第 26 卷第 8 期
2009 年 8 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 8
Aug. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)08−0896−03

LQ终端控制的生成函数法与Riccati变换法的等价性

李振虎, 谭述君, 吴志刚

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 辽宁 大连 116023)

摘要: 通过定义线性哈密顿系统新形式的第3类生成函数, 建立了求解线性二次终端控制问题的生成函数方法与Riccati变换方法的直接联系, 并证明两种方法导出的最优控制律是等价的. 生成函数方法的优势在于可以灵活地处理边界约束条件. 本文根据Riccati变换方法沿时间逆向求解问题的特点, 定义了适于逆向正则变换的第3类生成函数, 用于求解哈密顿两点边值问题, 可得到用生成函数表示的最优控制律. 并通过验证生成函数方法所得最优控制律的各部分与Riccati变换法所得的结果相对应, 证明了两种方法所得控制律的等价性.

关键词: LQ软终端控制; LQ硬终端控制; 生成函数; Riccati变换法; 哈密顿系统

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Equivalence between generating function method and Riccati transformation method for LQ terminal control

LI Zhen-hu, TAN Shu-jun, WU Zhi-gang

(State Key Lab of Structural Analysis for Industrial Equipment, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116023, China)

Abstract: By defining the third-kind generating function(GF) for a linear Hamiltonian system, this paper relates the generating function approach to the Riccati transformation method for LQ terminal control problems; and proves the equivalence of optimal terminal control laws derived by these two different methods. Since the generating function approach is adaptive to different types of boundary constraints, it provides a substantial advantage over the classical Riccati transformation method. Firstly, considering the backward sweeping character of the Riccati transformation method, we formulate the third-kind generating function in accordance with the backward canonical transform of the linear Hamiltonian system. Next, solving a Hamiltonian two-point-boundary-value problem, we obtain the new optimal control law in term of the generating function. Finally, comparing all terms of each new control law with the conventional control law derived by the Riccati transformation method, we verify the equivalence of these two different solution strategies.

Key words: LQ soft terminal control; LQ hard terminal control; generating function; Riccati transformation; Hamiltonian system

1 引言(Introduction)

线性二次控制是多变量线性系统控制的基本方法, 主要包括LQ调节器(LQ regulator)、LQ终端控制器(LQ terminal controller)这两类[1]. LQ调节器的应用相当广泛[1], LQ终端控制器则可应用于导弹拦截[1]、机械臂定位[2]、卫星编队重构[3]、航天器姿态控制[4]等问题. LQ终端控制器设计中, 根据系统终端状态约束的不同, 又可以分为软终端控制器(soft terminal controller)和硬终端控制器(hard terminal controller)两类[1]. 与LQ调节器不同, LQ终端控制器的控制律是时变的[5]. 设计LQ终端控制器的传统方法是Riccati变换方法[1], 基于经典力学哈密顿系统理论的生成函数方法[6,7]也可用于LQ终端控制器的设计, 该方法本质上是利用生成函数的性质求解LQ控制导出的哈密顿系统两端边值问题并得到相应的最优控制律. 其优点在于当终端约束条件变化时, 生成函数方法不需要重新求解耦合的矩阵微分方程组而只需要做一些代数运算就可以构造新的控制律, 由文献[1,6]生成函数方法得到的控制律在形式上与传统控制律存在比较大的差别. 本文针对该问题, 定义了不同于经典分析力学[8]及文献[6,7]中的生成函数形式的新的第3类生成函数并证明了与传统方法得到的最优控制律的等价性.

收稿日期: 2008−01−17; 收修改稿日期: 2008−11−17.

基金项目: 高校博士点基金资助项目(20070141067); 国家自然科学基金资助项目(10632030); 国家重点基础研究专项经费资助项目(2005CB321704).

2 LQ调节器和LQ终端控制器(LQ regulator and LQ terminal controllers)

考虑满足可控性和可观性条件的线性系统:

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), x(t_0)=x_0. \tag{1}$$

有限时间LQ调节器的控制目标是寻找使指标泛函

$$\mathcal{J}_1=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}x_f^{\mathrm{T}}Q_f x_f \tag{2}$$

最小的控制律$u(t)$. 其中加权矩阵Q和Q_f为半正定实对称矩阵, R是正定实对称矩阵. LQ软终端约束控制的指标泛函为[1]

$$\mathcal{J}_2=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^{\mathrm{T}}Qx+u^{\mathrm{T}}Ru]\mathrm{d}t+\frac{1}{2}e_f^{\mathrm{T}}Q_f e_f. \tag{3}$$

其中$e_f=M_f x(t_f)-\psi$. LQ硬终端约束控制则可以实现系统终端状态的零误差, 要求

$$M_f x(t_f)=\psi. \tag{4}$$

需要在指标泛函(3)中引入该约束, 构成新的泛函[1]

$$\mathcal{J}_3=\mathcal{J}_2+\nu^{\mathrm{T}}[M_f x(t_f)-\psi]. \tag{5}$$

这是一个波尔扎问题, 可构造系统哈密顿函数:

$$\mathcal{H}(x,\lambda,t)=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}x\\\lambda\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}Q & A^{\mathrm{T}}\\ A & -BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\\lambda\end{Bmatrix}. \tag{6}$$

由最优性的必要条件可得到[9]

$$u(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda(t)=-K\lambda(t). \tag{7}$$

通过求解哈密顿边值问题, 可得上述3类LQ控制问题的状态反馈控制律. 上述最优控制问题对应的哈密顿微分方程为[9]

$$\begin{Bmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{\lambda}(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A & -BR^{-1}B^{\mathrm{T}}\\ -Q & -A^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x(t)\\\lambda(t)\end{Bmatrix}. \tag{8}$$

上述3类LQ控制问题所对应的边界条件除初始条件$x(t_0)=x_0$外, 终端条件分别为[1]

$$\lambda(t_f)^R=Q_f x(t_f), \tag{9}$$

$$\lambda(t_f)^{SC}=M_f^{\mathrm{T}}Q_f[M_f x(t_f)-\psi], \tag{10}$$

$$\lambda(t_f)^{HC}=M_f^{\mathrm{T}}Q_f M_f x(t_f)+M_f^{\mathrm{T}}\nu. \tag{11}$$

注 1 为使表述简洁, 本文将用x, λ, x_f, λ_f,$\overline{B}$,K,S_f分别表示$x(t)$, $\lambda(t)$, $x(t_f)$, $\lambda(t_f)$, $BR^{-1}B^{\mathrm{T}}$, $R^{-1}B^{\mathrm{T}}$, $M_f^{\mathrm{T}}Q_f M_f$. 公式中R, SC, HC分别表示有限时间LQ调节器和软、硬终端约束控制器.

3 生成函数法求解LQ控制问题(Solve LQ control problems with generating functions)

生成函数给出了新变量和原对偶变量之间的正则变换关系, 经常采用4类生成函数, 它们之间可以通过Legendre变换互相转换[6]:

$$\mathcal{F}_1(x,x_f,t_f;t)=\mathcal{F}_3(x,\lambda_f,t_f;t)+x_f^{\mathrm{T}}\lambda_f, \tag{12}$$

$$\mathcal{F}_2(\lambda,x_f,t_f;t)=\mathcal{F}_1(x,x_f,t_f;t)+x^{\mathrm{T}}\lambda, \tag{13}$$

$$\mathcal{F}_4(\lambda,\lambda_f,t_f;t)=\mathcal{F}_2(x_f,\lambda,t_f;t)+x_f^{\mathrm{T}}\lambda_f. \tag{14}$$

不同的生成函数由于选用的新变量不同, 导致4类生成函数得到的最优控制律的描述不尽相同, 然而本质上是完全等价的. 为了揭示由生成函数方法与传统Riccati变换方法得到的最优控制律之间的联系和等价性, 考虑到Riccati变换方法沿时间逆向求解问题的特点, 根据哈密顿函数式(6), 本文定义适于逆向正则变换的第3类生成函数$\mathcal{F}_3(x,\lambda_f,t_f;t)$:

$$\mathcal{F}_3=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}x\\\lambda_f\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}-F_{xx}(t_f;t) & -F_{x\lambda}(t_f;t)\\ -F_{\lambda x}(t_f;t) & F_{\lambda\lambda}(t_f;t)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\\lambda_f\end{Bmatrix}. \tag{15}$$

利用第3类生成函数的性质可得[7,8]

$$x_f=-\frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial\lambda_f}=[F_{\lambda x}\ \ -F_{\lambda\lambda}]\begin{Bmatrix}x\\\lambda_f\end{Bmatrix}, \tag{16}$$

$$\lambda=-\frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial x}=[F_{xx}\ \ F_{x\lambda}]\begin{Bmatrix}x\\\lambda_f\end{Bmatrix}. \tag{17}$$

由方程(17), 哈密顿函数$\mathcal{H}(x,\lambda_f,t)$可用$x$和$\lambda_f$表示:

$$\mathcal{H}=\frac{1}{2}\begin{Bmatrix}x\\\lambda_f\end{Bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}I & F_{xx}\\ 0 & F_{\lambda x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Q & A^{\mathrm{T}}\\ A & -\overline{B}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I & 0\\ F_{xx} & F_{x\lambda}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}x\\\lambda_f\end{Bmatrix}. \tag{18}$$

将式(15)和式(18)代入Hamilton-Jacobi方程[6]

$$-\frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial t}+\mathcal{H}(x,-\frac{\partial\mathcal{F}_3}{\partial x},t)=0. \tag{19}$$

可得式(15)中F_{xx}, $F_{\lambda x}=F_{x\lambda}^{\mathrm{T}}$, $F_{\lambda\lambda}$满足

$$\dot{F}_{xx}=F_{xx}\overline{B}F_{xx}-Q-F_{xx}A-A^{\mathrm{T}}F_{xx}, \tag{20}$$

$$\dot{F}_{\lambda x}=-F_{\lambda x}(A-\overline{B}F_{xx}), \tag{21}$$

$$\dot{F}_{\lambda\lambda}=-F_{\lambda x}\overline{B}F_{\lambda x}^{\mathrm{T}}, \tag{22}$$

$$F_{xx}(t_f;t_f)=F_{\lambda\lambda}(t_f;t_f)=0, F_{\lambda x}(t_f;t_f)=I. \tag{23}$$

式(16)分别代入式(9)~(11)解得

$$\lambda_f^R=[I+Q_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}Q_f F_{\lambda x}x, \tag{24}$$

$$\lambda_f^{SC}=[I+S_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}[S_f F_{\lambda x}x-M_f^{\mathrm{T}}Q_f\psi], \tag{25}$$

$$\lambda_f^{HC}=[I+S_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}[S_f F_{\lambda x}x+M_f^{\mathrm{T}}\nu]. \tag{26}$$

将3式分别依次代入式(17)及式(7)得到最优控制律

$$u_R^*=-K\{F_{xx}+F_{x\lambda}[I+Q_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}Q_f F_{\lambda x}\}x, \tag{27}$$

$$u_{SC}^*=-K\{F_{xx}+F_{x\lambda}[I+S_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}S_f F_{\lambda x}\}x+KF_{x\lambda}[I+S_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}M_f^{\mathrm{T}}Q_f\psi, \tag{28}$$

$$u_{HC}^*=-K\{F_{xx}+F_{x\lambda}[I+S_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}S_f F_{\lambda x}\}x-KF_{x\lambda}[I+S_f F_{\lambda\lambda}]^{-1}M_f^{\mathrm{T}}\nu. \tag{29}$$

其中式(29)中ν为常拉格朗日乘子, 可由初始边界条件求得. 当$t=t_0$时式(16)和式(26)变为

$$x_{\mathrm{f}}=F^0_{\lambda x}x_0-F^0_{\lambda\lambda}\lambda_{\mathrm{f}}, \tag{30}$$

$$\lambda_{\mathrm{f}}=[I+S_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda}]^{-1}[S_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda x}x_0+M_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\nu]. \tag{31}$$

其中F^0_{**}表示$F_{**}(t_{\mathrm{f}};t_0)$, 式(30)左乘$M_{\mathrm{f}}$并由式(4)得

$$M_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda x}x_0-M_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda}\lambda_{\mathrm{f}}=\psi. \tag{32}$$

将式(31)代入该式, 解得

$$\nu=\{M_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda}[I+S_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda}]^{-1}M_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}\}^{-1}\{M_{\mathrm{f}}[I-F^0_{\lambda\lambda}(I+S_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda})^{-1}S_{\mathrm{f}}]F^0_{\lambda x}x_0-\psi\}. \tag{33}$$

4 与Riccati变换法所得最优控制律的等价性(Equivalence to optimal feedback control law by Riccati transformation method)

上面采用第3类生成函数方法分别导出了有限时间LQ调节器、软终端约束LQ控制以及硬终端约束LQ控制的最优控制律, 下面将指出其与Riccati变换法之间的联系, 并证明它们的等价性. 首先给出由Riccati变换法导出的最优控制律[1]:

$$u^*_R=-KP(t)x, \tag{34}$$

$$u^*_{SC}=-KS(t)x-Kg(t), \tag{35}$$

$$u^*_{HC}=-KS(t)-KM^{\mathrm{T}}(t)\nu. \tag{36}$$

其中$P(t),S(t),g(t),M(t),\nu$以及ν中的$\Omega(t)$分别满足

$$\dot P=-PA-A^{\mathrm{T}}P-Q+P\overline{B}P\,,\ P(t_{\mathrm{f}})=Q_{\mathrm{f}}, \tag{37}$$

$$\dot S=-SA-A^{\mathrm{T}}S-Q+S\overline{B}S\,,\ S(t_{\mathrm{f}})=S_{\mathrm{f}}, \tag{38}$$

$$\dot g=-[A-\overline{B}S]^{\mathrm{T}}g\,,\ g(t_{\mathrm{f}})=-M_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}Q_{\mathrm{f}}\psi, \tag{39}$$

$$\nu=\Omega^{-1}(t_0)[M(t_0)x_0-\psi], \tag{40}$$

$$\dot M=-M[A-\overline{B}S]\,,\ M(t_{\mathrm{f}})=M_{\mathrm{f}}, \tag{41}$$

$$\dot\Omega=-M\overline{B}M^{\mathrm{T}}\,,\ \Omega(t_{\mathrm{f}})=0. \tag{42}$$

对比式(27)~(29)与式(34)~(36)、式(33)与式(40)可知要使两种方法所得最优控制律相等需证

$$P=F_{xx}+F_{x\lambda}[I+Q_{\mathrm{f}}F_{\lambda\lambda}]^{-1}Q_{\mathrm{f}}F_{\lambda x}, \tag{43}$$

$$S=F_{xx}+F_{x\lambda}[I+S_{\mathrm{f}}F_{\lambda\lambda}]^{-1}S_{\mathrm{f}}F_{\lambda x}, \tag{44}$$

$$g=-F_{x\lambda}[I+S_{\mathrm{f}}F_{\lambda\lambda}]^{-1}M_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}Q_{\mathrm{f}}\psi, \tag{45}$$

$$M^{\mathrm{T}}=F_{x\lambda}[I+S_{\mathrm{f}}F_{\lambda\lambda}]^{-1}M_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}, \tag{46}$$

$$\Omega(t_0)=M_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda}[I+S_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda}]^{-1}M_{\mathrm{f}}^{\mathrm{T}}, \tag{47}$$

$$M(t_0)=M_{\mathrm{f}}[I-F^0_{\lambda\lambda}(I+S_{\mathrm{f}}F^0_{\lambda\lambda})^{-1}S_{\mathrm{f}}]F^0_{\lambda x}. \tag{48}$$

由矩阵求逆引理可得

$$I-F_{\lambda\lambda}[I+S_{\mathrm{f}}F_{\lambda\lambda}]^{-1}S_{\mathrm{f}}=[I+F_{\lambda\lambda}S_{\mathrm{f}}]^{-1}. \tag{49}$$

将其代入式(48)得

$$M(t_0)=M_{\mathrm{f}}[I+F^0_{\lambda\lambda}S_{\mathrm{f}}]^{-1}F^0_{\lambda x}. \tag{50}$$

同时根据S_{f},$F_{\lambda\lambda}$对称性, 式(46)可化为

$$M(t)=M_{\mathrm{f}}[I+F_{\lambda\lambda}S_{\mathrm{f}}]^{-1}F_{\lambda x}. \tag{51}$$

要证式(48)和式(46)只需证式(51). 根据式(20)~(23)易验证式(43)~(45)、式(51)及取任何时刻的式(47)分别满足式(37)~(39)、式(41)、式(42).

5 结论(Conclusion)

目前文献中采用生成函数方法和传统Riccati变换方法所得LQ终端控制律在形式上存在很大的差异, 难以直接建立两者的联系. 本文针对该问题, 定义了新的沿时间逆向正则变换的第3类生成函数, 导出了相应的最优控制律, 与传统Riccati变换法的结果建立了联系, 证明了两类控制律的等价性. 这样, 针对传统结果所发展的高效精确数值方法[10,11]就可直接用于这类最优控制问题的求解和计算.

参考文献(References):

[1] BRYSON A E. *Dynamic Optimization*[M]. Menlo Park, CA: Addison Wesley, 1999.

[2] SAVKIN A V, PETERSEN I R. Robust control with a terminal state constraint[J]. *Automatica*, 1996, 32(7): 1001 – 1005.

[3] RAHMANI A, MESBAHI M, HADAEGH F Y. Optimal balanced-energy formation flying maneuvers[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2006, 29(6): 1395 – 1403.

[4] JUANG J N, TRUNER J D, CHUN H M. Closed-form solutions for a class of optimal quadratic regulator problems with terminal constraints[J]. *Journal of Dynamic Systems Measurement, and Control*, 1986, 108(1): 44 – 48.

[5] BRYSON A E. Time-varying linear-quadratic control[J]. *Optimization Theory and Applications*, 1999, 100(3): 515 – 525.

[6] PARK C, GUIBOUT V, SCHEERES D J. Solving optimal continuous thrust rendezvous problems with generating functions[J]. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2006, 29(2): 321 – 331.

[7] GUIBOUT V M, SCHEERES D J. Solving relative two-point boundary value problems: spacecraft formation flight transfers application[J]. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, 2004, 27(4): 693 – 704.

[8] GOLDSTEIN H. *Classical Mechanics*[M]. Reading Ma: Addison-Wesley, 1980.

[9] 戴忠达. 自动控制理论基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1991.

[10] 钟万勰, 吴志刚, 谭述君. 状态空间控制理论与计算[M]. 北京: 科学出版社, 2007.

[11] 陈阳舟. 周期时变线性系统的一般线性二次型最优控制[J]. 控制理论与应用, 2002, 19(3): 415 – 418.
(CHEN Yangzhou. General linear quadratic optimal for periodically time-varying linear systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2002, 19(3): 415 – 418.)

作者简介:

李振虎 (1983—), 男, 硕士研究生, 研究方向为飞行器动力学与控制, E-mail: leezhenhu@gmail.com;

谭述君 (1979—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为控制系统设计的数值方法, E-mail: ccnntsj@student.dlut.edu.cn;

吴志刚 (1971—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为飞行器动力学与控制、最优控制与鲁棒控制, E-mail: wuzhg@dlut.edu.cn.