文章编号: 1000−8152(2010)05−0658−05

一种分数阶预测控制器的研究与实现

李大字[1], 曹　娇[1], 关圣涛[1], 谭天伟[2]

(1. 北京化工大学 自动化系, 北京 100029; 2. 北京化工大学 北京市生物加工过程重点实验室, 北京 100029)

摘要: 本论文研究了一种新型预测控制器RTD-A的分数阶实现方法及应用. 与常规控制器比较, RTD-A控制器具有参数意义明确, 易于整定和实施的优点. 论文将RTD-A控制器扩展到分数阶形式, 并与经Z-N法整定的分数阶$\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$控制器和Wang-Juang-Chan法整定的PID控制器进行了比较. 所提出的分数阶预测控制器在设定值跟踪, 克服负荷扰动, 鲁棒性等方面都有较理想的控制性能. 仿真结果验证了这种分数阶预测控制器的有效性.

关键词: 分数阶系统; 分数阶控制器; RTD-A控制

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Research and implementation of a fractional predictive controller

LI Da-zi[1], CAO Jiao [1], GUAN Sheng-tao[1], TAN Tian-wei[2]

(1. Department of Automation, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China;
2. Beijing Key Laboratory of Bioprocess, Beijing University of Chemical Technology, Beijing 100029, China)

Abstract: The implementation and application of a new fractional order RTD-A(robustness, tracking, disturbance rejection-overall aggressiveness) controller are studied. Compared to the conventional PID controller, main advantages of the RTD-A controller are its transparent parameters, convenient adjustment and implementation. The RTD-A controller is extended to its fractional form and compared with fractional $\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$ controller tuned by Z-N method and PID controller tuned by Wang-Juang-Chan method. Proposed fractional predictive controller shows good performances in set-point tracking, disturbance rejection and robustness. Simulation results show the validity of the proposed method.

Key words: fractional order system; fractional order controller; RTD-A control

1　引言(Introduction)

分数阶微积分理论建立至今已经有300多年的历史[1]. 但是由于计算机水平的相对落后, 很难将分数阶微积分环节数字实现, 早期主要侧重于理论研究, 发展十分缓慢. 随着现代计算机硬件、软件以及计算智能的迅速发展, 近年来很多领域都开始应用分数阶微积分理论, 在自动控制领域出现了分数阶控制理论等新的分支[2], 并逐渐开始了分数阶控制的应用研究[3,4]. 对于分数阶系统, 通常是先用整数阶降阶模型近似, 然后采用整数阶参数整定方法, 如改进的Ziegler-Nichols算法[5], 基于ITAE误差性能指标的Wang-Juang-Chan算法[6]等进行整定. 然而这些方法不可避免的存在较大模型偏差, 无法实现令人满意的分数阶系统的控制设计. 因此基于分数阶系统设计有效的分数阶控制器十分必要.

分数阶控制是包括系统描述为分数阶的或者控制器为分数阶的系统. 现有研究大部分集中于分数阶控制器[7]. 作者曾研究了将先进控制方法–内模控制应用于分数阶PID控制器整定, 得到了较为理想的分数阶系统控制效果[8] . RTD-A控制器是Babatunde等[9]提出的, 其参数整定意义明确, 实施方便, 在设定值跟踪, 克服负荷扰动等方面都获得了优于常规PID控制器的控制性能, 且具有很强的鲁棒性. 本文尝试将适用于整数阶系统的RTD-A控制器扩展为适合于分数阶系统控制的分数阶控制器. 直接基于分数阶系统模型进行控制器设计, 避免了采用整数阶降阶模型近似带来的模型误差. 论文还应用随机搜索RasID优化算法对高阶分数阶系统直接进行辨识的方法, 以获取适用于此控制器设计所需的低阶分数阶模型, 然后进行控制器参数整定, 并最终用于分数阶系统控制.

2　分数阶系统及其数字描述(Fractional order system and its discrete description)

分数阶系统可由分数阶微分方程的形式来描述:

收稿日期: 2007−09−11; 收修改稿日期: 2009−12−09.
基金项目: 国家“973”计划资助项目(2007CB714300); 北京市优秀人才培养计划资助项目(2009D013000000003).

$$a_nD_t^{\beta_n}y(t)+a_{n-1}D_t^{\beta_{n-1}}y(t)+\cdots+$$
$$a_1D_t^{\beta_1}y(t)+a_0D_t^{\beta_0}y(t)=u(t). \tag{1}$$

式中: $a_i(i=1,2,\cdots,n)$为任意实数, $D_t^{\beta_n}$表示函数$y(t)$的β_n阶微分, 在函数$y(t)$具有零初始条件的情况下, 对应的分数阶控制系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{1}{a_ns^{\beta_n}+a_{n-1}s^{\beta_{n-1}}+\cdots+a_1s^{\beta_1}+a_0s^{\beta_0}}. \tag{2}$$

由Grünwald-Letnikov分数阶微积分定义[10], $y(t)$的β阶导数表示为

$${}_aD_t^{\beta_i}y(t)\approx\frac{1}{h^{\beta_i}}\sum_{j=0}^{[(t-a)/h]}\omega_j^{(\beta_i)}y_{(t-jh)}=$$
$$\frac{1}{h^{\beta_i}}[y_t+\sum_{j=1}^{[(t-a)/h]}\omega_j^{(\beta_i)}y_{(t-jh)}]. \tag{3}$$

其中: h为采样步长, $\omega_i^{(\beta_i)}$可由下面的递推公式求出:

$$\omega_0^{(\beta_i)}=1,\omega_j^{(\beta_i)}=(1-\frac{\beta_i+1}{j})\omega_{j-1}^{(\beta_i)},$$
$$j=1,2,\cdots. \tag{4}$$

将式(4)代入式(1), 可直接导出微分方程数值解[6]:

$$y_t=\frac{1}{\sum\limits_{i=0}^{n}\frac{a_i}{h^{\beta_i}}}[u_t-\sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{h^{\beta_i}}\sum_{j=1}^{[(t-a)/h]}\omega_j^{(\beta_i)}y_{(t-jh)}]. \tag{5}$$

该算法可以直接实现, 从而可求解得出分数阶系统的单位阶跃响应.

3 分数阶RTD-A控制器(Fractional RTD-A controller)

针对常规PID控制结构的局限性所造成的控制性能指标与参数整定之间的关系不直观、控制器整定复杂等缺点, Ogunnaike等提出了单变量RTD-A鲁棒控制器[9]. 其控制步骤可分为输出预测、误差预测更新、模型误差预测及控制作用计算等4个部分, 具体可参考文献[9]. 下面将RTD-A控制器推广到分数阶系统.

1) 输出预测.

设工业过程对象可辨识为一分数阶加纯滞后的模型:

$$\frac{y(s)}{u(s)}=G(s)=\frac{K}{\tau s^{\beta}+1}\mathrm{e}^{-\alpha s}. \tag{6}$$

其中参数β不仅限于整数, 可取任意正实数(不失一般性, 高阶分数阶系统可通过降阶近似成此模型). 将其转换为如下形式:

$${}_aD_t^{\beta}y(t)\tau+y(t)=Ku(t-\alpha). \tag{7}$$

由Grünwald-Letnikov分数阶微积分离散形式定义可得

$${}_aD_t^{\beta}y(t)\approx\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{j=0}^{[(t-a)/h]}\omega_j^{(\beta)}y(t-jh). \tag{8}$$

其中: a为初始条件时间, t为末态时间, h为采样时间.

设当前时刻为k, 对应时间$t=kh$, 同时令初始条件时间a取当前采样时刻k的前一采样时刻, 即$k-1$时刻, 则式(8)的分数阶微积分离散形式为

$${}_aD_t^{\beta}y(kh)\approx\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{j=0}^{[(kh-(k-1)h)/h]}\omega_j^{(\beta)}y(kh-jh)\approx$$
$$\frac{1}{h^{\beta}}\sum_{j=0}^{1}\omega_j^{(\beta)}y(kh-jh)\approx$$
$$\frac{1}{h^{\beta}}(\omega_0^{(\beta)}y(kh)+\omega_1^{\beta}y((k-1)h)). \tag{9}$$

为书写简便, 将kh简写为k, 则有

$${}_aD_t^{\beta}\approx\frac{1}{h^{\beta}}(\omega_0^{(\beta)}y(k)+\omega_1^{(\beta)}y(k-1)). \tag{10}$$

分别将式(7)(10)进行离散化实现, 整理得

$$\tau\frac{1}{h^{\beta}}(\omega_0^{(\beta)}y(k)+\omega_1^{(\beta)}y(k-1))+y(k)=$$
$$Ku(k-m). \tag{11}$$

由ω递推公式(4)得: $\omega_0^{(\beta)}=1,\omega_1^{(\beta)}=-\beta$, 代入式(11)得

$$y(k)=\frac{\tau\beta}{\tau+h^{\beta}}y(k-1)+\frac{Kh^{\beta}}{\tau+h^{\beta}}u(k-m). \tag{12}$$

式(12)即为适用于RTD-A控制器的分数阶过程模型, 取$a=\frac{\tau\beta}{\tau+h^{\beta}},b=\frac{Kh^{\beta}}{\tau+h^{\beta}}$, 得

$$y(k)=ay(k-1)+bu(k-m). \tag{13}$$

式(13)与整数阶形式完全一致, 因此可将RTD-A整数阶控制器推广到分数阶RTD-A控制器. 这里值得指出的是, RTD-A控制器要求系数$0<a<1$, 因此要求分数阶模型系数a, 即$\frac{\tau\beta}{\tau+h^{\beta}}$也必须为0~1之间的数值, 根据分数阶模型阶次$\beta$的大小, 可分为两种情况:

a) 分数阶模型阶次β满足$0<\beta<1$, 则系数$\frac{\tau\beta}{\tau+h^{\beta}}$始终在0~1之间, 满足条件.

b) 分数阶模型阶次β满足$\beta\geqslant1$, 则由条件$\frac{\tau\beta}{\tau+h^{\beta}}<1$可知, 必须满足条件: $h^{\beta}>(\beta-1)\tau$, 这

样所设计的控制器才不会导致系统发散. 上述2种情况, 将在仿真中进行验证.

经过m个滞后时间步长, 输出预测为

$$\hat{y}(k+m+1)=a^{m+1}\hat{y}(k)+b\mu(k,m)+bu(k). \tag{14}$$

其中$\mu(k,m)=\sum_{i=1}^{m}a^iu(k-i)$, 由式(14), 从当前$k$时刻向未来预测$N$个时间步长, 假设未来输入作用:

$$u(k+i)=u(k), i=1,\cdots,N. \tag{15}$$

得到未来N步长预测输出为:

$$\hat{y}(k+m+i)=a^{m+i}\hat{y}(k)+a^{i-1}b\mu(k,m)+b\eta_iu(k),\quad 1\leqslant i\leqslant N. \tag{16}$$

其中

$$\eta_i=\frac{1-a^i}{1-a}. \tag{17}$$

实际预测中, 输出预测还须考虑到各种误差干扰, 这样输出预测会更准确.

2) 误差预测更新.

对象实际数据$y(k)$与模型输出$\hat{y}(k)$的偏差, 即

$$e(k)=y(k)-\hat{y}(k) \tag{18}$$

是各种误差干扰成分的累加. 考虑真实对象

$$y(k+1)=a^0y(k)+b^0u(k-m^0)+\delta_{\rm S}(k)+\delta_{\rm D}(k)+n(k), \tag{19}$$

其中: a^0,b^0,m^0表示与系统模型相对应的系统真实参数; $\delta_{\rm S}$表示高阶、非线性系统动态干扰; $\delta_{\rm D}$表示未建模部分干扰; n代表随机噪声部分.

3) 模型误差预测.

模型误差归结为可预测误差部分(指模型参数及结构引起误差部分)和不可预测误差部分(指外界干扰). 当前k时刻及未来N个时刻预测误差分别为

$$\hat{e}_{\rm D}(k)=\theta_{\rm R}\hat{e}_{\rm D}(k+1)+(1-\theta_{\rm R})e(k), \tag{20}$$

$$\hat{e}_{\rm D}(k+j|k)=\hat{e}_{\rm D}(k)+(\frac{1-\theta_{\rm D}}{\theta_{\rm D}})[1-(1-\theta_{\rm D})^j]\nabla\hat{e}_{\rm D}(k). \tag{21}$$

其中$\theta_{\rm R}$和$\theta_{\rm D}$为控制器参数. 将式(16)(17)加和到系统输出, 得到带误差更新的输出预测式:

$$\hat{y}(k+m+i)=a^{m+i}\hat{y}(k)+a^{i-1}b\mu(k,m)+b\eta_iu(k)+\hat{e}_{\rm D}(k+m+i|k). \tag{22}$$

4) 控制作用$u(k)$.

目标函数定义为

$$J(u(k))=\min_{u(k)}\sum_{i=1}^{N}(y^*(k+i)-\hat{y}(k+m+i))^2. \tag{23}$$

其中$y^*(k+i)$为跟踪设定值轨迹, 其更新公式为

$$y^*(k+i)=\theta_{\rm T}^iy^*(k)+(1+\theta_{\rm T}^i)y_{\rm d}(k). \tag{24}$$

其中: $y_{\rm d}$为理想设定值; $\theta_{\rm T}$为控制器参数; N为预测步长. 应用最小二乘原理, 对目标函数求导, 得最优解:

$$u(k)=\frac{1}{b}\frac{\sum_{i=1}^{N}\eta_i\varphi_i(k)}{\sum_{i=1}^{N}\eta_i^2}. \tag{25}$$

其中

$$\varphi_i(k)=y^*(k+i)-d^{m+i}\hat{y}(k)-d^{i-1}b\mu(k,m)-\hat{e}_{\rm D}(k+m+i|k). \tag{26}$$

这样, 在每个采样时刻k, 更新模型预测输出后, 可求出最优控制作用. 各控制器参数的意义如下: $\theta_{\rm R}$越趋近于1, 表明模型失配越严重; $\theta_{\rm T}$越趋近于1, 表明输出跟踪给定越迅速; $\theta_{\rm D}$越趋近于1, 表明噪声抑制作用越弱; $\theta_{\rm A}$越趋近于1, 表明预测步长数越多. 由于意义明确, 因此实际应用中可根据要求有针对性地调整参数.

4 分数阶系统辨识与降阶(Model identification and model reduction of fractional order system)

采用分数阶微积分可以相对简明精确的建立整数阶系统难以建立的模型. 随着现代技术的发展, 使用分数阶模型对实际对象和动态过程进行精确描述的优点越来越明显.

对于一些形式较为复杂的高阶分数阶系统, 可在系统阶跃响应的基础上, 采用优化方法直接辨识其降阶模型, 以满足分数阶RTD-A控制器的要求. 本文采用一种基于随机搜索的RasID优化算法, 获取分数阶最优降阶模型. 因已知对象模型结构形式, 这里模型参数和阶次可同时辨识. 构造寻优向量$\theta=[k,\tau,\beta,\alpha]$. 优化性能指标:

$$\min J=\sum_{i=0}^{t}|C(i)-C_{\rm r}(i)|. \tag{27}$$

通过随机搜索优化算法找出一组参数, 使模型的单位阶跃响应输出$C_{\rm r}(t)$与原系统的单位阶跃响应输出$C(t)$匹配误差最小.

5　仿真实例(Examples)

下面通过仿真, 验证所设计的分数阶预测控制器的性能. 仿真结果分别与将模型降阶为整数阶模型后根据Wang-Juang-Chan算法[6]设计的整数阶PID控制器和基于Z-N法整定的分数阶$\mathrm{PI}^{\lambda}\mathrm{D}^{\mu}$控制器[5]进行了比较. 设分数阶系统表示为

$$G(s)=\frac{1}{s^{2.6}+2.2s^{1.5}+2.9s^{1.3}+3.32s^{0.9}+1}. \tag{28}$$

采用随机搜索RasID优化算法求取分数阶降阶模型和利用Wang-Juang-Chan算法求取整数阶降阶模型, 分别如下:

$$G_1(s)=\frac{0.99}{5.8973s^{1.09}+1}\mathrm{e}^{-0.653s}, \tag{29}$$

$$G_2(s)=\frac{1.873}{s+0.1885}\mathrm{e}^{-0.653s}. \tag{30}$$

其开环单位响应曲线如图1所示.

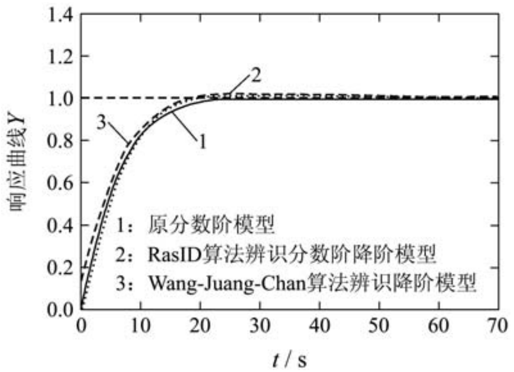

图 1　模型开环响应曲线对比

Fig. 1　Comparison of the open-loop model response

由图1可见, 两种优化降阶模型的近似效果都较为理想.

5.1　分数阶阶次β的影响(Effects of the fractional order β)

从上面的讨论可知, 当分数阶阶次$\beta\geqslant 1$时, 要保证控制系统收敛, 则要满足条件:

$$h>\sqrt[\beta]{(\beta-1)T}. \tag{31}$$

本例中, 由RasID算法辨识阶次$\beta=1.09$, 大于1, 这时就要考虑收敛问题. 将T,β两参数带到式(31)中, 得采样步长条件:

$$h>0.5593, \tag{32}$$

取采样步长: $h=0.5$, 不满足条件(32), 系统响应如图2所示.

由图2可知, 在不满足式(32)条件下, 无论如何调节控制器参数, 都不能使系统收敛. 值得思考的是, 由于β的辨识问题, 使得采样步长h无形中有了限制. 而从分数阶微积分离散形式定义, 采样步长h越小, 逼近原系统精度越高, 这样的取值问题就互成矛盾, 这是在应用分数阶RTD-A控制器必须要注意的问题. 以下采样步长统一取为$h=1$.

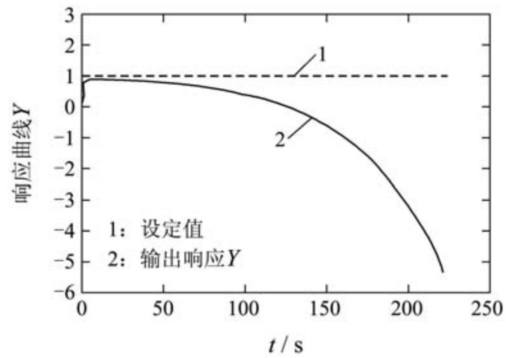

图 2　β值对系统输出的影响

Fig. 2　Effects of different β on system response

5.2　设定值跟踪(Set-point tracking)

RTD-A控制器参数如下: $\theta_{\mathrm{R}}=0.2$, $\theta_{\mathrm{T}}=0.1$, $\theta_{\mathrm{D}}=0.01$, $\theta_{\mathrm{A}}=0.1$, Wang-Juang-Chan算法设计PID控制器参数为: $K_{\mathrm{p}}=4.7960$, $T_{\mathrm{i}}=5.6315$, $T_{\mathrm{d}}=0.3076$, Z-N法设计参数: $K_{\mathrm{p}}=0.3676$, $T_{\mathrm{i}}=2.2253$, $T_{\mathrm{d}}=1.5786$, $\lambda=0.8338$, $\mu=0.8464$, 结果示于图3.

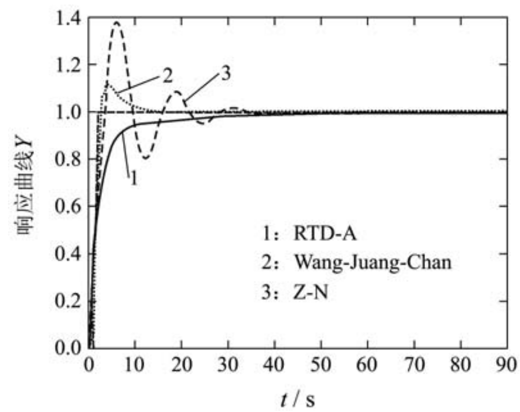

图 3　系统输出响应对比

Fig. 3　Comparison of the system response

5.3　抑制噪声(Noise rejection)

RTD-A控制器参数如下: $\theta_{\mathrm{R}}=0.75$, $\theta_{\mathrm{T}}=0.1$, $\theta_{\mathrm{D}}=0.01$, $\theta_{\mathrm{A}}=0.4$. Wang-Juang-Chan算法设计PID控制器参数不变, 结果示于图4, 5.

从上述仿真实例可以看出, 分数阶RTD-A控制器在设定值跟踪和抑制噪声干扰方面的控制效果都优于Wang-Juang-Chan算法最优设计PID控制器.

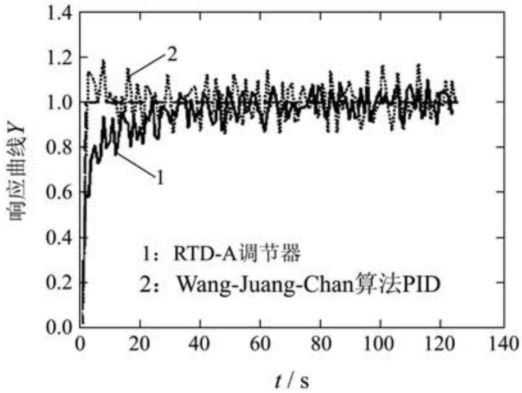

图4 加入噪声后系统输出响应对比

Fig. 4 Comparison of the system response with noise

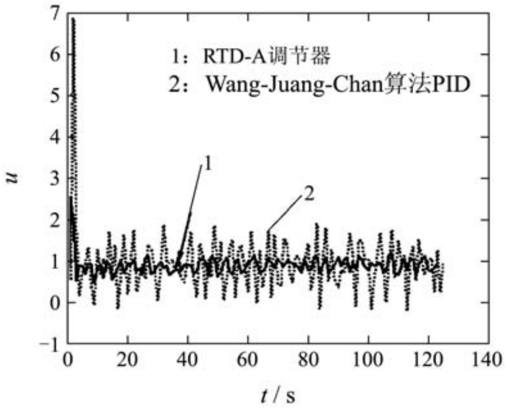

图5 加入噪声后控制作用对比

Fig. 5 Comparison of the control action with noise

6 结论(Conclusion)

论文将RTD-A控制器推广到分数阶系统, 并与Wang-Juang-Chan算法最优设计的PID控制器和Z-N法整定的$PI^{\lambda}D^{\mu}$控制器进行比较, 验证了所设计预测控制器的正确性与有效性, 同时讨论了分数阶阶次β值对于控制器收敛性的影响. RTD-A控制器算法实施简单, 参数整定方便, 且取值在$0 \sim 1$之间. 其4个参数都分别针对控制器的各个性能指标, 有明确的意义, 可根据实际情况, 单独进行整定, 这是常规PID控制器所达不到的, 因而有很好的发展前景. 不足的是, RTD-A控制器目前还仅限于一定对象模型, 此外控制器参数优化问题也有待探讨, 这是今后研究的重点.

参考文献(References):

[1] OUSTALOUP A, SABATIER J, LANUSSE P. From fractal robustness to CRONE control[J]. *Fractional Calculus and Applied Anatysis*, 1992, 2(1): 1 – 30.

[2] PODLUBNY I. Fractional-order systems and $PI^{\lambda}D^{\mu}$ controllers[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1999, 44(1): 208 – 214.

[3] 王振滨, 曹广益, 曾庆山, 等. 分数阶PID控制器及其数字实现[J]. 上海交通大学学报, 2004, 38(4): 517 – 520.
(WANG Zhenbin, CAO Guangyi, ZENG Qingshan, et al. Fractional order PID Controller and Its Digital Implementation[J]. *Journal of Shanghai Jiao Tong University*, 2004, 38(4): 517 – 520.)

[4] 张邦楚, 李臣明, 韩子鹏, 等. 分数阶微积分及其在飞行控制系统中的应用[J]. 上海航天, 2005, 22(3): 11 – 14.
(ZHANG Bangchu, LI Chenming, HAN Zipeng, et al. Theory and applications of fractional calculus in flight control system[J]. *Aerospace Shanghai*, 2005, 22(3): 11 – 14.)

[5] DUARTE V, COSTA J. Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols-type rules[J]. *Signal Processing*, 2006, 86(10): 2771 – 2784.

[6] WANG F S, JUANG W S, CHAN C T. Optimal tuning of PID controllers for single and cascade control loops[J]. *Chemical Engineering Communications*, 1995, 132(1): 15 – 34.

[7] CHEN Y Q, MOORE K L, VINAGRE B M, et al. Robust PID controller autotuning with a phase shaper[M] //*Fractional Differentiation and Its Applications*. Bordeaux: [s.n.], 2004.

[8] 李大字, 刘展, 靳其兵, 等. 分数阶控制器参数整定策略研究[J]. 系统仿真学报, 2007, 19(19): 4402 – 4406.
(LI Dazi, LIU Zhan, JIN Qibing, et al. Study on optimization of fractional-order controller PID parameters[J]. *Journal of System Simulation*, 2007, 19(19): 4402 – 4406.)

[9] BABATUNDE A, OGUNNAIKE, KAPIL MUKATI. An alternative structure for next generation regulatory controllers. Part I: Basic theory for design, development and implementation[J]. *Journal of Process Control*, 2006, 16(5): 499 – 509.

[10] 薛定宇, 赵春娜. 分数阶系统的分数阶PID控制器设计[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 771 – 776.
(XUE Dingyu, ZHAO Chunna. Fractional order PID controller design for fractional order system[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(5): 771 – 776.)

作者简介:

李大字 (1970—), 女, 副教授, 博士, 主要从事人工智能、复杂系统建模与先进控制等方面的研究, E-mail: lidz@mail.buct.edu.cn;

曹 娇 (1984—), 女, 硕士研究生, 主要从事分数阶系统控制研究;

关圣涛 (1984—), 男, 硕士研究生, 主要从事先进控制系统研究;

谭天伟 (1963—), 男, 教授, 博士生导师, 主要从事生化工程研究.