奇异大系统, 其子系统可描述为

$$\begin{cases} E_i\dot{x}_i(t) = \\ (A_i+\Delta A_i)x_i(t)+(B_i+\Delta B_i)u_i(t)+ \\ \sum\limits_{j=1}^{N}(A_{ij}+\Delta A_{ij})x_j(t-\tau_{ij}), \\ x_i(t)=\varphi_i(t),\ t\in[-\tau,0],\ \tau=\max\limits_{i,j}\{\tau_{ij}\}. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x_i(t)\in\mathbb{R}^{n_i}, u_i(t)\in\mathbb{R}^{m_i}$分别为第$i$个子系统的状态向量和控制输入向量, E_i, A_i, A_{ij}, B_i均为维数相容的常数矩阵, A_{ij}为第j个子系统与第i个子系统的关联矩阵, 矩阵E_i满足$\mathrm{rank}(E_i)=q_i<n_i$, $\tau_{ij}\geqslant 0$是系统的关联项滞后时间, $\varphi_i(t)$是定义在$t\in[-\tau,\ 0]$上的实值连续的初始函数, ΔA_i, $\Delta B_i, \Delta A_{ij}$为时变结构不确定性矩阵并满足

$$[\Delta A_i\ \ \Delta B_i\ \ \Delta A_{ij}]=S_iF_i(t)[D_i\ \ G_i\ \ D_{ij}]. \tag{2}$$

这里$F_i(t)$为具有适当维数的Lesbesgue可测的时变未知矩阵, 且$F_i^{\mathrm{T}}(t)F_i(t)\leqslant I_i$, I_i表示适当维数的单位矩阵, S_i, D_i, G_i, D_{ij}为具有合适维数的常数矩阵.

本文的主要目的是为系统(1)设计一个分散状态反馈控制器使其相应的闭环系统正则、无脉冲、时滞相关分散鲁棒稳定. 为研究该问题, 首先给出如下定义和引理.

定义 1[1] 对任意给定矩阵$E\in\mathbb{R}^{n\times n}, A\in\mathbb{R}^{n\times n}$: 1) 若存在常数$s_0\in C$满足$\det(s_0E-A)\neq 0$, 则称矩阵束$(sE-A)$是正则的; 2) 若满足$\mathrm{rank}\begin{bmatrix}E & 0\\ A & E\end{bmatrix}=n+\mathrm{rank}(E)$, 则称系统$E\dot{x}(t)=Ax(t)$无脉冲.

引理 1[1] 若(E,A)正则、无脉冲, 则系统$E\dot{x}(t)=Ax(t)+A_dx(t-\tau)$存在唯一的无脉冲解.

引理 2[9] 若存在矩阵P, 满足$EP^{\mathrm{T}}=PE^{\mathrm{T}}\geqslant 0$和$P^{\mathrm{T}}A+A^{\mathrm{T}}P<0$, 则$(E,A)$正则、无脉冲.

引理 3[10] 对于任意适当维数的向量a,b, 对称矩阵U,W,R, 任意矩阵V,M,L, 若对称矩阵$\begin{bmatrix}U & V & M^{\mathrm{T}}\\ V^{\mathrm{T}} & W & L^{\mathrm{T}}\\ M & L & R\end{bmatrix}\geqslant 0$, 则有

$$-2a^{\mathrm{T}}(M\quad L)^{\mathrm{T}}b\leqslant\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}U & V & 0\\ V^{\mathrm{T}} & W & 0\\ 0 & 0 & R\end{bmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}. \tag{3}$$

引理 4 $y(t)$为$\mathbb{R}^n$上具有连续1阶导数的向量值函数, 对于对称矩阵U,W,R, 任意矩阵V,M,L, 奇异矩阵E, 若对称矩阵$\begin{bmatrix}U & V & M^{\mathrm{T}}\\ V^{\mathrm{T}} & W & L^{\mathrm{T}}\\ M & L & R\end{bmatrix}\geqslant 0$, 则有任意常数$h\geqslant 0$满足如下不等式:

$$-\int_{t-h}^{t}\dot{y}^{\mathrm{T}}(s)E^{\mathrm{T}}RE\dot{y}(s)\mathrm{d}s\leqslant \begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-h)\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\varTheta\begin{pmatrix}y(t)\\ y(t-h)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

其中

$$\varTheta=\begin{bmatrix}E^{\mathrm{T}}(M+M^{\mathrm{T}}+hU)E & E^{\mathrm{T}}(L-M^{\mathrm{T}}+hV)E\\ E^{\mathrm{T}}(L^{\mathrm{T}}-M+hV^{\mathrm{T}})E & E^{\mathrm{T}}(-L^{\mathrm{T}}-L+hW)E\end{bmatrix}.$$

证 由

$$Y=E[y(t)-y(t-h)-\int_{t-h}^{t}\dot{y}(s)\mathrm{d}s]=0$$

可知对任意矩阵M,L有

$$2[y^{\mathrm{T}}(t)E^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}+y^{\mathrm{T}}(t-h)E^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}]Y=0. \tag{5}$$

由引理3经过一定的数学推导可得式(4)成立.

证毕.

引理 5[11] 给定具有合适维数的矩阵$Q=Q^{\mathrm{T}}, H, T$和$R=R^{\mathrm{T}}>0$, 对于所有满足$F^{\mathrm{T}}(t)F(t)\leqslant R$的$F(t)$, 当且仅当存在$\varepsilon>0$使得

$$Q+\varepsilon HH^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}T^{\mathrm{T}}RT<0$$

成立时, 有

$$Q+HF(t)T+T^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}(t)H^{\mathrm{T}}<0.$$

注 1 $*$表示由对称矩阵的对称性所决定的部分, 例如$\begin{bmatrix}A & B\\ * & C\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ B^{\mathrm{T}} & C\end{bmatrix}$.

3 主要结论(Main results)

首先通过构造合适的Lyapunov-Krasovskii函数, 利用Lyapunov稳定性理论及引理4研究系统(6):

$$E_i\dot{x}_i(t)=A_ix_i(t)+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}x_j(t-\tau_{ij}) \tag{6}$$

的时滞相关稳定问题.

定理 1 任意给定标量$\tau>0$, 若存在对称正定矩阵$Q_{ij}, Q_{ji}, R_{ji}, U_{ji}, W_{ji}$及矩阵$P_i, M_{ji}, L_{ji}, V_{ji}$,

$j=1,2,\cdots,N$满足

$$P_i^{\mathrm{T}}E_i=E_i^{\mathrm{T}}P_i\geqslant 0, \tag{7}$$

$$\begin{bmatrix} U_{ji} & V_{ji} & M_{ji}^{\mathrm{T}} \\ V_{ji}^{\mathrm{T}} & W_{ji} & L_{ji}^{\mathrm{T}} \\ M_{ji} & L_{ji} & R_{ji} \end{bmatrix}\geqslant 0, \tag{8}$$

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & \Sigma_{13} & \sum_{14} \\ * & \Sigma_{22} & 0 & 0 \\ * & * & \Sigma_{33} & \Sigma_{34} \\ * & * & * & \Sigma_{44} \end{bmatrix}<0 \tag{9}$$

时, 则奇异关联大系统(6)正则、无脉冲且时滞相关稳定. 其中:

$$\Sigma_{11}=\begin{bmatrix} \Xi_i & 0 \\ * & \sum\limits_{j=1}^{N}\varUpsilon_{ij} \end{bmatrix},\ \Sigma_{12}=\begin{bmatrix} E_i^{\mathrm{T}}\varPi_{1i}\cdots & E_i^{\mathrm{T}}\varPi_{Ni} \\ 0 \quad \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{13}=\begin{bmatrix} \varPsi_{i1} & \cdots & \varPsi_{Ni} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},\ \Sigma_{14}=\begin{bmatrix} \tau A_i^{\mathrm{T}} & \cdots & \tau A_i^{\mathrm{T}} \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Sigma_{22}=\mathrm{diag}\left\{\varOmega_{i1},\cdots,\varOmega_{iN}\right\},\ \varPsi_{ij}=P_i^{\mathrm{T}}A_{ij},$$

$$\Sigma_{33}=\mathrm{diag}\left\{-Q_{i1},\cdots,-Q_{iN}\right\},$$

$$\Sigma_{44}=\mathrm{diag}\left\{-\tau R_{1i}^{-1},\cdots,-\tau R_{Ni}^{-1}\right\},$$

$$\Sigma_{34}=\begin{bmatrix} \tau A_{i1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \tau A_{i1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ \tau A_{iN}^{\mathrm{T}} & \cdots & \tau A_{iN}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$$\Xi_i=A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_i^{\mathrm{T}}A_i+(\sum_{j=1}^{N}Q_{ij}),$$

$$\varPi_{ji}=L_{ji}-M_{ji}^{\mathrm{T}}+\tau V_{ji},\ \varOmega_{ji}=-L_{ji}-L_{ji}^{\mathrm{T}}+\tau W_{ji},$$

$$\varUpsilon_{ji}=M_{ji}+M_{ji}^{\mathrm{T}}+\tau U_{ji},\ j=1,\cdots,N.$$

证　假设存在矩阵Q_{ij}, Q_{ji}, R_{ji}, U_{ji}, W_{ji}, P_i, M_{ji}, L_{ji}, V_{ji}满足式(7)～(9), 则由式(9)可知

$$\Xi_i=A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_i^{\mathrm{T}}A_i+(\sum_{j=1}^{N}Q_{ij})<0,$$

而$Q_{ij}>0$, 因此有式(10)成立:

$$A_i^{\mathrm{T}}P_i+P_i^{\mathrm{T}}A_i<0. \tag{10}$$

结合式(7)和式(10), 由引理1和引理2可知(E_i,A_i)正则、无脉冲.

由于(E_i,A_i)正则、无脉冲, 所以存在非奇异矩阵M_i和N_i使得

$$M_iE_iN_i=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ M_iA_iN_i=\begin{bmatrix} A_{1i} & A_{2i} \\ A_{3i} & A_{4i} \end{bmatrix},$$

$$M_i^{-\mathrm{T}}P_iN_i=\begin{bmatrix} P_{1i} & P_{2i} \\ P_{3i} & P_{4i} \end{bmatrix}.$$

由式(7)可知$P_{2i}=0$. 在式(10)两边分别左乘N_i^{T}和右乘N_i可得$A_{4i}^{\mathrm{T}}P_{4i}+P_{4i}^{\mathrm{T}}A_{4i}<0$, 即$A_{4i}$非奇异, 因此系统(6)正则、无脉冲.

由于系统(6)正则、无脉冲, 因此存在非奇异矩阵$\bar{M}_i$和$\bar{N}_i$使得

$$\bar{M}_iE_i\bar{N}_i=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ \bar{M}_iA_i\bar{N}_i=\begin{bmatrix} \bar{A}_i & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

定义矩阵:

$$\bar{P}_i=\bar{M}_i^{-\mathrm{T}}P_i\bar{N}_i=\begin{bmatrix} \bar{P}_{1i} & \bar{P}_{2i} \\ \bar{P}_{3i} & \bar{P}_{4i} \end{bmatrix},$$

$$\bar{M}_iA_{ij}\bar{N}_i=\begin{bmatrix} \bar{A}_{1ij} & \bar{A}_{2ij} \\ \bar{A}_{3ij} & \bar{A}_{4ij} \end{bmatrix},$$

$$\bar{N}_i^{\mathrm{T}}Q_{ij}\bar{N}_i=\begin{bmatrix} \bar{Q}_{1ij} & \bar{Q}_{2ij} \\ \bar{Q}_{3ij} & \bar{Q}_{4ij} \end{bmatrix},$$

则系统(6)可等价为

$$\begin{cases} \dot{\xi}_{1i}(t)=\bar{A}_i\xi_{1i}(t)+\sum\limits_{j=1}^{N}\bar{A}_{1ij}\xi_{1j}(t-\tau_{ij})+ \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{N}\bar{A}_{2ij}\xi_{2j}(t-\tau_{ij}), \\ 0=\xi_{2i}(t)+\sum\limits_{j=1}^{N}\bar{A}_{3ij}\xi_{1j}(t-\tau_{ij})+ \\ \qquad \sum\limits_{j=1}^{N}\bar{A}_{4ij}\xi_{2j}(t-\tau_{ij}). \end{cases}$$

由式(9)可知

$$\begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{13} \\ * & \Sigma_{33} \end{bmatrix}<0. \tag{11}$$

将Σ_{11}, Σ_{13}和Σ_{33}代入上式, 在$\bar{P}_{2i}=0$的条件下, 经过一定的数学推导可得

$$(\sum_{j=1}^{N}\bar{A}_{4ij}^{\mathrm{T}})(\sum_{j=1}^{N}\bar{Q}_{4ij})(\sum_{j=1}^{N}\bar{A}_{4ij})-\sum_{j=1}^{N}\bar{Q}_{4ij}<0. \tag{12}$$

由于$\bar{Q}_{4ij}$正定, 因此由式(12)可知

$$\rho(\sum_{j=1}^{N}\bar{A}_{4ij})<1, \tag{13}$$

其中$\rho(\sum\limits_{j=1}^{N}\bar{A}_{4ij})$为矩阵$\sum\limits_{j=1}^{N}\bar{A}_{4ij}$的谱半径.

选择如下Lyapunov-Krasovskii泛涵:

$$V(x(t))=V_1(x(t))+V_2(x(t))+V_3(x(t)),$$

其中:

$$V_1(x(t))=\sum_{i=1}^{N}x_i^{\mathrm{T}}(t)E_i^{\mathrm{T}}P_ix_i(t),$$

$$V_2(x(t)) = \sum_{i=1}^{N}\{\sum_{j=1}^{N}[\int_{t-\tau_{ij}}^{t} x_j^{\mathrm{T}}(s)Q_{ij}x_j(s)\mathrm{d}s]\},$$

$$V_3(x(t)) = \sum_{i=1}^{N}\{\sum_{j=1}^{N}[\int_{-\tau_{ij}}^{0}\int_{t+\beta}^{t}\dot{x}_j^{\mathrm{T}}(s)E_j^{\mathrm{T}}R_{ij}E_j\dot{x}_j(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\beta]\}.$$

这里P_i, Q_{ij}, R_{ij}均为对称正定矩阵. $V(x(t))$ 沿系统(6)的导数为

$$\dot{V}(x(t)) \leqslant \sum_{i=1}^{N}\xi_i^{\mathrm{T}}(t)\Gamma_i\xi_i(t). \tag{14}$$

其中:

$$\boldsymbol{\xi}_i^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(t)E_i^{\mathrm{T}}\quad \boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)\quad \boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t)],$$

$$\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}_i^{\mathrm{T}}(t-\tau_{1i})E_i^{\mathrm{T}}\cdots \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-\tau_{Ni})E_i^{\mathrm{T}}],$$

$$\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t) = [\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}(t-\tau_{i1})\cdots \boldsymbol{x}-N^{\mathrm{T}}(t-\tau_{iN})],$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_i = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\Gamma}_{11i} & \boldsymbol{\Gamma}_{12i} & \boldsymbol{\Gamma}_{13i}\\ * & \boldsymbol{\Gamma}_{22i} & 0\\ * & * & \boldsymbol{\Gamma}_{33i}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Gamma}_{11i} = \begin{bmatrix}\bar{\Theta}_i & 0\\ 0 & \sum_{j=1}^{N}Y_{ji}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{12i} = \begin{bmatrix}E_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}_{1i} & \cdots & E_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Pi}_{Ni}\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{13i} = \begin{bmatrix}\Lambda_{i1} & \cdots & \Lambda_{iN}\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{22i} = \mathrm{diag}\{\Omega_{1i},\cdots,\Omega_{Ni}\},$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_{33i} = \begin{bmatrix}-Q_{i1}+\tau A_{i1}^{\mathrm{T}}\Upsilon A_{i1} & \cdots & \tau A_{i1}^{\mathrm{T}}\Upsilon A_{iN}\\ * & \vdots & \vdots\\ * & * & -Q_{iN}+\tau A_{iN}^{\mathrm{T}}\Upsilon A_{iN}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\Theta}_i = A_i^{\mathrm{T}}P_i + P_i^{\mathrm{T}}A_i + (\sum_{j=1}^{N}Q_{ji}) + A_i^{\mathrm{T}}\Upsilon A_i,$$

$$\Upsilon = \sum_{j=1}^{N}\tau R_{ji},\ \Lambda_{ij} = P_i^{\mathrm{T}}A_{ij} + \tau A_i^{\mathrm{T}}\Upsilon A_{ij},$$

且$Y_{ji}, \Pi_{ji}, \Omega_{ji}$同定理1, $j=1,2,\cdots,N$.

由式(14)可知$\dot{V}(x(t))<0$, 即$\Gamma_i<0$, 由Schur补可知与式(9)等价. 容易证明$\|\ \xi_i(t)\ \|$有界且一致连续, 由Barbalat结论[12]可知$\lim\limits_{t\to\infty}\xi_{1i}(t)=0$, 即慢子系统稳定. 同理由式(16)可知$\lim\limits_{t\to\infty}\xi_{2i}(t)=0$, 即快子系统稳定. 综上可知系统(6)稳定. 证毕.

下面研究奇异关联系统(1)在$\Delta A_i = \Delta B_i = \Delta A_{ij} = 0$条件下时滞相关分散镇定问题, 即为系统(1)设计分散状态反馈控制器:

$$u_i(t) = K_ix_i(t),\ i=1,2,\cdots,N \tag{15}$$

使闭环系统

$$\begin{cases}E_i\dot{x}_i(t)=(A_i+B_iK_i)x_i(t)+\sum_{j=1}^{N}A_{ij}x_j(t-\tau_{ij}),\\ x_i(t)=\varphi_i(t),\ t\in[-\tau,0],\ \tau=\max\limits_{i,j}\{\tau_{ij}\}\end{cases} \tag{16}$$

正则、无脉冲、时滞相关渐近稳定.

定理 2 给定标量$\tau>0$, 若存在正定矩阵$\bar{Q}_{ij}$, $\bar{Q}_{ji}, \bar{U}_{ji}, \bar{W}_{ji}, S_{ji}$和矩阵$X_i, Y_i, \bar{V}_{ji}, \bar{L}_{ji}$满足

$$E_iX_i = X_i^{\mathrm{T}}E_i^{\mathrm{T}} \geqslant 0, \tag{17}$$

$$\begin{bmatrix}\bar{U}_{ji} & \bar{V}_{ji} & \bar{M}_{ji}^{\mathrm{T}}\\ \bar{V}_{ji}^{\mathrm{T}} & \bar{W}_{ji} & \bar{L}_{ji}^{\mathrm{T}}\\ \bar{M}_{ji} & \bar{L}_{ji} & X_i^{\mathrm{T}}S_{ji}^{-1}X_i\end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{18}$$

$$\Phi_i = \begin{bmatrix}\bar{\Sigma}_{11} & \bar{\Sigma}_{12} & \bar{\Sigma}_{13} & \bar{\Sigma}_{14}\\ * & \bar{\Sigma}_{22} & 0 & 0\\ * & * & \bar{\Sigma}_{33} & \bar{\Sigma}_{34}\\ * & * & * & \bar{\Sigma}_{44}\end{bmatrix} < 0 \tag{19}$$

时, 奇异关联大系统(1)正则、无脉冲, 并可以通过状态反馈控制器(15)时滞相关分散镇定, 且若式(17)~(19)存在可行解, 那么分散状态反馈控制器参数由式(20)决定:

$$K_i = Y_iX_i^{-1},\ i=1,2,\cdots,N. \tag{20}$$

其中:

$$\bar{\Sigma}_{11} = \begin{bmatrix}\bar{\Xi}_i & 0\\ * & \Sigma_{j=1}^{N}\bar{\Upsilon}_{ij}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\Sigma}_{12} = \begin{bmatrix}E_i^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}_{1i} & \cdots & E_i^{\mathrm{T}}\bar{\Pi}_{Ni}\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{\Sigma}_{13} = \begin{bmatrix}\bar{\Psi}_{i1} & \cdots & \bar{\Psi}_{Ni}\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{\Sigma}_{14} = \begin{bmatrix}\tau\Upsilon_i^{\mathrm{T}} & \cdots & \tau\Upsilon_i^{\mathrm{T}}\\ 0 & \cdots & 0\end{bmatrix},$$

$$\bar{\Sigma}_{22} = \mathrm{diag}\left\{\bar{\Omega}_{i1},\cdots,\bar{\Omega}_{iN}\right\},$$

$$\bar{\Sigma}_{33} = -\mathrm{diag}\left\{\bar{Q}_{i1},\cdots,\bar{Q}_{iN}\right\},$$

$$\bar{\Sigma}_{44} = \mathrm{diag}\left\{-\tau S_{1i},\cdots,-\tau S_{Ni}\right\},$$

$$\bar{\Sigma}_{34} = \begin{bmatrix}\tau X_i^{\mathrm{T}}A_{i1}^{\mathrm{T}} & \cdots & \tau X_i^{\mathrm{T}}A_{i1}^{\mathrm{T}}\\ \vdots & & \vdots\\ \tau X_i^{\mathrm{T}}A_{iN}^{\mathrm{T}} & \cdots & \tau X_i^{\mathrm{T}}A_{iN}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix},$$

$$\bar{\Xi}_i = \Upsilon_i^{\mathrm{T}} + \Upsilon_i + (\sum_{j=1}^{N}\bar{Q}_{ji}),$$

$$\Upsilon_i = A_iX_i + B_iY_i,$$

$$\bar{\Upsilon}_{ji} = \bar{M}_{ji} + \bar{M}_{ji}^{\mathrm{T}} + \tau\bar{U}_{ji},$$

$$\bar{\Pi}_{ji} = \bar{L}_{ji} - \bar{M}_{ji}^{\mathrm{T}} + \tau\bar{V}_{ji},$$
$$\bar{\Omega}_{ji} = -\bar{L}_{ji} - \bar{L}_{ji}^{\mathrm{T}} + \tau\bar{W}_{ji},$$
$$\bar{\Psi}_{ij} = A_{ij}X_i.$$

证　令

$$\begin{aligned}
&X_i = P_i^{-1},\ \bar{M}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}M_{ji}X_i,\\
&Y_i = K_iX_i,\ \Upsilon_i = A_iX_i + B_iY_i,\\
&R_{ji} = S_{ji}^{-1},\ \bar{U}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}U_{ji}X_i,\\
&\bar{L}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}L_{ji}X_i,\ \bar{V}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}V_{ji}X_i,\\
&\bar{W}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}W_{ji}X_i,\ \bar{Q}_{ij} = X_i^{\mathrm{T}}Q_{ij}X_i,\\
&\bar{Q}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}Q_{ji}X_i,\ \bar{\Upsilon}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}\Upsilon_{ji}X_i,\\
&\bar{\Pi}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}\Pi_{ji}X_i,\ \bar{\Omega}_{ji} = X_i^{\mathrm{T}}\Omega_{ji}X_i,\\
&\bar{\Psi}_{ij} = E_iA_{ij}X_i,
\end{aligned}$$

则容易证明定理2成立.　　证毕.

式(21)存在非线性项$X_i^{\mathrm{T}}S_{ji}^{-1}X_i$, 但利用文献[13]的算法, 可获得最大时滞上界τ.

下面在定理2的基础上, 为不确定系统(1)设计分散状态反馈控制器(15), 使闭环系统

$$\begin{cases}
E_i\dot{x}_i(t) = \\
(A_i + \Delta A_i + (B_i + \Delta B_i)K_i)x_i(t) + \\
\sum\limits_{j=1}^{N}(A_{ij} + \Delta A_{ij})x_j(t-\tau_{ij}),\\
x_i(t) = \varphi_i(t),\ t \in [-\tau, 0],\ \tau = \max\limits_{i,j}\{\tau_{ij}\}
\end{cases} \tag{21}$$

时滞相关鲁棒稳定.

定理 3　任意给定标量$\tau > 0$和满足约束(2)的矩阵S_i, D_i, G_i, D_{ij}, 若存在对称正定矩阵$\bar{Q}_{ij}$, $\bar{Q}_{ji}$, $\bar{U}_{ji}, \bar{W}_{ji}, S_{ji}$和矩阵$X_i, Y_i, \bar{V}_{ji}, \bar{L}_{ji}$以及标量$\zeta_i > 0$满足式(17)(18)和如下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} \Phi_i & \zeta_iH_i & T_i^{\mathrm{T}} \\ * & -\zeta_iI_i & 0 \\ * & * & -\zeta_iI_i \end{bmatrix} < 0 \tag{22}$$

时, 不确性奇异关联大系统(1)正则、无脉冲, 并可以通过控制器(15)时滞相关分散鲁棒镇定, 且若式(17)(18)和(22)存在可行解, 那么分散状态反馈控制器的参数由式(20)确定. 其中, Φ_i同定理2, 且

$$\begin{aligned}
H_i^{\mathrm{T}} = [&(E_iS_i)^{\mathrm{T}}\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ \cdots\ 0\\
&\tau S_i^{\mathrm{T}}\ \cdots\ \tau S_i^{\mathrm{T}}],\\
T_i = [&D_iX_i + G_iY\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ D_{i1}X_i\ \cdots\\
&D_{iN}X_i\ 0\ \cdots\ 0].
\end{aligned}$$

证　利用式(2)和引理5可获得定理3.　　证毕.

4　算例(Example)

考虑由两个子系统构成的奇异关联系统, 且不确定性满足式(2), 其参数为

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_1 = \begin{bmatrix} -1.8 & 1 \\ 2 & -2.5 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ A_{11} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix},$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ A_{21} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 54 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix},\ S_1 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ -0.1 \end{bmatrix},$$

$$S_2 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix},\ D_1 = [-0.06\ \ 0.04],$$

$$G_1 = -0.06,\ G_2 = -0.5,\ D_{11} = [0\ \ -0.1],$$

$$D_{12} = [0.1\ \ 0],\ D_{22} = [0.1\ \ 0],$$

$$D_2 = [0.04\ \ -0.02],\ D_{21} = [0.01\ \ 0.01].$$

在$\tau \leqslant 0.76$的条件下, 用文献[13]的算法求解定理2, 可得分散状态反馈控制器为

$$K_1 = [-1.0257\ \ -0.6841],$$
$$K_2 = [-1.8973\ \ -1.2581].$$

在此控制器作用下, 各子系统状态响应曲线和控制输入曲线分别如图1～3所示.

由数值算例和系统状态的响应曲线以及控制输入曲线图可知, 在所求得的控制器作用下, 整个闭环奇异关联大系统正则、无脉冲、时滞相关渐近稳定.

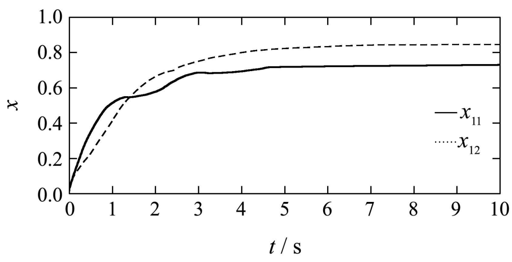

图 1　子系统1的状态响应曲线

Fig. 1　State response of subsystem 1

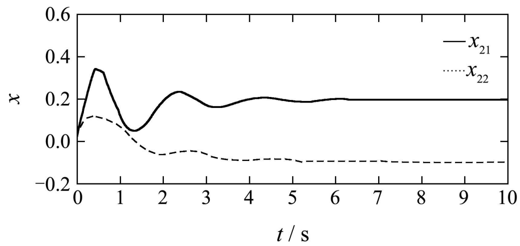

图 2 子系统2的状态响应曲线

Fig. 2 State response of subsystem 2

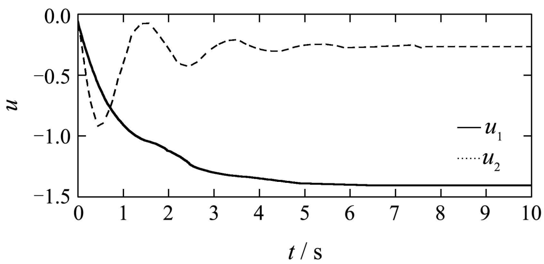

图 3 控制输入u_1和u_2的曲线

Fig. 3 The curves of u_1 and u_2

求解定理3, 可得使不确定奇异关联大系统(1)时滞相关分散鲁棒镇定的一个状态反馈控制器为

$$K_1 = [-1.0098 \quad -0.0587],$$
$$K_2 = [-8.0011 \quad -1.4502].$$

5 结论(Conclusions)

针对一类具有关联时滞和状态矩阵、控制矩阵以及关联矩阵存在不确定性的关联奇异大系统, 通过构造特殊的Lyapunov-Krasovskii函数, 利用Lyapunov稳定性理论与时滞积分矩阵不等式相结合的方法, 讨论了该类系统的时滞相关分散鲁棒镇定问题, 并给出了分散控制器的设计方法. 所给出的分散鲁棒镇定判据是与时滞大小相关的, 并且用矩阵不等式表示, 从而可以用MATLAB方便求解. 数值例子说明了该方法的有效性.

参考文献(References):

[1] XU S Y, DOOREN P V, STEFAN R. Robust stability and stabilization for singular systems with state delay and parameter uncertainty[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(7): 1122 – 1128.

[2] 鲁仁全, 黄文君, 苏宏业, 等. 一类不确定Lurie 时滞奇异系统的鲁棒H_∞控制[J]. 自动化学报, 2004, 30(6): 920– 927.
(LU Renquan, HUANG Wenjun, SU Yongye, et al. Robust H_∞ control for a class of uncertain lurie singular systems with time-delays[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(6): 920 – 927.)

[3] 马树萍, 程兆林. 时滞相关型离散时变时滞奇异系统的鲁棒镇定[J]. 控制与决策, 2006, 21(5): 536 – 540.
(MA Shuping, CHENG Zhaolin. Delay-dependent robust stabilization for discrete-time singular systems with time-varying delays[J]. *Control and Decision*, 2006, 21(5): 536 – 540.)

[4] 董心壮, 张庆灵. 滞后广义系统的状态反馈H_∞控制[J]. 控制理论与应用, 2004, 21(6): 941 – 944.
(DONG Xinzhuang, ZHANG Qingling. State feedback H-infinity control of linear singular systems with time-delay[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 941 – 944.)

[5] 刘碧玉, 桂卫华, 吴敏. 时滞关联大系统基于分散控制的无源性[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(1): 52 – 56.
(LIU Biyu, GUI Weihua, WU Min. Passivity of interconnected control systems with time-delays based on decentralized control[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(1): 52 – 56.)

[6] 桂卫华, 谢永芳, 吴敏, 等. 基于LMI的不确定性关联时滞大系统的分散鲁棒控制[J]. 自动化学报, 2002, 28(1): 155 – 159.
(GUI Weihua, XIE Yongfang, WU Min, et al. Decentralized robust control for uncertain interconnected system with time-delay based on LMI approach[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2002, 28(1): 155 – 159.)

[7] 史国栋, 沃松林, 邹云. 一类关联时滞广义大系统的稳定性与分散镇定[J]. 南京理工大学学报, 2006, 30(1): 70 – 75.
(SHI Guodong, WO Songlin, ZOU Yun. Stability and decentralized stabilization for a class of interconnected singular large-scale system with time-delay[J]. *Journal of Nanjing University of Science and Technology*, 2006, 30(1): 70 – 75.)

[8] XIE Y F, JIANG Z H, GUI W H, et al. Decentralized robust delay-dependent stabilization for singular large scale systems based on descriptor output feedback[C] //*Proceedings of the 6th World Congress on Control and Automation*. Dalian: IEEE, 2006: 1191 – 1195.

[9] MASUBUCHI I, KAMITANE Y, OHARA A, et al. H_∞ control for descriptor systems: A matrix inequalities approach[J]. *Automatica*, 1997, 33(3): 669 – 673.

[10] 刘碧玉. 关联系统的时滞相关分散鲁棒控制研究[D]. 长沙: 中南大学, 2005,

[11] XIE L. Output feedback H_∞ control of systems with parameter uncertainty[J]. *International Journal of Control*, 1996, 63(4): 742 – 750.

[12] HALE J K, LUNEL S M V. *Introduction to Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer-Verlag, 1993.

[13] LEE Y S, MOON Y S, KWON W H, et al. Delay-dependent robust H_∞ control for uncertain systems with a state-delay[J]. *Automatica*, 2004, 40(1): 65 – 72.

作者简介:

蒋朝辉 (1978—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为大系统分散控制、鲁棒控制、奇异系统控制, E-mail: jiang_zhaohui@126.com;

桂卫华 (1950—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为工业大系统递阶和分散控制理论及应用、鲁棒控制、复杂生产过程建模与控制;

谢永芳 (1972—), 男, 博士, 教授, 主要研究方向为分散控制和鲁棒控制、过程控制.