文章编号: 1000−xxxx(xxxx)xx−0000−00

一个三维非线性系统的混沌运动及其控制

袁 地

(安阳师范学院 物理学系, 河南 安阳 455000)

摘要: 通过数值计算、理论推导分析了一个三维类Lorenz混沌系统的基本动力学特性，并通过数值仿真、相图、Poincare截面图和功率谱研究了这个系统的混沌行为。然后，构建一个受控系统并利用Lyapunov指数谱、分叉图分析了该系统混沌吸引子的形成机制，通过对控制参数的改变，系统的混沌运动可以得到有效控制。

关键词: 类Lorenz系统; 混沌; 控制参数; 形成机制

中图分类号: TP273 O415 **文献标识码**: A

Chaotic movement and its control of a three-dimensional nonlinear system

YUAN Di

(Department of Physics, Anyang normal university, Anyang Henan 455000, China)

Abstract: Some basic dynamical properties of a three-dimensional Lorenz-like chaotic system are analyzed by means of numerical value calculating and theoretical deducing, the chaotic behaviors of the chaotic system is studied via numerical simulation, phase diagram, Poincare mapping and power spectrum. A controller of the Lorenz-like system is constructed further, the forming mechanism of the chaotic attractor is studied by Lyapunov exponent and bifurcation diagram, the chaotic movement of the Lorenz-like system can be controlled well by changing controls parameter.

Key words: Lorenz-like System; Chaos; controls parameter; forming mechanism

1 引言(Introduction)

自1963年Lorenz[1]在一个三维自治系统中首次发现混沌吸引子以来，混沌理论得到了迅速发展，人们不断发现新的混沌系统[2∼8]，研究其分叉、混沌现象、混沌吸引子结构和混沌产生的条件等。

1999年，在Lorenz系统的基础上，Chen和Ueta[2]利用混沌反控制的方法发现了一个新的三维混沌系统—Chen系统。不久，Lü和Chen[3]在2002年又通过混沌反控制的想法发现了Lü系统，这个三维混沌系统在Lorenz系统和Chen系统之间架起了一座桥梁。

1996年，Vanecek和Celikovsky[9]提出三维自治方程组的动力学行为是由其线性部分$A = [a_{ij}]_{3\times3}$来决定的：当$a_{12}a_{21} > 0$时，其动力学行为类似于Lorenz系统（称广义Lorenz系统族）；当$a_{12}a_{21} < 0$时，其动力学行为类似于Chen系统；而Lü系统的动力学行为则满足$a_{12}a_{21} = 0$。

在上述研究的基础上，本文对一个三维类Lorenz混沌系统，利用非线性动力学的方法，通过数值计算、理论推导分析了这个系统的基本动力学特性，并通过数值仿真、相图、Poincare截面图和功率谱研究了这个系统的混沌运动。然后，构建一个受控系统并利用Lyapunov指数谱[10∼16]、分叉图[17∼19]分析了该系统混沌吸引子的形成机制，结果表明，通过对控制参数e的改变，该系统的混沌运动可以得到有效控制，系统的混沌吸引子可由两个卷形状演化为一个卷形状，并最终通过倍周期分叉的过程演化为周期运动的形状。

2 三维非线性系统模型及基本动力学特性(Model and basic dynamical properties of the three-dimensional nonlinear system)

2.1 三维类Lorenz混沌系统模型及其典型的混沌吸引子(Model and typical chaotic attractors of the Lorenz-like chaotic system)

著名的Lorenz[1]系统为:

收稿日期: 2008−04−30; 收修改稿日期: 2008−xx−xx.

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x), \\ \dot{y} = cx - y - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{1}$$

当参数$a = 10, b = 8\backslash 3, c = 28$，该系统呈现混沌状态。

三维类Lorenz混沌系统的动力学方程为：

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x), \\ \dot{y} = c(x+y) - xz, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \tag{2}$$

为方便起见，可以将方程(2)写成向量的形式

$$\frac{dX}{dt} = f(X) \tag{3}$$

式中$X = (x, y, z) \in R^3$，f(X)是(2)式右端矢量场的向量形式，a, b, c为实常数。当$a = 25, b = 1.8, c = 18$时系统(2)存在一个混沌吸引子，如图1所示。

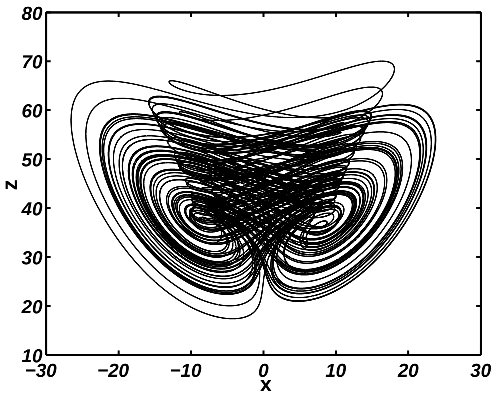


图 1 当参数$a = 25, b = 1.8, c = 18$时系统(2)的典型混沌吸引子, x-z平面相图

Fig. 1 typical chaotic attractor of the system(2) with $a = 25, b = 1.8, c = 18$, x-z plane phase portrait

2.2 基本动力学特性(Basic dynamical properties of the system(2))

2.2.1 系统的对称性(Symmetry of the system(2))

系统(2)具有自然的对称性，即做变换

$$(x, y, z) \longrightarrow (-x, -y, z) \tag{4}$$

后，系统保持不变。变换(4)式可表示为

$$P : R^3 \to R^3, X| \to PXP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

它满足$f(PX) = Pf(X)$,即系统关于z轴对称，且这种对称性对所有参数均成立。例如，由图1可以看出，当$a = 25, b = 1.8, c = 18$时，系统在xz平面的相图关于原点对称。

2.2.2 系统的稳定性(Stability of the system(2))

采用Lyapunov方法判断该系统的稳定性。为求得系统的稳定性，令系统(2)的右端为零，即

$$\begin{cases} a(y-x) = 0, \\ c(x+y) - xz = 0, \\ xy - bz = 0, \end{cases} \tag{6}$$

则系统具有如下三个平衡点：

$$O(0,0,0), P^+(x_0, y_0, z_0), P^-(x_1, y_1, z_1)$$

显然，式（6）是一个非线性的代数方程，对其进行求解可得

$$O(0,0,0), P^+(8.0498, 8.0498, 36),$$

$$P^-(-8.0498, -8.0498, 36)$$

对于平衡点$O(0,0,0)$，把系统(2)进行线性化，则其对应的Jacobian矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-z & c & -x \\ y & x & -b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 & 25 & 0 \\ 18 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -1.8 \end{bmatrix}$$

为了求得其特征值，令$|\lambda I - J_0| = 0$求解此方程可以得到与平衡点$O(0,0,0)$对应的三个特征值为

$$\lambda_1 = -1.8, \lambda_2 = -453.5136, \lambda_3 = 446.5136$$

这里，λ_1和λ_2为负实数，λ_3为正实数，则平衡点$O(0,0,0)$是一个不稳定的鞍点。

接下来对系统(2)进行线性化，分析在平衡点P^+和P^-的情况。对于平衡点P^+，其对应的Jacobian矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -25 & 25 & 0 \\ -18 & 18 & -8.0498 \\ 8.0498 & 8.0498 & -1.8 \end{bmatrix}$$

令$|\lambda I - J_+| = 0$求解此方程可以得到与平衡点P^+对应的三个特征值为

$$\lambda_1 = -1.6802, \lambda_2 = -34.8143, \lambda_3 = 27.6945.5136$$

与零平衡点相同，此时λ_1和λ_2为负实数，λ_3为正实数，则衡点P^+也是一个不稳定的鞍点。

类似，可以得到平衡点P^-所对应的Jacobian矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -25 & 25 & 0 \\ -18 & 18 & 8.0498 \\ -8.0498 & -8.0498 & -1.8 \end{bmatrix}$$

令$|\lambda I - J_-| = 0$求解此方程可以得到与平衡

点P^-对应的三个特征值为

$$\lambda_1 = -1.6802, \lambda_2 = -34.8143, \lambda_3 = 27.6945.5136$$

与平衡点P^+相同，此时λ_1和λ_2为负实数，λ_3为正实数，因此，平衡点P^-也是一个不稳定的鞍点。

从前面的分析可以发现，系统(2)的三个平衡点均为不稳定的鞍点。

2.2.3 系统的耗散性(Dissipation of the system(2))

对于系统(2)，由于散度

$$\Delta V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a - b + c = p \quad (7)$$

若按前面的参数取值，即$a = 25, b = 1.8, c = 18$，p将为负值，此时，系统(2)描述的是一个耗散系统，并以指数形式

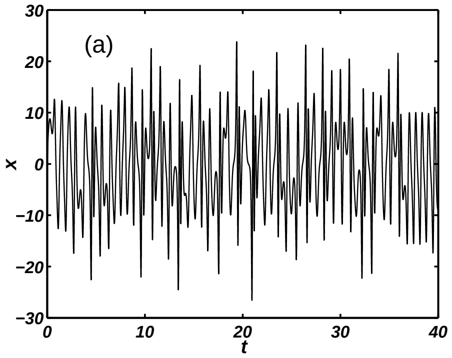
$$\frac{dV}{dt} = e^p = e^{-8.8} \quad (8)$$

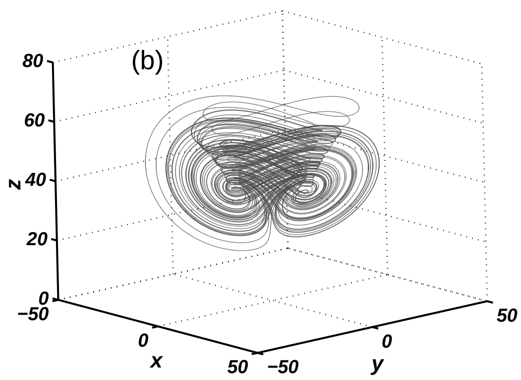
收敛。也就是一个初始体积为V_0的体积元在时刻t时收缩为体积元$V_0 e^{pt} = V_0 e^{-8.8t}$。这意味着，当$t \to \infty$时，包含系统轨线的每个小体积元以指数速率$p$收缩到零，所以系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上，其渐近运动将被固定在一个吸引子上，这说明系统(2)确实存在吸引子。

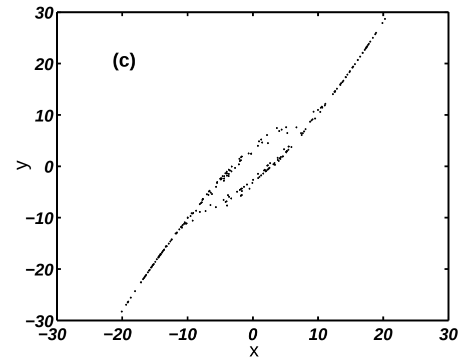
3 系统的混沌运动及其控制(Chaotic movement and its control of the Lorenz-like chaotic system)

3.1 典型的混沌运动状态(Typical chaotic movement state)

本文采用四阶Runge-Kutta方法数值模拟求解，使用四阶Runge-Kutta方法时，需要先给出初值和步长，系统的初值选取为（2.2，2.4，28）,步长选取为0.0001，通过数值模拟，系统显示出具有丰富的混沌动力学行为，在图1中已给出了系统(2)的混沌吸引子。







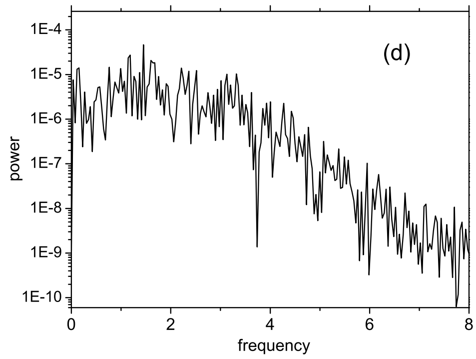


图 2　当参数$a = 25, b = 1.8, c = 18$时系统(2)的(a)时序图、(b)相图、(c)Poincare截面图和(d)功率谱图

Fig. 2　Time-series diagram(a), phase portrait(b), Poincare mapping(c) and power spectrum(d) of the system(2) with parameters $a = 25, b = 1.8, c = 18$

在上面图2中又分别给出了当参数$a = 25, b = 1.8, c = 18$时系统(2)的时序图(a)、相图(b)、Poincare截面图(c)和功率谱图(d)。Poincare截面有利于观察系统的动力学行为，通过观察Poincare截面上截点的情况，可以判断在这组参数下系统的运动是稳定的、周期的还是混沌的，谱分析是研究振动和混沌的一个重要手段，通过谱分析可以直观的看出系统是如何从倍周期走向混沌的。从图2中的时序图(a)中可以看出，其变量x随时间变化的波形已没有了规律性，由相

图(b)知道，其轨线已形成了奇怪吸引子，其截面图(c)上的点不再是少数离散的，而是由一些密集点连成的弧线，在功率谱图(d)上表现的是连续谱，而不是分离谱，由这些方法所刻画的特性可知，系统(2)此时是处于混沌状态的。

3.2 受控系统与混沌吸引子的形成机制(controller of the Lorenz-like system and forming mechanism of the chaotic attractor)

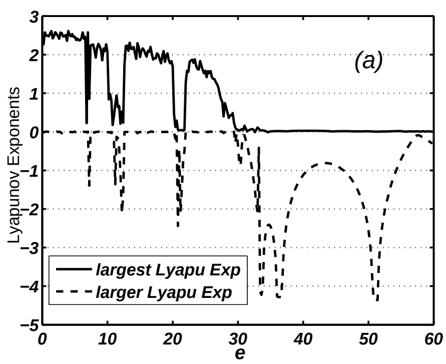
为了揭示系统(2)所描述的混沌吸引子结构的形成机制，本文给出了系统(2)的一种受控系统，这一受控系统具有如下的微分方程组形式

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y-x)+e, \\ \dot{y} = c(x+y)-xz, \\ \dot{z} = xy-bz, \end{cases} \tag{9}$$

在这一受控系统中，e为控制参数，它的取值可以在一定范围内进行改变，随着控制参数e的变化，系统(2)得混沌行为可以得到有效的控制。数值计算中，初始条件和其它参数的取值与前面保持一致，首先考虑控制参数e由零逐渐增大的过程。

3.2.1 固定参数$a = 25, b = 1.8, c = 18$，改变控制参数$e, e \in [0,60]$(Fixing the parameters$a = 25, b = 1.8, c = 18$ and varying controls parameter$e, e \in [0,60]$)

当控制参数e在$[0,60]$变化时，系统(2)的Lyapunov指数谱、分叉图如图3所示，我们知道，从Lyapunov指数谱、分叉图可以比较直观地反映非线性动力学系统随参数变化的动态特性，当有一个Lyapunov指数大于零的时候，系统处于混沌状态。由图3(a)可见，随着参数e的变化，系统的最大Lyapunov指数（实线为最大Lyapunov指数，点线为第二大Lyapunov指数）是从大于零变化到等于零，也就是说系统先是出现混沌解，然后变化为周期解，从分叉图(图3(b))可以清楚地看出，系统是从混沌通过倍周期分叉走向周期运动的。



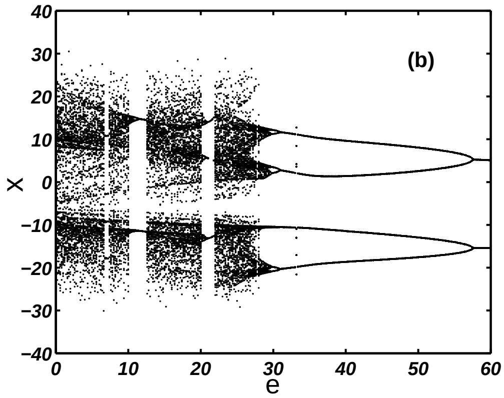


图 3 当参数$a = 25, b = 1.8, c = 18$,改变控制参数e时, 系统(2)的(a)Lyapunov指数谱，(b)分叉图

Fig. 3 Lyapunov exponent spectrum(a) and bifurcation diagram(b) of the system(2) with parameters $a = 25, b = 1.8, c = 18$ and varying controls parameter e

在控制参数e由零逐渐增大的过程中，当$e = 26$时，系统(2)对应的相图如图4所示，左右两边的卷形具有明显的不对称性，当$e = 28$时，系统(2)对应的相图如图5所示，此时，吸引子经过演化变为仅有单边的卷形，继续增大控制参数e至$e = 30$，系统(2)混沌吸引子将演化出倍周期分叉的过程，图6显示了系统(2)的周期2运动。

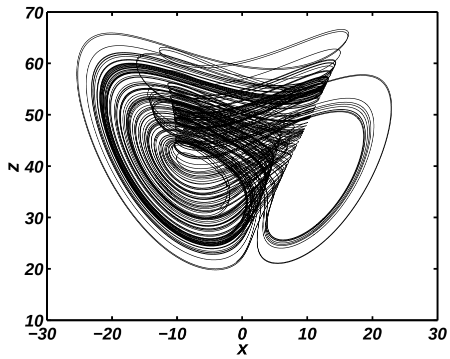


图 4 当参数$a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 26$时,系统(2)的x-z平面相图

Fig. 4 x-z plane phase portrait of the system(2) with parameters $a = 25, b = 1.8, c = 18, e = 26$

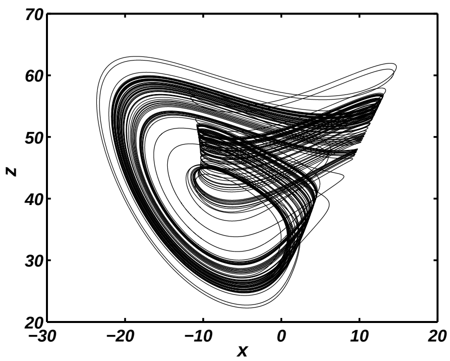


图 5 当参数$a=25,b=1.8,c=18,e=28$时,系统(2)的x-z平面相图

Fig. 5 x-z plane phase portrait of the system(2) with parameters $a=25,b=1.8,c=18,e=28$

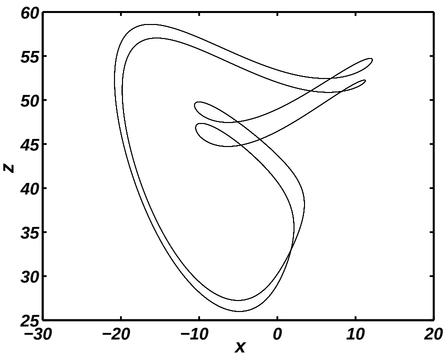
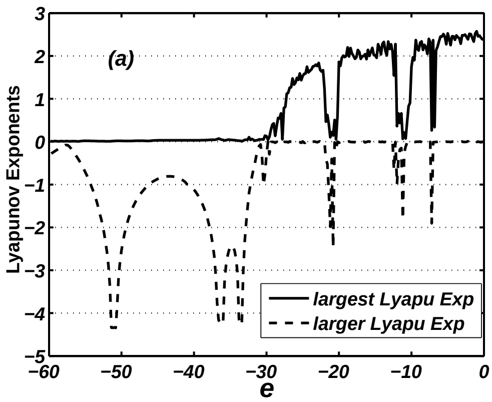


图 6 当参数$a=25,b=1.8,c=18,e=30$时,系统(2)的2周期x-z平面相图

Fig. 6 x-z plane phase portrait of period 2 of the system(2) with parameters $a=25,b=1.8,c=18,e=30$

3.2.2 固定参数$a=25,b=1.8,c=18$，改变控制参数$e,e\in[-60,0]$(Fixing the parameters$a=25,b=1.8,c=18$ and varying controls parameter$e,e\in[-60,0]$)

类似的，研究控制参数e为负值的情况，数值模拟表明，在控制参数e由零逐渐减小的过程中，系统(2)的演化规律与e由零逐渐增大的过程是相似的。当e在$[-60,0]$的变化过程中，系统(2)的Lyapunov指数谱、分叉图如图7所示，由图7(a)可见，随着控制参数e的变化，系统的最大Lyapunov指数（实线为最大Lyapunov指数，点线为第二大Lyapunov指数）是从等于零变化到大于零，这就是说系统先是出现周期解，然后变化为混沌解，从分叉图(图7(b))可以清楚地看出，系统是从周期运动通过倍周期分叉走向混沌的。



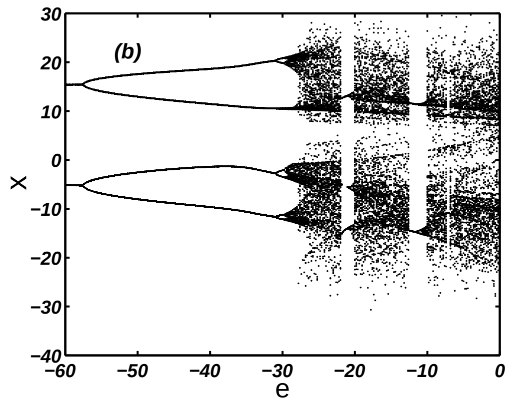


图 7 当参数$a=25,b=1.8,c=18$,改变控制参数e时, 系统(2)的(a)Lyapunov指数谱，(b)分叉图

Fig. 7 Lyapunov exponent spectrum(a) and bifurcation diagram(b) of the system(2) with parameters $a=25,b=1.8,c=18$ and varying controls parameter$e$

由上述分析可知，当控制参数$|e|$足够大时，系统(2)的混沌吸引子将消失，呈现周期运动；当控制参数$|e|$足够小时，系统(2)将出现混沌运动的行为；在控制参数$|e|$由小变大的过程中，系统(2)的混沌吸引子将由两个卷形状演化为一个卷形状，并最终通过倍周期分叉的过程演化为周期运动的形状。

4 结论(Conclusion)

本文对一个三维自治类Lorenz混沌系统，利用非线性动力学的方法，通过数值计算得到系统的定态解，并分析了定态解的稳定性，又分别从对称性、耗散性方面对系统的动力学特性加以分析。然后通过数值模拟、时序图、相图、Poincare截面图和功率谱分析了系统的混沌行为。最后，构建一个受控系统并分析了该系统混沌吸引子的形成机制，通过对控制参数e的改变，从Lyapunov指数谱、分叉图发现系统具有丰富的动力学行为，可以处于周期运动以及混沌状态，并且在控制参数$|e|$由小变大的过程中，系统的混沌运动可以得到有效控制，系统(2)的混沌吸引子将由两个卷形状演化为一个卷形状，并最终通过倍周期分叉的过程演化为周期运动的形状。

参考文献(References):

[1] Lorenz E N. Deterministic nonperodic flow[J]. *J. Atmos Sci*, 1963, 20(1): 130–141.

[2] Chen G R, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*,1999, 9(7): 1465–1466.

[3] Lü J H, Chen G R. A new chaotic attractor coined[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*,2002, 12(3): 659–661.

[4] Liu C X, Liu L, Liu T, Li P. A new butterfly-shaped attractor of Lorenz-like system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*,2006, 28(5): 1196–1203.

[5] 宋运忠, 赵光宙, 齐冬莲. 混沌吕系统的约束控制[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(5): 795-798.
(Song Y Z, Zhao G Z, Qi D L. Constrained control of chaotic lü system[J]. *Control Theory and Applications*, 2007, 24(5): 795-798.)

[6] 王杰智, 陈增强, 袁著祉. 一个新的混沌系统及其性质研究[J]. 物理学报, 2006, 55(8): 3956–3963.
(Wang J Z, Chen Z Q, Yuan Z Z. A new chaotic system and analysis of it s properties[J]. *Acta Phys. Sin.*, 2006, 55(8) 3956–3963.)

[7] 王光义, 丘水生, 许志益. 一个新的三维二次混沌系统及其电路实现[J]. 物理学报, 2006, 55(7): 3295–3301.
(Wang G Y, Qiu S S, Xu Z Y. A new three-dimensional quadratic chaotic system and it s circuitry implementation[J]. *Acta Phys. Sin.*, 2006, 55(7) 3295–3301.)

[8] 王琳, 倪樵, 刘攀, 黄玉盈. 一种新的类Lorenz系统的混沌行为与形成机制[J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(4): 1–6.
(Wang L, Ni Q, Liu P, Huang Y Y. Chaos and its forming mechanism of a new Lorenz-like system[J]. *Journal of Dynamics and Control*, 2005, 3(4):1–6.)

[9] Vanecek A, Celikovsky S. Control systems: from linear analysis to synthesis of chaos[M]. London: Prentice-Hall, 1996, 32–41.

[10] Oseledec V I. A multiplicative ergotic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems[J]. *Trans Moscow Math Soc.*, 1968, 19(1): 197–231.

[11] Eckmann J P, Ruelle D. Ergodic theory of chaos and strange attractors[J]. *Rev. Mod. Phys.*, 1985, 57(3): 617–656.

[12] Wolf A, Swift J, Swinney H, Vastano J. Determining Lyapunov exponents from a time series[J]. *Physica D*, 1985, 16(3): 285–317.

[13] Oiwa N N, Fiedler-Ferrara N. A fast algorithm for estimation Lyapunov exponents from time series[J]. *Physics Letters A*, 1998, 246(1): 117–121.

[14] Blazejczyk-Okolewska B, Kapitaniak T. Co-existing attractors of impact oscillator[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 1998, 9(8): 1439–1443.

[15] Udwadia F E, von Bremen H F. An efficient stable approach for computaton Lyapunov characteristic exponents of continuous dynamics systems[J]. *Appl. Math. and Computation*, 2001, 121(2): 219–259.

[16] Silvio L T de Souza, Ibere L. Caldas Calculation of Lyapunov exponents in systems with impact[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 19(3): 569–579.

[17] Venkatesan A, Lakshmanan M. Different routes to chaos via strange nonchaotic attractors in a quasiperiodically forced system[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(3): 3008–3016.

[18] Wen G L, Xu D L. Control algorithm for creation of Hopf bifurcations in continuous time systems of arbitrary dimension[J]. *Phys. Let. A*, 2005, 337(1): 93–100.

[19] Jing Z, Huang J. Bifurcation and chaos in a discrete genetic toggle switch system[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, 23(3): 887–908.

作者简介:

袁 地 (1981—), 男, 硕士, 目前主要研究方向是非线性系统的理论分析与模拟控制研究, E-mail: yuandi@aynu.edu.cn.