

多元过程能力指数的研究综述

王立岩, 唐加福, 宫 俊

(东北大学 流程工业综合自动化教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 多元质量特性的诊断与控制是现代统计过程控制技术研究的热点和难点, 如何分析多元过程的能力及如何计算其多元过程能力指数还没有公认的方法. 本文详细列举了4种主要思路下构建多元过程能力指数的模型, 简单介绍了几种特别的计算和度量多元过程能力指数的方法, 如Bootstrap法、几何距离法等, 最后对各种思路和模型进行了简单对比.

关键词: 统计过程控制; 多元过程能力分析; 多元过程能力指数

中图分类号: O213.1

文献标识码: A

A review on multivariate processes capability indices

WANG Li-yan, TANG Jia-fu, GONG Jun

(Key Laboratory of Integrated Automation of Process Industrial of MOE, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: Diagnosing and controlling the multivariate characteristics are hot and difficult topics in the area of modern statistical process control. There is no any effective way to analyze the multivariate process capability, nor is to compute its indices. Four ideas of computing multivariate process capability indices(MPCIs) and the corresponding models are described; some special methods for their computation are also briefly introduced, such as the bootstrap method, and the geometric-distance approach. Finally, a simple comparison and conclusion of these models and methods are made.

Key words: statistical process control; analysis of multivariate process capability; multivariate process capability indices(MPCIs)

1 引言(Introduction)

统计过程控制(statistical process control, SPC)技术由两部分组成: 一是过程控制, 一是过程能力分析. 经典的单元SPC理论研究已经相对成熟, 而多元SPC的相关理论问题仍是目前的研究热点和难点. 多元质量特性的协同控制与改进是一个复杂且困难的过程, 包括质量特性的选择、抽样计划的制定、控制图类型的确立、控制参数的调整设计、过程异因的诊断分析以及改进措施的实施等多项工作; 而相关多元过程能力指数的研究工作更是重中之重.

过程能力分析是评价过程质量能力的工具, 是质量管理中统计过程控制的重要组成部分, 也是六西格玛管理的标准工具之一. 自朱兰博士于1974年提出“过程能力指数”(process capability index, PCI)的概念后^[1], 近30年来, 学术界已经建立和发展了20种单变量PCI和7种多变量PCI^[2].

国际上过程能力指数的研究已经历经4代, 对于

目前正处在热点研究阶段的多元过程能力指数及非正态过程能力指数的研究, 我国则起步较晚; 本文在对单元过程能力指数研究简单介绍的基础上, 对国内外关于多元过程能力指数的研究及其发展情况加以综述, 介绍了当前盛行的4种思路下计算和度量多元过程能力指数的具体模型和原理, 文末还简单评述了各种方法的异同及其在多元过程能力指数研究中存在的困难.

2 定义和分类(Definition and types)

过程能力指数的研究始于单元情况下的计算和分析, GB/T4091-2001《常规控制图》提出: 过程能力(process capability)是指过程的加工水平满足技术标准的能力, 是衡量过程加工内在一致性的标准, 是以质量特性值正常波动的分散范围表示, 是体现过程质量特性的重要参数; 而过程能力指数PCI是衡量生产过程中的产品质量特性适合规格和接近目标值的能力^[3], 主要用于定量描述加工过程满足技术规

格要求的能力。

为了更好的理解多元过程能力指数的各种模型和算法, 首先简单介绍单元过程能力指数的定义和分类, 并在此基础上, 说明其与多元过程能力指数的联系和区别。

2.1 单元过程能力指数的定义和分类(Definition and types of single PCI)

2.1.1 单元过程能力指数C系列(The C series of single PCI)

当过程处于统计受控状态且服从正态分布时, 常用的单元过程能力指数有以下几种:

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}, \quad (1)$$

6 σ 指数, 或称潜在的过程能力指数^[1];

$$C_{pk} = \min\left\{\frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma}\right\} = (1 - k)C_p, \quad (2)$$

当过程均值和规格中心有差距时, 也称表现指数^[4];

$$C_{pm} = \frac{USL - LSL}{6 \times (\sigma^2 + (\mu - T)^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad (3)$$

过程均值和目标值有差距时, 也称田口(Taguchi)过程能力指数^[5];

$$C_{pkm} = \frac{d - |\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}} = \frac{C_{pk}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\mu - T}{\sigma}\right)^2}}, \quad (4)$$

当过程均值与目标值、规格中心都有差距时^[6];

$$C_p(u, v) = \frac{d - u|\mu - M|}{3\sqrt{\sigma^2 + v(\mu - T)^2}}, \quad (5)$$

Vannman提出的通式^[7];

其中: USL, LSL 分别为上、下规格限(公差限), μ 为过程均值, σ 为过程的标准差, $d = \frac{USL - LSL}{2}$; k 为偏移系数: $k = \frac{2\varepsilon}{T}$, $\varepsilon = |\mu - M|$, $M = \frac{USL + LSL}{2}$; T 为顾客要求或期望的目标值。

2.1.2 基于两种质量概念的过程能力指数(PCIs based on two kinds of quality notions)

我国质量管理研究的泰斗—张公绪教授及其学生张静教授曾提出基于两种质量概念的两种过程能力指数 C_p 的诊断理论^[8,9], 即对于任一工序而言, 存在 C_{p-part} “分能力”与 $C_{p-total}$ “总能力”两种过程能力指数, 其中 $C_{p-total} \leq C_{p-part}$, 即 C_{p-part} 是该工序的过程能力指数的上界, 它决定于该工序的人、机、法、环(料代表上影, 与分质量无关), 并能从中进行质量预测, 此外在采取措施消除上影之前, 我们还可以预先知道改进后过程能力指数的最大提高幅度等信息, 这无疑是我国的独创理论。

单元过程能力指数的研究成果为本文提供了很好的参考, 如单元过程能力指数的定义和分类、基于废品率(不合格品率)的过程能力指数、可行性参数、修正过程能力指数、过程变量服从非正态分布等, 本文不再赘述, 具体参见文献[10]。

2.2 多元过程能力指数的研究方法和思路(Ideas and methods of multi-variable process capability indices(MPCIs))

多元过程能力指数的定义和度量具有重要的研究价值, 但到目前为止, 还没有一种公认的方法, 即普遍存在的问题给其定义和度量带来困难和障碍, 如过程服从非正态分布、多个质量特性或指标之间存在关联性等; 如果这些问题没有解决, 就无法验证和说明多元过程能力指数的合理性和有效性。

2.2.1 多元过程能力指数的定义和分类(Definition and types of MPCIs)

目前盛行的多元过程能力指数的研究思路, 主要有以下4种:

- 1) 基于过程产出的(不)合格率计算和推导多元过程能力指数;
- 2) 基于单元过程能力指数概念的推广;
- 3) 通过各种综合评价技术来研究多元过程能力指数;
- 4) 基于质量损失函数的多元过程能力指数。

2.2.2 与单元过程能力指数的区别和联系(Differences and relations between PCIs and MPCIs)

从上面提到的计算多元过程能力指数的思路来看, 多元过程能力指数和单元过程能力指数间存在着密切的联系, 当然也会有本质的不同。

在单元变量的情况下, 过程能力指数可以借助于估计的分布函数与公差之间比较的图示来定义, 即单元过程能力指数就是假定的正态分布曲线区间同上下规格界限区间的比值。

而在多元变量的情况下, 如果过程数据服从多元正态分布, 那么一定概率水平的椭圆(2维)和椭球(多维)形轮廓线就定义了一些区域, 这些区域类似于单元变量情况下的区间, 将这些区域的面积、体积作比值进行计算和分析, 就可得到多元过程能力指数计算的模型。

3 多元过程能力指数的计算和度量(Calculations and measurements of MPCIs)

基于以上4种思路, 本文将展开介绍其各自包含模型的原理并比较其优劣, 从中可以看到多元过程能力指数的研究历程和进展, 并得到更多的启发。

3.1 基于过程产出的(不)合格率计算和推导 多元过程能力指数(MPCIs based on process probabilities of conforming or unconforming)

当过程涉及多个质量特性时,为了计算其过程能力指数,人们通常把每个质量特性的规格区域集合起来作为该多元过程的规格区域。

假设多元过程 $X = (x_1, x_2, \dots, x_v)$ 为 v 维随机变量,其概率密度为 $f(x)$, 它的第 i 个质量特性 $x_i (i = 1, 2, \dots, v)$ 的规格区域为 $[LSL_i, USL_i]$, 其中, LSL_i, USL_i 分别为第 i 个质量特性的上下规格限,则该多元过程的规格区域(通常根据其维数的多少而分别称为长方形、立方体和超长方体。在不致引起误解的情况下,下文统称为长方体)为

$$D = \{x | LSL_i \leq x_i \leq USL_i, i = 1, 2, \dots, v\},$$

简记为 $\bigcap_{i=1}^v [LSL_i, USL_i]$, 下同。这里需要说明的是公式中的符号与上述单元过程能力指数公式中的符号有所差异,为了下文讨论的方便和全文的一致性,做如下改动:规格中心为

$$\mu_0 = [(\mu_{01}, \mu_{02}, \dots, \mu_{0v})' | \mu_{0i} = \frac{LSL_i + USL_i}{2}, 1 \leq i \leq v],$$

目标值为

$$m_0 = (m_{01}, m_{02}, \dots, m_{0v})'.$$

当规格中心 μ_0 与 m_0 目标值重合时,有 $\mu_{0i} = m_{0i} (i = 1, 2, \dots, v)$, 为了描述方便,以下假设 $\mu_0 = m_0$ 。

通过对多元过程的规格区域 D 内概率密度函数的积分,可以得到合格率^[11]为

$$p = \int \cdots \int f(x) dx = \int_{LSL_1}^{USL_1} \cdots \int_{LSL_v}^{USL_v} f(x_1, \dots, x_v) dx_1 \cdots dx_v, \quad (6)$$

则不合格品率为: $q = 1 - p$ 。

假设 α (通常取 $\alpha = 0.27\%$) 为允许的多元过程不合格品率的期望值,如果

$$p = \{X \in \bigcap_{i=1}^v (LSL_i, USL_i) \geq 1 - \alpha\},$$

则可认为该多元过程有能力。

将规格区域进行等价变换后,得到

$$D = \bigcap_{i=1}^v [LSL_i, USL_i] = \{X | \max_{1 \leq i \leq v} \left(\frac{2|x_i - \mu_{0i}|}{USL_i + LSL_i} \right) \leq r\}. \quad (7)$$

对于多元过程,给定 $\alpha > 0$, 若存在 $r > 0$, 使得

$$p = \{X \in \bigcap_{i=1}^v (LSL_i, USL_i) \geq 1 - \alpha\},$$

则多元过程能力指数的计算公式为

$$MC_p = \frac{r_0}{r}. \quad (8)$$

当 $MC_p = 1$ 时,此多元过程的不合格品率恰好为 α 。

公式(8)定义的多元过程能力指数 MC_p 虽然形式简单,但涉及多维积分的计算,应用上并不是十分方便;实际中,通常采用蒙特卡罗模拟算法^[12]。

3.2 基于单元过程能力指数概念的推广 (Generalizations based on the conception of single PCIs)

基于单元过程能力指数来定义和计算多元过程能力指数最容易被理解和接受。

其中,基于体积比计算多元过程能力指数的思路起源较早^[6,13,14],具体形式为

$$MC_p = \frac{V_{R_1}}{V_{R_2}} = \frac{V_s}{V[(X - \mu_0)^T \Sigma^{-1} (X - \mu_0) \leq K_{0.9973}(n)]}. \quad (9)$$

其中: V 代表体积, R_1 为修正的规格区域, R_2 为 99.73% 比例的过程区域, V_s 为规格区域体积, $K_{0.9973}(v)$ 表示自由度为 v 的卡方分布的 0.9973 分位数, Σ 为协方差阵。

Wang 和 Chen 将单元质量特性能力指数的几何平均均作为多元质量特性过程能力指数的度量^[15,16]:

$$MC_p = \left[\prod_{i=1}^v C_{pi;pc_i} \right]^{1/v}, \quad (10)$$

其中 C_{pi} 为第 i 个变量的过程能力指数。

需要注意的是:只有当实际过程的分布区域与规格区域的形状相似时,二者才具有可比性,因此需要将这两个区域进行修正,具体的修正方式如下。

3.2.1 修正规格区域的多元过程能力指数 (MPCIs of adjusting specification areas)

修正规格区域即把规格区域修正为与过程区域形状相似的椭圆或(超)椭圆。

1) 规格区域为长方体时的多元过程能力指数。

以 2 维为例,如果多元分布的规格区域为一长方形,则修正后的规格区域为内切于该长方形的椭圆,即该椭圆为“修正的规格区域”,其体积(面积)用 V_{MS} 表示。假设多元过程 $X = (x_1, x_2, \dots, x_v)$ 为 v 维随机变量,且其规格中心 μ_0 与目标值 m_0 重合,则定义基于修正规格区域的多元过程能力指数如下:

$$MC_v = \frac{V_{MS}}{V_V(1 - \alpha)}. \quad (11)$$

其中: “修正的规格区域”的体积为 V_{MS} , $V_V(1 - \alpha)$ 表示多元过程在置信度为 $1 - \alpha$ (通常取 $\alpha = 0.27\%$)下的实际分布过程区域的体积。

当规格中心 μ_0 与目标值 m_0 不重合时:

$$MC_{pm} = \frac{MC_p}{D}, \quad (12)$$

其中: $D \geq 1$, D 为修正系数, 规格中心 μ_0 与目标值 m_0 偏离程度越大, D 越大。

2) 规格区域为椭球体时的多元过程能力指数。

当各个质量特性之间存在不同程度的相关性时, 多元过程的规格区域为椭球体。

首先从最简单的情况入手, 假设多元过程服从 v 维正态分布 $N_v(\mu, \Sigma)$, 当规格区域与过程区域的形状相同、方向一致、中心重合时, 多元过程能力指数^[17]定义为

$$MC_p = \frac{V_T}{V_B}. \quad (13)$$

其中: V_T 为允许的规格椭球体的体积, V_B 为实际过程分布的椭球体的体积。

在实践中, 与规格区域是长方体的多元过程能力指数的定义不同^[18], 产品质量特性的多元性导致了多元分布的规格区域与过程区域形状、方向、位置等方面的差异。当两个椭球体的形状、方向和位置不一致时, 需对上述定义加以修正, 即在定义基于椭球体规格的多元过程能力指数时^[12,19], 引用了3个调整参数: k_1 (形状参数), k_2 (方向参数), k_3 (位置参数), 相应的多元过程能力指数的计算公式如下表1所示。

基于椭球体规格的多元过程能力指数考虑的因素最多、最全面, 对过程样本信息利用的最全面, 值得推广; 但由于其自身的缺陷, 还有待进一步改进和优化^[19]。

表 1 规格为椭球体的多元过程能力指数

Table 1 MPCIs of specification with ellipse sphere

情形	计算公式
中心重合、方向一致、形状相同	C_p
中心重合, 方向一致	$C_{pk1} = k_1 C_p$
中心重合, 形状相同	$C_{pk2} = k_2 C_p$
方向一致, 形状相同	$C_{pk3} = (1 - k_3) C_p$
中心重合	$C_{pk12} = k_1 k_2 C_p$
方向一致	$C_{pk13} = k_1 (1 - k_3) C_p$
形状相同	$C_{pk23} = k_2 (1 - k_3) C_p$
一般情形	$C_{pk123} = k_1 k_2 (1 - k_3) C_p$

3.2.2 修正过程区域的多元过程能力指数(MPCIs of adjusting process areas)

修正过程区域即把过程区域修正为与规格区域形状相似的长方体。

文献中多把此种方法称为“基于向量表示的多元过程能力指数”, 为了不失一般性和相似性, 在理解了“基于向量表示的多元过程能力指数”模型原理的基础上, 本文大胆提出“修正过程区域的多元过程能力指数”称谓, 相信此定义更易理解其模型的含义和前提条件。

与引进调整参数不同, Mason等人引进了多个向量来共同表征两个区域的异同^[20]。

修正过程区域后, 基于向量表示的多元过程能力指数为

$$\bar{V}_{cp} = [C_{pm}, PV, LI].$$

为与单元过程能力指数中田口指数相区别, 本文将向量中 C_{pm} 改写为 MC_{pm} , 则

$$\bar{V}_{cp} = [MC_{pm}, PV, LI]. \quad (14)$$

其中: $MC_{pm} = (\frac{V_T}{V_{MP}})^{1/v}$, V_{MP} 为“修正的过程区域”的体积, 规格区域的体积用 V_T 表示; MC_{pm} 类似于单变量 C_p 指数的长度比值, 分子是由技术规格区域决定的面积(2维)或体积(3维或多维), 分母是与技术规格区域具有相似形状的规定为最小区域的“修正的过程区域”的面积或体积。

同样假设多元过程 $X = (x_1, x_2, \dots, x_v)$ 为 v 维随机变量, 服从 v 维正态分布 $N_v(\mu, \Sigma)$, 且规格区域为长方体为 $\bigcap_{i=1}^v [LSL_i, USL_i]$; 其“修正的过程区域”的长方体为 $\bigcap_{i=1}^v [LPL_i, UPL_i]$, 界限 UPL 和 LPL 是根据椭圆(椭球)概率曲线在各个轴上的投影得出的。则

$$MC_{pm} = \frac{\prod_{i=1}^v (USL_i - LSL_i)}{\prod_{i=1}^v (UPL_i - LPL_i)}. \quad (15)$$

对于向量 MC_{pm} , 如果 $MC_{pm} > 1$, 表明修正的过程区域小于技术公差区域, 过程“很好”; 当然, 修正的过程区域要受到椭圆曲线(或椭球)的形状(即方差和协方差矩阵)以及椭圆曲线(椭球)的大小(即指定的概率水平)的影响。

PV 用于描述多元过程 X 的分布中心 μ 与规格中心 μ_0 的相对位置。分布中心 μ 与规格中心 μ_0 越靠近, PV 的值越接近1; 越远离, PV 值越接近于0。

LI 用于描述多元过程的修正过程区域与规格区域的相对位置。如果修正的过程区域包含在规格区域中, 则 LI 为1, 否则为0。对于 LI 有不同的表示方法, 从本质上皆为判断修正的过程区域与规格区域的相对关系, 只是判断函数略有不同而已。

3.3 多元过程能力指数的综合评价方法(Integrated evaluation methods of MPCIs)

3.3.1 主成分分析法(因子分析法)(Principal components analysis or factorial analysis)

Kotz.S等人提出的多元工序能力指数的算法^[13]不能计算超过3维(3个质量特性)的情况;为了解决这个问题, Wang和Chen提出对单元过程能力指数的累积进行几何平均而得到多元能力指数^[15,16], 马义中和陈涛等人分别利用主成份分析和因子分析等多元统计技术对多元加工过程进行评价。

马义中教授考虑多种多元过程能力指数定义的局限性后, 提出利用主成分法定义和计算多元过程能力指数^[21]。

基于主成分分析法(principal components analysis, PCA)的多变量过程数据的能力指数可定义为

$$MC_p = \sum_{i=1}^v r_i C_{(p, pc_i)}, \quad (16)$$

$$MC_{pk} = \sum_{i=1}^v r_i C_{(pk, pc_i)}, \quad (17)$$

$$MC_{pm} = \sum_{i=1}^v r_i C_{(pm, pc_i)}. \quad (18)$$

其中: $r_i = \lambda_i / \text{tr } A$, $\text{tr } A = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_v)$, $\text{tr } A$ 为迹, λ_i 为协方差矩阵 Σ 对应的各个特征值 λ_i , $C_{(p, pc_i)}$, $C_{(pk, pc_i)}$, $C_{(pm, pc_i)}$ 分别为第 i 个主成分对应的不同单元过程能力指数。

陈涛提出了利用因子分析(factor analysis)法^[22]来计算多元工序能力指数, 并再此基础上, 推导出置信度为 $1 - \alpha$ 时其多元工序能力指数 C_p 对应的置信区间; Franklin和Wasserman推导出对应的置信度为 $1 - \alpha$ 时 C_{pk} 的置信区间^[23]; 近期, Shinde和Khadse指出基于主成分分析法的多元过程能力指数^[15]在定义规格区域时存在的问题, 对于Veervers提出的基于第一主成分分析的多元过程能力指数^[24], 由于缺失过程信息, 同样不能真实反应多元过程的能力; 基于此, Shinde和Khadse提出了基于主成分分析的经验概率分布法来计算多元过程能力指数^[25]。

利用主成分分析法(因子分析法), 根据研究对象的内在联系将变量进行综合, 用较少个数的公共因子的线性函数和特定因子之和来表达原来观测的每个变量, 可达到合理的解释存在于原始变量间的相关性及实现变量降维的目的, 并存在广泛的应用, 但仍有一些问题亟待解决: 即采用主成分分析后, 主成分变量的实际意义难以解释, 尤其是当维数较少时, 无疑将影响加大。由此可见, 如同使用任何统计工具一样, 笔者在定义、计算和解释多变量能力指数时,

一定要慎重行事^[21]。

3.3.2 差异系数法(Coefficient differences)

受Nelson和Taguchi的启发^[26], 韩玉启教授引进了差异系数法来计算多元过程能力指数。

首先介绍差异系数 CV 的概念:

$$CV = \frac{\mu}{\sigma}. \quad (19)$$

CV 表示某一质量指标单位均值的波动大小, 这是一个无量纲数据; 从表达式中可以看到, 方差往往随均值的变化而变化, 仅考虑绝对误差会忽视这一情况, 即不同的质量指标对质量波动的贡献具有差异性; 而差异系法的优点就在于该方法不仅将差异单位化, 同时还消除了量纲对差异的影响, 具体的计算各种多元过程能力指数的算法如下:

$$MC_p = \sum_{i=1}^v \lambda_i C_{(p, i)}, \quad (20)$$

$$MC_{pk} = \sum_{i=1}^v \lambda_i C_{(pk, i)}, \quad (21)$$

$$MC_{pm} = \sum_{i=1}^v \lambda_i C_{(pm, i)}, \quad (22)$$

$$\text{其中 } \lambda_i = \frac{CV_i}{\sum_{i=1}^v CV_i}.$$

韩玉启教授通过建立多元质量特性的数学模型, 进一步进行模型的贝叶斯分析: 现有的过程能力指数多是建立在经典统计理论上, 其基本假设是模型参数不具有随机性, 适合于诸如大规模流水线作业的质量过程分析, 但它不适合于小批量生产等非稳定过程的质量控制; 当生产制造环境波动相对较大时, 不同批次产品的质量指标参数之间总存在一些差异性, 参数的各种波动形成某一统计分布, 此时参数具有随机性的特征, 这与经典统计的基本观点“总体分布参数是固定的常数”是不相符的, 此时不宜用经典统计方法来研究多元质量特性的过程能力指数, 而应利用贝叶斯分析方法, 即认为分布参数可以为随机变量; 此外, 韩玉启教授构造了一类新的基于模型协方差阵后验分布的多元过程能力指数^[27,28], 采用同一实例可结果却与马义中教授的偏差较大, 而且与国外的相关研究成果^[29]相比, 这些理论也堪称先进。

3.4 基于质量损失函数的多元过程能力指数(MPCIs based on Taguchi quality loss function)

1991年基于Taguchi质量损失函数的过程能力指数的研究相继问世^[28,29], Taguchi过程能力指数包括 C_{pm} 和 C_{pmk} , 拓展到多元过程能力指数即为 MC_{pm} 和 MC_{pmk} 。

Taguchi过程能力指数反映的是过程输出满足质量损失要求,而非合格率的能力.传统的质量观(0-1质量观)认为只有质量特性值超过规格限时,质量才有损失;而田口质量损失观则认为只要质量特性值与目标值有偏移,就造成了损失.

在过程能力指数系列中, C_p 和 C_{pk} 都是基于0-1传统质量观的过程能力指数; C_{pm} 和 C_{pmk} 是基于Taguchi质量观的过程能力指数.虽然基于质量损失函数的单元过程能力指数已经被广泛研究^[30~36],但基于此的多元过程能力指数研究还有待深入.

3.5 计算或度量多元过程能力指数的其他方法(Other methods of calculating or measuring MPCIs)

常见并被广泛讨论和研究的多元过程能力指数除上述4种思路外,还有其他的研究方法.

基于Bootstrap抽样^[37,38]的多元过程能力指数,利用差异系数对单变量过程能力指数进行加权处理,得到多元过程能力指数的计算公式,然后基于Bootstrap抽样技术,对多元过程能力指数的统计分布进行仿真处理,获得了多元能力指数的经验分布及其大致的置信区间,从而为有效进行多元质量特性过程分析提供了概率依据.

基于多变异分析(multi-variable analysis, MVA)也可计算过程能力指数.多变异分析将工序质量特征值的变异分为3类:产品内变异(within piece variation或称为positional variation)、产品间变异(piece to piece variation)和时间变异(time to time variation).只有考虑了这些变异,方可计算过程能力指数.它的作用就是通过方差分析,找到主要的随机性变异来源,以此指导如何进行合理地抽样,保证样本能捕获主要的随机性变异,然后计算出科学正确的过程能力指数.但基于MVA法的研究目前只针对单元质量指标^[39,40],随着多元过程能力指数研究的进展,相信用MVA方法分析多元过程能力指数具有可行性.

此外,针对过程数据存在部分相关的情况,先将多元数据进行分组,再计算其分组后数据的几何距离,即“欧几里德距离”,使用最优拟合技术,识别其几何距离的分布,进而计算Luceno指数^[41] C_{pc} ,对各分组后的 C_{pc} 几何平均即可得到此过程的多元过程能力指数^[42] M_{pc} .

4 总结(Conclusion)

随着多元统计过程控制技术的广泛应用,各种多元过程能力指数算法应运而生.但到目前为止,多元过程能力指数还没有一种公认的、一致的度量方法.

虽然在MPCIs领域已经取得了一定的进展,但针对多元能力指数的统计推断、置信区间等方面,由

于涉及多维变量的随机分布,其统计量的概率分布形式非常复杂,甚至很难得到;同时由于多元问题的复杂性,不同算法的适用性存在较大的差异,导致计算结果的可比性较差;而且通过对各种模型和方法的综述,可以看出不同的算法假设条件不同,如3.1节中基于(不)合格品率的多元过程能力指数计算不需满足过程服从多元正态分布的假设条件,这是个很大的优势;而3.2节中基于单元过程能力指数的扩展,即基于规格区域与过程区域比值的多元过程能力指数的研究要求过程服从多元正态分布,这使得模型的使用范围受限;数据间的相关性,单边与双边规格区域的混合也增加了多元过程能力指数计算的困难度^[42];有些指数难以进行统计解释,而有些难以具有清晰的统计意义,有些可以与(不)合格品率建立联系并为实践提供便利和参考,有些则不能^[32,43];不同的算法也导致了完全不同的计算结果,部分算法还存在着理论上的缺陷,需要进一步进行完善^[12,44~46].

此外,如果过程不服从多元正态分布,笔者还需对非正态分布进行转换、曲线族拟和、或使用当量化法、分位数法等方法把非正态分布转化为正态分布或近似正态分布,但随之而来的问题也不少,如何有效合理的进行进一步的计算目前也已成为研究热点^[21,47~51].从事多元过程能力指数的研究人员任重而道远.

参考文献(References):

- [1] JURAN E D. *Juran's Quality Control Handbook*[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1974.
- [2] PAUL J P. Reliability: a review of psychometric basic and recent marketing practices[J]. *Journal of Marketing Research*, 1979, 16: 6 - 17.
- [3] KOTZ S, LOVELACE C. *Process Capability Indices in Theory and Practice*[M]. London: Arnold, 1998.
- [4] KANE V E. Process capability indices[J]. *Journal of Quality Technology*, 1986, 18: 41 - 52.
- [5] CHAN L K, CHENG S W, SPIRING F A. A new measure of process capability: C_{pm} [J]. *Journal of Quality Technology*, 1988, 20: 162 - 175.
- [6] PEARN W L, KOTZ S, JOHNSON N L. Distributional and inferential process capability indices[J]. *Journal of Quality Technology*, 1992, 24(4): 216 - 231.
- [7] VANNMAN K. A unified approach to capability indices[J]. *Statistical Sinica*, 1995, 5: 805 - 820.
- [8] 孙静, 张公绪. 两种 C_p 的诊断理论[J]. 中国质量, 2000, 4: 22 - 28. (SUN Jing, ZHANG Gongxu. Diagnosing for two kinds of C_p [J]. *China Quality*, 2000, 4: 22 - 28.)
- [9] 孙静. 两种控制图的诊断与两种过程能力指数的诊断[J]. 质量与可靠性, 2003, 3: 42 - 48. (SUN Jing. Diagnosing for two kinds of control chart and two kinds of process capability indices[J]. *Quality and Reliability*, 2003, 3: 42 - 48.)
- [10] 汤淑明, 王飞跃. 过程能力指数综述[J]. 应用数理统计, 2004, 20(2): 207 - 216.

- (TANG Shuming, WANG Feiyue. Recent development in process capability indices[J]. *Chinese Journal of Applied Probability and Statistics*, 2004, 20(2): 207 – 216.)
- [11] 马义中, 李言俊. 多元质量特性过程能力的一种评价方法[J]. 系统工程, 2002, 20(1): 77 – 81.
(MA Yizhong, LI Yanjun. An assessment method for multivariate process capability[J]. *Systems Engineering*, 2002, 20(1): 77 – 81.)
- [12] 蒋家东, 冯允成, 商广娟. 多元过程能力指数方法的比较研究[J]. 航空标准化与质量, 2006, 3: 16 – 20.
(JIANG Jiadong, FENG Yuncheng, SHANG Guangjuan. Comparison study on four multivariate process capability indices[J]. *Aeronautic Standardization & Quality*, 2006, 3: 16 – 20.)
- [13] KOTZ S, JOHNSON N L. *Process Capability Indices*[M]. London: Chapman & Hall, 1993.
- [14] TAAM W, SUBBAIAH P, LIDDY J W. A note on multivariate capability indices[J]. *Journal of Applied Statistics*, 1993, 20(3): 339 – 351.
- [15] WANG F K, CHEN J C. Capability index using principal components analysis[J]. *Quality Engineering*, 1998, 11(1): 21 – 27.
- [16] WANG F K, DU T C T. Using principal component analysis in process performance for multivariate data[J]. *Omega*, 2000, 28(2): 185 – 194.
- [17] FOSTER E J, BARTON R R, GAUTAM N, et al. The process-oriented multivariate capability index[J]. *Internal Journal of Production Research*, 2005, 43(5): 2135 – 2148.
- [18] CHEN H. A multivariate process capability index over a rectangular solid tolerance zone[J]. *Statistical Sinica*, 1994, 4(2): 749 – 758.
- [19] 吴海英. 生产过程评价指标的统计分析[D]. 郑州: 郑州大学, 2005.
(WU Haiying. *Statistical analysis for evaluating indices of product process*[D]. Zhengzhou: Zhengzhou University, 2005.)
- [20] MASON R L, TRACY N D, YOUNG J C. Decomposition of T^2 for multivariate control chart interpretation[J]. *Quality Technology*, 1995, 27(2): 99 – 108.
- [21] 马义中. 多元质量特性的过程能力指数[J]. 工业工程, 2001, 4(4): 22 – 24.
(MA Yizhong. Process capability index for multivariate quality characteristics[J]. *Industrial Engineering Journal*, 2001, 4(4): 22 – 24.)
- [22] 陈涛. 基于因子分析的多元工序能力指数[J]. 机床与液压, 2003, 31(1): 284 – 286.
(CHEN Tao. Multivariate process capability index based on factor analysis[J]. *Machine Tool & Hydraulics*, 2003, 1: 284 – 286.)
- [23] FRANKLIN L A, WASSERMAN G S. A note on the conservative nature of the tables of lower confidence limits for with a suggested correction[J]. *Communication in Statistics: Simulation and Computation*, 1992, 21(4): 1165 – 1169.
- [24] VEEVERS A. Capability indices for multiresponse processes//PARK S H, VINING G G. *Statistical Process Monitoring and Optimization*[M]. New York: Marcel Dekker, 1999: 241 – 256.
- [25] SHINDE R A, KHADSE K G. Multivariate process capability using principal component analysis[J]. *Quality And Reliability Engineering International*, 2009, 25: 69 – 77.
- [26] NELSON L S. Some notes on variation[J]. *Journal of Quality Technology*, 1999, 31(4): 459 – 462.
- [27] 朱慧明, 韩玉启, 吴正刚. 基于随机参数的贝叶斯过程能力指数评价模型[J]. 湖南大学学报, 2004, 31(6): 105 – 109.
(ZHU Huiming, HAN Yuqi, WU Zhenggang. Bayesian evaluation model of process capability indices based on the random parameters[J]. *Journal of Hunan University (Natural Science)*, 2004, 31(6): 105 – 109.)
- [28] 朱慧明, 韩玉启. 多元质量特性的贝叶斯过程能力指数[J]. 哈尔滨工业大学学报, 2005, 37(4): 498 – 500.
(ZHU Huiming, HAN Yuqi. Bayesian process capability index for multivariate quality characteristics[J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2005, 37(4): 498 – 500.)
- [29] SHIAU J H, CHIANGH C T, HUNG H N. A Bayesian procedure for process capability assessment[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 1999, 15(4): 369 – 378.
- [30] BOYLES R A. The Taguchi capability index[J]. *Journal of Quality Technology*, 1991, 23(1): 17 – 26.
- [31] SPRING F. An alternative to Taguchi's loss function[C] //ASQC. *Quality Congress Transactions*. Milwaukee Wisconsin: ASQC Quality Press, 1991: 660 – 665.
- [32] 魏世振, 韩玉启. 过程能力指数在质量损失研究中的应用[J]. 管理工程学报, 2002, 4(16): 64 – 66.
(WEI Shizhen, HAN Yuqi. The application of process capability index to quality loss[J]. *Journal of Industrial Engineering and Engineering Management*, 2002, 4(16): 64 – 66.)
- [33] 白宝光, 张世英. 基于经济性设计的过程能力指数优化[J]. 内蒙古工业大学学报, 2003, 22(3): 237 – 240.
(BAI Baoguang, ZHANG Shiyong. An approach to optimization of process capability based on economic analysis[J]. *Journal of Inner Mongolia Polytechnic University*, 2003, 22(3): 237 – 240.)
- [34] 赵丽萍, 王明东. 经济性多元质量控制诊断模型的研究与应用[J]. 设计与研究, 2005, 1: 1 – 3.
(ZHAO Liping, WANG Mingdong. Study on the economical multivariate quality control and diagnosis model[J]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2005, 1: 1 – 3.)
- [35] 杨剑锋, 徐济超, 贺金凤, 等. 基于不同质量损失函数的过程能力指数比较[J]. 工业工程与管理, 2006, 3: 37 – 45.
(YANG Jianfeng, XU Jichao, HE Jinfeng, et al. The comparison of some process capability indices based on different quality loss functions[J]. *Industrial Engineering and Management*, 2006, 3: 37 – 45.)
- [36] 常广蔗, 杨剑锋. 几种典型过程能力指数的比较[J]. 制造技术与机床, 2006, 10: 92 – 96.
(CHANG Guangshu, YANG Jianfeng. The comparison of some typical process capability index[J]. *Manufacturing Technology & Machine Tool*, 2006, 10: 92 – 96.)
- [37] EFRON B, TIBSHIRANI R J. Bootstrap methods for standard errors, confidence intervals and other measures of statistical accuracy[J]. *Statistical Science*, 1986, 11: 54 – 77.
- [38] 田志友, 田澎, 王浣尘. 基于Bootstrap抽样的多元过程能力指数估计[J]. 管理工程学报, 2006, 2(2): 74 – 77.
(TIAN Zhiyou, TIAN Peng, WANG Huanchen. Estimation on the multivariate process capability indices based on bootstrap sampling[J]. *Mechanical Science and Technology*, 2006, 2(2): 74 – 77.)
- [39] 何祯, 李国春, 石金桥. 工序质量分析与控制中的多变异分析方法[J]. 系统工程理论与实践, 2000, 20(5): 42 – 46.
(HE Zhen, LI Guochun, SHI Jinqiao. Multi-vari analysis in process quality analysis and control[J]. *Systems Engineering-Theory & Practice*, 2000, 20(5): 42 – 46.)
- [40] 孔祥芬, 何祯, 宗志宇. 基于多变异分析方法检验常用的过程能力指数[J]. 设计与研究, 2006, (4): 15 – 19.
(KONG Xiangfen, HE Zhen, ZONG Zhiyu. Testing process capability using the general indices based multi-vari analysis[J]. *Modular Machine Tool & Automatic Manufacturing Technique*, 2006, (4): 15 – 19.)
- [41] LUCENO A. A process capability index with reliable confidence intervals[J]. *Communication in Statistics: Simulation and Computation*, 1996, 25: 235 – 245.

- [42] WANG F K. Quality evaluation of a manufactured product with multiple characteristics[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 2006, 22: 225 – 236.
- [43] SHINDE R A, KHADSE K G. A review and comparison of some multivariate process capability indices based on fraction conforming interpretation[J]. *Statistical Methods*, 2005, 7: 95 – 115.
- [44] 蒋家东, 冯允成, 商广娟. 多元过程能力指数方法的比较研究续前[J]. 航空标准化与质量, 2006, 4: 14 – 17.
(JIANG Jiadong, FENG Yuncheng, SHANG Guangjuan. Comparison study on four multivariate process capability indices[J]. *Aeronautic Standardization & Quality*, 2006, 4: 14 – 17.)
- [45] MISKULIN J D, WANG F K, HUBELE K N, et al. Comparison of three multivariate process capability indices[J]. *Journal of Quality Technology*, 2000, 32(3): 263 – 275.
- [46] ANDERSON T W. *An Introduction to Multivariate Statistics Analysis*[M]. New York: John Wiley & Sons, 2003: 245 – 258.
- [47] PEARN W L, CHEN K S. Estimating process capability indices for non-normal Pearsonian populations[J]. *Quality and Reliability Engineering International*, 1995, 11(5): 386 – 388.
- [48] SERGIO B, MARCO L, LUCA M. Application of non-normal process capability indices to semiconductor quality control[J]. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 1998, 11(2): 296 – 303.
- [49] 郑小林, 郑希俊, 余忠华. 基于约翰逊曲线拟合的非正态工序能力指数估算方法[J]. 机械科学与技术, 2002, 21(6): 878 – 880.
(ZHENG Xiaolin, ZHENG Xijun, YU Zhonghua. Estimation of non-normal process capability indices using Johnson curve-fitting[J]. *Mechanical Science and Technology*, 2002, 21(6): 878 – 880.)
- [50] 周群艳, 田澎, 田志友. 基于Johnson转换体系的非正态过程能力指数估计[J]. 系统工程, 2004, 22(5): 98 – 102.
(ZHOU Qunyan, TIAN Peng, TIAN Zhiyou. Estimation of non-normal process capability index based on Johnson system of transformations[J]. *Systems Engineering*, 2004, 22(5): 98 – 102.)
- [51] 田志友, 田澎, 王浣尘. 非正态过程能力指数估计及抽样方案设计[J]. 工业工程, 2005, 8(6): 86 – 89.
(TIAN Zhiyou, TIAN Peng, WANG Huanchen. Estimation of process capability index and sampling design with non-normal distributions[J]. *Industrial Engineering Journal*, 2005, 8(6): 86 – 89.)

作者简介:

王立岩 (1980—), 女, 博士研究生, 主要从事质量工程、质量管理、过程能力指数的研究, E-mail: wly-066@163.com;

唐加福 (1965—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 主要从事生产与物流运作管理、质量系统工程等方面的研究, E-mail: jftang@mail.neu.edu.cn;

宫俊 (1972—), 男, 在东北大学作博士后研究工作, 研究方向为不完备信息系统、智能优化方法、质量管理, E-mail: gongjun@ise.neu.edu.cn.

下 期 要 目

- 一种推广的组合非线性输出反馈控制 彭文东, 苏剑波
- 非线性动态系统的Wiener神经网络辨识法 吴德会
- 任务函数模型下机器人视觉伺服特性问题研究 张国亮, 谢宗武, 王捷, 刘宏
- 扩展2维环境中的移动机器人多人目标跟踪 庄严, 王健, 王伟
- 超空泡航行器稳定性分析及其非线性切换控制 范辉, 张宇文
- 3级网状随机性库存控制策略的仿真优化 高镜媚, 汪定伟
- 有限时间死区修正迭代学习控制器的设计 谢华英, 孙明轩
- 一种基于人工力矩的动态队形控制方法 徐望宝, 陈雪波
- 未知不确定非线性系统的直接自校正滑模控制 张细政, 王耀南
- 航天器近距离相对运动的鲁棒约束模型预测控制 朱彦伟, 杨乐平
- 自校正信息融合Wiener预报器及其收敛性 邓自立, 王伟玲, 王强
- 基于时间最优的快速平息区间扰动的紧急直流功率控制策略
..... 谢惠藩, 张尧, 林凌雪, 钟庆, 夏成军