

## 具有状态观测器的鲁棒重复控制系统设计

周 兰<sup>1</sup>, 吴 敏<sup>1</sup>, 余锦华<sup>2</sup>, 何 勇<sup>1</sup>

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410083;

2. 东京工科大学 计算机科学学部, 日本 东京 192-0928)

**摘要:** 针对一类时变不确定系统, 研究基于状态观测器的鲁棒重复控制系统设计问题. 通过状态观测器重构系统状态, 利用重构状态进行状态反馈. 基于2维系统稳定性理论, 应用线性矩阵不等式(LMI)方法, 推导出了重复控制系统存在状态观测器和重复控制器的一个LMI条件, 并用LMI的可行解给出了状态观测器和重复控制器参数的具体形式. 最后用数值仿真验证了本文所提方法的有效性.

**关键词:** 不确定系统; 状态观测器; 鲁棒重复控制; 线性矩阵不等式

**中图分类号:** TP13      **文献标识码:** A

## Design of robust repetitive control system with a state observer

ZHOU Lan<sup>1</sup>, WU Min<sup>1</sup>, SHE Jin-hua<sup>2</sup>, HE Yong<sup>1</sup>

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410083, China;

2. School of Computer Science, Tokyo University of Technology, Tokyo 192-0982, Japan)

**Abstract:** The problem of designing a robust repetitive-control system is studied based on a state observer for a class of plants with structural time-varying uncertainties. The reconstructed states from the state observer are employed in the state-feedback controller design. Based on the stability theory of two-dimensional (2D) systems, a sufficient condition for the existence of the state observer and the repetitive controller for the repetitive control system are presented in terms of a linear matrix inequality (LMI) whose feasible solutions are utilized to determine the parameters of the state observer and the repetitive controller. A numerical example demonstrates the effectiveness of the method.

**Key words:** uncertain systems; state observer; robust repetitive control; linear matrix inequality

### 1 引言(Introduction)

在控制系统实践中, 经常会遇到具有重复性的控制任务, 例如, 数控机床、磁盘和光盘驱动器等伺服机构. 它们都需要控制系统对周期性外激励信号进行高精度跟踪. 重复控制因其控制精度高、实现简单, 已经成为解决这类控制问题的一种有效方法.

重复控制是20世纪80年代初由Inoue等人<sup>[1]</sup>提出的一种新型控制方法. 基于内模原理, 它将周期信号的动态模型植入系统的控制器内, 从而实现对任意周期的参考输入或干扰信号的渐近跟踪或抑制. 但是, 由于重复控制器是通过时滞环节的正反馈来构成的, 重复控制系统的稳定性难以保证<sup>[2]</sup>. Inoue等人构造了改进型重复控制系统<sup>[3]</sup>, 通过在时滞环节中串联低通滤波器改善了重复控制系统的稳定性, 但在一定程度上牺牲了系统的高频性能. 文

献[4~6]所给出的重复控制系统的镇定控制器综合设计方法依赖于一些间接的性能指标, 设计过程存在试凑的痕迹. 另一方面, 在工程技术中普遍存在不确定性问题, 而连续重复控制系统的时滞特性使得具有不确定结构的鲁棒重复控制器的设计比较困难. 在某些情况下, 重复控制系统具有很好的稳定性, 而其鲁棒性却很差<sup>[7]</sup>. Chen和Liu在频域空间中研究了鲁棒重复控制器的设计问题<sup>[8]</sup>, 所得结果只能适用于最小相位系统.

事实上, 重复控制依赖于两个独立的动态过程, 即一个周期之内的连续控制过程和控制周期之间的离散学习过程. 以往的各种重复控制系统设计把这两个独立的动态过程在一维空间上混合考虑, 不利于系统性能的分析 and 设计, 从而不可避免的存在着对控制对象要求较严、稳定条件难于验证等局限性.

为了充分利用重复控制中这两个独立的动态过程从根本上改善重复控制系统的特性, 文[9]将2维系统理论<sup>[10~12]</sup>应用于重复控制, 提出了一种基于连续/离散2维混合模型的鲁棒重复控制设计方法, 该方法可以有效地进行重复控制的稳定性分析和稳态跟踪特性设计, 其基本思想是将重复控制器的设计问题转化为2维系统的状态反馈增益设计问题. 然而, 它是在能够全部获得系统状态的前提下进行的, 这在实际控制系统中往往难以实现, 从而使得基于状态反馈的设计方法也就难以应用于实际. 解决这个问题可以通过利用系统的输入和输出对系统实现状态重构, 并利用重构状态进行状态反馈.

本文针对一类时变不确定系统, 提出了一种基于同维状态观测器的鲁棒重复控制系统设计方法. 通过状态观测器重构系统的状态, 基于重构状态进行状态反馈, 运用2维系统方法, 将状态观测器和重复控制器的设计归结为一个线性矩阵不等式(LMI)的可解性问题, 并给出了状态观测器和重复控制器的参数表达式.

在以下陈述中, 如不作特殊说明, 则 $\mathbb{R}^n$ 代表 $n$ 维实空间,  $\mathbb{R}^{n \times m}$ 代表所有 $n \times m$ 实矩阵集,  $I$ 代表合适维数的单位矩阵,  $X > 0 (< 0)$ 表示 $X$ 是一个正定(负定)矩阵. 且简写

$$\begin{bmatrix} A & B \\ * & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix}.$$

## 2 问题描述(Problem description)

考虑如图1所示的重复控制系统, 虚线所示部分 $C_R$ 为重复控制器, 其中 $e(t) = r(t) - y(t)$ 为跟踪误差, 滞后环节 $e^{-sT}$ 的滞后时间 $T$ 与参考信号的周期相同.

在图1中, 若设 $\nu(t) = 0, t < 0$ . 则重复控制器 $C_R$ 的时域表达式为

$$\nu(t) = \nu(t - T) + e(t).$$

同时, 控制对象 $G$ 为如下的一类单输入单输出的正则线性不确定系统

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = [A + \delta A(t)] x_p(t) + [B + \delta B(t)] u(t), \\ y_p(t) = C x_p(t) + D u(t), \end{cases} \quad (1)$$

这里 $x_p(t) \in \mathbb{R}^n$ 为状态变量,  $u(t), y_p(t) \in \mathbb{R}$ 分别为控制输入和输出,  $A, B, C, D$ 为实矩阵. 由系统的正则性知直达项系数矩阵 $D \neq 0$ .  $\delta A(t), \delta B(t)$ 为时变结构不确定性, 具有以下形式:

$$[\delta A(t) \ \delta B(t)] = M F(t) [N_0 \ N_1], \quad (2)$$

式中:  $M, N_0$ 和 $N_1$ 为具有适当维数的常数实矩阵,  $F(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 为具有Lebesgue可测元素的未知实矩阵, 满足

$$F^T(t) F(t) \leq I, \quad \forall t > 0. \quad (3)$$

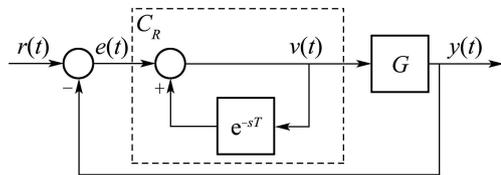


图1 基本的重复控制系统

Fig. 1 Basic repetitive control system

本文对控制对象的不确定性作如下假设:

**假设 1** 不确定性 $\delta A(t)$ 与 $\delta B(t)$ 满足

$$\delta A(T+t) = \delta A(t), \delta B(T+t) = \delta B(t), \quad \forall t > 0. \quad (4)$$

该假设条件在许多控制工程问题中都能成立.

针对控制对象(1), 构造如下形式状态方程的状态观测器:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}_p(t) = A \tilde{x}_p(t) + B u(t) + L[y_p(t) - \tilde{y}_p(t)], \\ \tilde{y}_p(t) = C \tilde{x}_p(t) + D u(t). \end{cases} \quad (5)$$

其中 $L$ 为观测器增益.

设 $x_\delta(k, \tau) = x_p(k, \tau) - \tilde{x}_p(k, \tau)$ 为重构状态误差, 由状态方程(1)和(5)得到重构状态误差方程

$$\begin{aligned} \dot{x}_\delta(t) &= [A + \delta A(t) - LC] x_\delta(t) + \\ &\delta A(t) \tilde{x}_p(t) + \delta B(t) u(t). \end{aligned} \quad (6)$$

基于状态观测器的重构状态反馈, 建立线性控制律

$$u(t) = K_e \nu(t) + K_p \tilde{x}_p(t), \quad (7)$$

构造如下图所示的基于同维状态观测器和重构状态反馈的重复控制系统结构. 在控制律(7)中采用重复控制增益 $K_e$ , 可以改善系统的快速性和稳定性; 引入重构状态反馈增益 $K_p$ , 一方面可以用来保证系统的稳定性, 同时可以全面提高系统的性能. 本文的重复控制系统的设计问题则是寻求状态观测器增益 $L$ 和控制增益 $K_e, K_p$ , 使图2所示的重复控制系统在控制律(7)的作用下鲁棒稳定.

本文采用与文[9]相似的观点, 应用2维系统方法, 在2维空间上独立地考虑重复控制的连续控制行为和离散学习行为, 分别用 $\tau$ 表示一个周期内的时间连续变量,  $k$ 表示学习次数的离散变量. 对变量 $\xi$ , 假定

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \xi(kL + \tau) = \xi(k, \tau), \\ \Delta \xi(t) &= \xi(t) - \xi(t - L). \end{aligned}$$

设

$$x_a^T(k, \tau) = [\tilde{x}_p^T(k, \tau) \quad x_\delta^T(k, \tau)]^T,$$

由式(5)~(7), 得到图所示的重复控制系统在2维空间中的如下描述形式:

$$\begin{cases} \Delta \dot{x}_a(k, \tau) = \bar{A} \Delta x_a(k, \tau) + \bar{B} \Delta u(k, \tau), \\ e(k, \tau) = e(k-1, \tau) - \bar{C} \Delta x_a(k, \tau) - D \Delta u(k, \tau). \end{cases} \quad (8)$$

式中2维状态反馈控制律为

$$\Delta u(k, \tau) = F_e e(k-1, \tau) + F_p \Delta x_a(k, \tau), \quad (9)$$

其中

$$\begin{cases} \bar{A} = \begin{bmatrix} A & LC \\ \delta A & A + \delta A - LC \end{bmatrix}, \\ \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ \delta B \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [C \quad C], \end{cases} \quad (10)$$

$$F_e = \frac{K_e}{1 + K_e D}, \quad F_p = [F_{p1} \quad F_{p2}], \quad (11)$$

$$F_{p1} = \frac{K_p - K_e C}{1 + K_e D}, \quad F_{p2} = -F_e C. \quad (12)$$

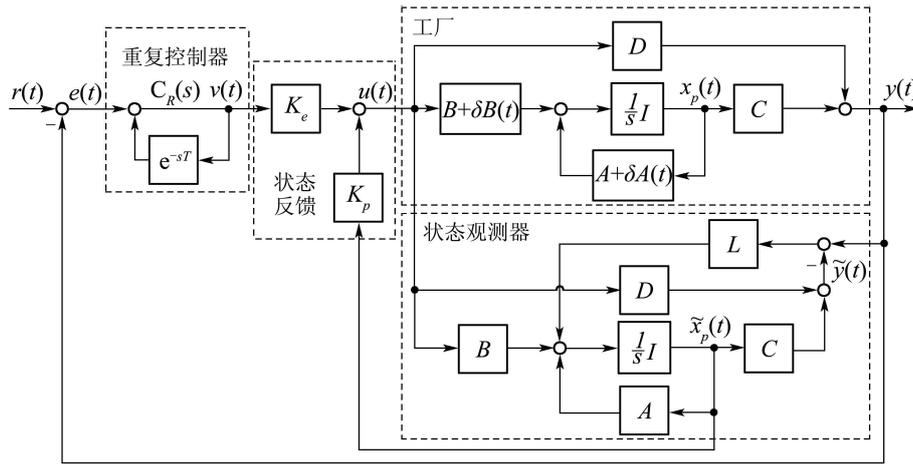


图2 基于状态观测器的重复控制系统

Fig. 2 Repetitive control system based on state observer

2维状态反馈控制律(9)是线性控制律(7)在2维空间中的描述, 控制律(9)可以通过调节反馈增益 $F_e$ 和 $F_p$ 来独立地调节重复控制过程中的学习过程和控制行为. 而在控制律(7)中, 由于 $v(t)$ 既包含了本周期的控制结果 $e(t)$ , 又包含了对上周期的学习效应 $v(t - T)$ , 因此, 直接调节控制增益 $K_e$ 或 $K_p$ 都不能单独调节控制过程中的控制或学习. 这正是本方法优于传统重复控制方法的地方.

### 3 基于状态观测器的鲁棒重复控制器设计(Design of robust repetitive controller based on a state reserver)

基于以上描述, 图2所示的鲁棒重复控制系统设计转化为基于状态观测器重构状态反馈的2维系统(8)的镇定控制器设计问题. 为此, 应用2维Lyapunov方法, 推导出连续/离散2维系统(8)在控制器(9)作用下镇定的充分条件. 在求得2维状态反馈控制律(9)中的控制增益 $F_e$ 和 $F_p$ 之

后, 由式(11)和式(12), 即可得到线性控制律(7)中的控制增益

$$K_e = \frac{F_e}{1 - DF_e}, \quad K_p = \frac{F_{p1} + F_e C}{1 - DF_e}. \quad (13)$$

设任意矩阵 $\Pi$ 的结构奇异值分解式为

$$\Pi = U[S \quad 0]V^T,$$

式中:  $S$ 是半正定矩阵,  $U, V$ 是酉矩阵.

为了获得2维系统(8)的稳定性条件, 首先引入如下引理.

**引理 1**<sup>[13]</sup> 给定矩阵 $\Pi \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\text{rank}(\Pi) = p$ . 对任意矩阵 $X$ , 存在 $\bar{X} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ , 使得 $\Pi X = \bar{X} \Pi$ 的充要条件是 $X$ 可以表示为

$$X = V \begin{bmatrix} \bar{X}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{X}_{22} \end{bmatrix} V^T,$$

这里 $V$ 为上述酉矩阵,  $\bar{X}_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\bar{X}_{22} \in \mathbb{R}^{(n-p) \times (n-p)}$ .

**引理 2**<sup>[14]</sup> 设 $\Omega_0(x)$ 和 $\Omega_1(x)$ 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型函数, 任意 $x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ , 若 $\Omega_1(x) \leq 0$ ,

则  $\Omega_0(x) < 0$  的充要条件是存在  $\varepsilon \geq 0$ , 使得  $\Omega_0(x) - \varepsilon\Omega_1(x) < 0$  成立.

**引理 3**(Schur 补)<sup>[15]</sup> 对给定的对称矩阵  $\Sigma = \Sigma^T$ , 以下3个条件等价:

- 1)  $\Sigma = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ * & S_{22} \end{bmatrix} < 0$ ;
- 2)  $S_{11} < 0$ , 且  $S_{22} - S_{12}^T S_{11}^{-1} S_{12} < 0$ ;
- 3)  $S_{22} < 0$ , 且  $S_{11} - S_{12} S_{22}^{-1} S_{12}^T < 0$ .

基于以上引理, 得到如下关于2维系统(8)的稳定性定理.

**定理 1** 如果存在正定对称矩阵  $X_1, X_{11}, X_{22}, X_3$ , 以及合适维数的矩阵  $W_1, W_2, W_3, W_4$  使得如下LMI:

$$\begin{bmatrix} \Phi_{11} & \Phi_{12} & BW_4 & 0 & \Phi_{15} & \Phi_{16} \\ * & \Phi_{22} & 0 & M_p & \Phi_{25} & \Phi_{26} \\ * & * & -X_3 & 0 & \Phi_{35} & W_4^T N_1^T \\ * & * & * & -I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -X_3 & 0 \\ * & * & * & * & * & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

成立, 其中输出矩阵  $C$  的结构奇异值分解式为  $C = U[S \ 0]V^T$ ,

$$\begin{aligned} X_2 &= V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T, \\ \Phi_{11} &= AX_1^T + X_1A + BW_1 + W_1^T B^T, \\ \Phi_{12} &= W_2C - BW_3C, \\ \Phi_{15} &= X_1C^T + W_1^T D^T, \\ \Phi_{16} &= X_1N_0^T + W_1^T N_1^T, \\ \Phi_{25} &= X_2C^T - C^T W_3^T D^T, \\ \Phi_{22} &= X_2A^T - C^T W_2^T + AX_2 - W_2C, \\ \Phi_{26} &= X_2N_0^T - C^T W_3^T N_1^T, \\ \Phi_{35} &= W_4^T D^T - X_3, \end{aligned}$$

则连续/离散2维系统(8)在控制律(9)的作用下渐近稳定, 并且控制增益

$$F_e = W_4 X_3^{-1}, \quad F_{p1} = W_1 X_1^{-1}, \quad (15)$$

状态观测器(5)的增益矩阵

$$L = W_2 U S X_{11}^{-1} S^{-1} U^T. \quad (16)$$

**证** 首先将控制律(9)代入2维系统(8)中, 得到图所示的闭环系统:

$$\delta\eta(k, \tau) = \hat{A}\eta(k, \tau) + \hat{B}\Gamma(k, \tau), \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \delta\eta(k, \tau) &= [\Delta\dot{x}_a^T(k, \tau) \ e(k, \tau)]^T, \\ \eta(k, \tau) &= [\Delta x_a^T(k, \tau) \ e(k-1, \tau)]^T, \\ \Gamma(k, \tau) &= F(k, \tau)\Psi\eta(k, \tau), \\ \hat{A} &= \begin{bmatrix} A + BF_{p1} & LC - BF_e C & BF_e \\ 0 & A - LC & 0 \\ -C - DF_{p1} & -C + DF_e C & 1 - DF_e \end{bmatrix}, \\ \hat{B} &= [0^T \ M^T \ 0]^T, \\ \Psi &= [N_0 + N_1 F_{p1} \ N_0 - N_1 F_e C \ N_1 F_e]. \end{aligned}$$

并且由式(3)得

$$\Gamma^T(k, \tau)\Gamma(k, \tau) \leq \eta^T(k, \tau)\Psi^T\Psi\eta(k, \tau).$$

因为LMI式(14)中的

$$X_2 = V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T,$$

根据引理1, 存在  $\bar{X}_2 = USX_{11}S^{-1}U^T$ , 使得  $CX_2 = \bar{X}_2C$ , 并且  $\bar{X}_2^{-1} = USX_{11}^{-1}S^{-1}U^T$ .

将  $F_e = W_4 X_3^{-1}, F_{p1} = W_1 X_1^{-1}, L = W_2 \bar{X}_2^{-1}, W = F_e \bar{X}_2$  代入式(14), 然后在式(14)的两边分别左乘、右乘

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \text{diag}\{X_1^{-1}, X_2^{-1}, X_3^{-1}, I, X_3^{-1}, I\} = \\ &= \text{diag}\{P_1, P_2, P_3, I, P_3, I\}, \end{aligned}$$

再运用Schur补引理3, 将式(14)化为

$$\begin{aligned} \Xi(k, \tau) &= \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & P_1 B F_e & 0 \\ * & H_{22} & 0 & M P_2 \\ * & 0 & -P_3 & 0 \\ * & * & * & -I \end{bmatrix} + \\ &= \begin{bmatrix} \Psi^T \\ 0 \end{bmatrix} [\Psi \ 0] + A^T P_3 A < 0, \quad (18) \end{aligned}$$

其中:

$$\begin{aligned} H_{11} &= P_1 A + A^T P_1 + P_1 B F_{p1} + F_{p1}^T B^T P_1, \\ H_{12} &= P_1 LC - P_1 B F_e C, \\ H_{22} &= P_2 A + A^T P_2 - P_2 LC - C^T L^T P_2, \\ A &= [-C - DF_{p1} \ -C + DF_e C \ 1 - DF_e]. \end{aligned}$$

构造如下形式的Lyapunov泛函:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 = \\ &= \Delta x_a^T(k, \tau) \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} \Delta x_a(k, \tau) + \\ &= e(k-1, \tau) P_3 e(k-1, \tau). \end{aligned}$$

沿着闭环系统(17), 得

$$\delta V = \frac{dV_1(k, \tau)}{d\tau} + \Delta V_2(k, \tau), \quad (19)$$

其中:

$$\frac{dV_1(k, \tau)}{d\tau} = \eta^T(k, \tau) \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & P_1 B F_e \\ * & H_{22} & 0 \\ * & 0 & -P_3 \end{bmatrix} \eta(k, \tau) + 2\Delta x_\delta^T(k, \tau) P_2 M \Delta x_\delta(k, \tau), \quad (20)$$

$$\Delta V_2(k, \tau) =$$

$$e^T(k, \tau) P_3 e(k, \tau) - e^T(k-1, \tau) P_3 e(k-1, \tau) = \eta^T(k, \tau) \left( \Lambda^T P_3 \Lambda + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -P_3 \end{bmatrix} \right) \eta(k, \tau). \quad (21)$$

任意给定  $\varepsilon > 0$ , 有

$$\varepsilon \delta V(k, \tau) - \varepsilon [\Gamma^T(k, \tau) \Gamma(k, \tau) - \eta^T(k, \tau) \Psi^T \Psi \eta(k, \tau)] = \varepsilon \begin{bmatrix} \eta^T(k, \tau) & \Gamma^T(k, \tau) \end{bmatrix} \Xi(k, \tau) \begin{bmatrix} \eta(k, \tau) \\ \Gamma(k, \tau) \end{bmatrix}.$$

这里的  $\Xi(k, \tau)$  定义于式(18).

由引理2知, 若  $\Xi(k, \tau) < 0$ , 则对任意  $[\eta^T(k, \tau) \Gamma^T(k, \tau)]^T \neq 0$ , 有

$$\delta V(k, \tau) < 0. \quad (22)$$

**注1** 定理1以LMI的形式给出了图所示的重复控制系统存在状态观测器和重复控制器的充分条件. 2维状态反馈增益  $F_e$  与  $F_p$  由LMI(14)中的权矩阵  $W_1, W_4$  和  $X_1, X_3$  确定. 通过将式(13)置入式(14)的MATLAB求解程序中来同时获得状线性控制律(7)中的控制增益  $K_e, K_p$  以及观测器增益矩阵  $L$ . 文献[16]也给出了系统稳定的LMI条件, 但仅能应用于严格正实的标称系统. 本文首次提出基于状态观测器的鲁棒重复控制系统设计方法, 拓宽了重复控制的应用领域.

由定理1可以比较容易地推导出标称系统基于状态观测器的重复控制系统设计方法, 即有如下推论.

此时, 被控对象为

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A x_p(t) + B u(t), \\ y_p(t) = C x_p(t) + D u(t). \end{cases} \quad (23)$$

**推论1** 如果存在正定对称矩阵  $X_1, X_{11}, X_{22}, X_3$ , 以及合适维数的矩阵  $W_1, W_2, W_3, W$  使

得如下LMI

$$\begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & B W_3 & X_1 C^T + W_1^T D^T \\ * & \Omega_{22} & 0 & X_2 C^T - C^T W^T D^T \\ * & * & -X_3 & W_3^T D^T - X_3 \\ * & * & * & -X_3 \end{bmatrix} < 0 \quad (24)$$

成立, 其中输出矩阵  $C$  的结构奇异值分解式为

$$C = U[S \ 0]V^T, \\ X_2 = V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T, \\ \Omega_{11} = A X_1^T + X_1 A + B W_1 + W_1^T B^T, \\ \Omega_{12} = W_2 C - B W C, \\ \Omega_{22} = X_2 A^T - C^T W_2^T + A X_2 - W_2 C,$$

则图所示的标称系统(23)基于状态观测器重构状态反馈的重复控制系统稳定, 观测器增益矩阵

$$L = W_2 U S X_{11}^{-1} S^{-1} U^T, \quad (25)$$

2维状态反馈控制器(9)的控制增益

$$F_e = W_3 X_3^{-1}, \quad F_p = W_1 X_1^{-1}. \quad (26)$$

#### 4 数值仿真(Numerical Simulation)

设控制对象(1)具有以下参数

$$\begin{cases} A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.5 \end{bmatrix}, \quad C = [5 \ 0], \quad D = 1, \\ M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad N_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \\ F(t) = \begin{bmatrix} \sin \frac{2\pi}{10} t & 0 \\ 0 & \sin \frac{2\pi}{10} t \end{bmatrix}. \end{cases} \quad (27)$$

考虑图所示的重复控制系统对周期性参考输入

$$r(t) = \sin \frac{2\pi}{10} t + 0.5 \sin \frac{4\pi}{10} t + 0.5 \sin \frac{6\pi}{10} t \quad (28)$$

的跟踪问题.

基于定理1所给出的连续/离散2维系统(8)的稳定性条件进行图所示的鲁棒重复控制系统设计, 考虑所得的鲁棒重复控制系统对参考输入的跟踪情况. 首先通过MATLAB工具箱求得控制增益

$$K_e = 0.7520, \quad K_p = [-5.0219 \ 2.6899], \quad (29)$$

状态观测器(5)中的观测增益

$$L = [3.4098 \ 2.1689]^T. \quad (30)$$

仿真结果示于图3. 从第6个周期开始, 系统输

出便进入了稳定状态,鲁棒稳定性得到了保证,并且稳态误差以较快速度趋于零.针对以上控制对象,文[9]定理3利用状态反馈进行重复控制系统设计,系统在第5个周期进入稳定状态,保证了系统的鲁棒稳定性.本文所设计的重复控制系统在过渡过程方面稍微慢一点,但是利用控制对象的输出进行反馈控制器的设计,与文[9]相比更具有实用价值.

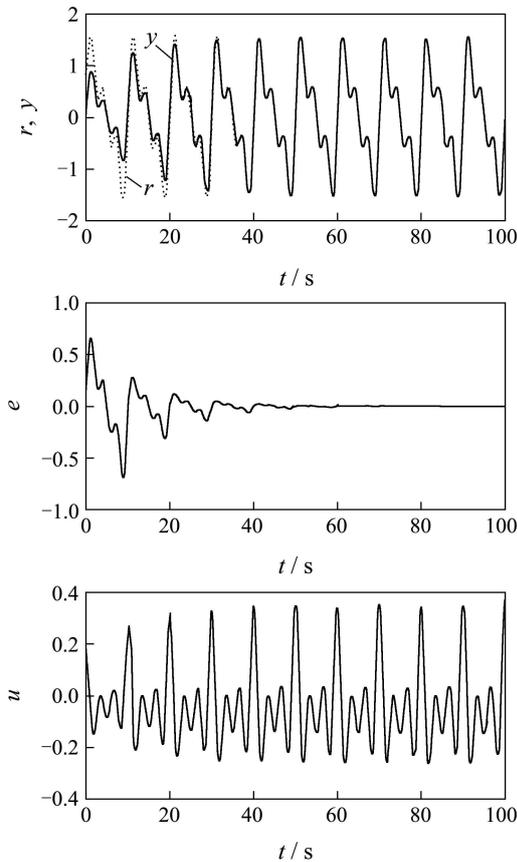


图3 基于状态观测器的重复控制系统仿真图

Fig. 3 Simulation result for repetitive control system based on state observer

为了突出说明基于状态观测器和重复控制器的闭环系统比一般基于观测器的状态反馈系统具有更好的稳态跟踪性能,本文构造如图4所示的基于观测器的状态反馈系统,并将该系统对参考信号的稳态跟踪情形也进行仿真.

基于Lyapunov稳定性定理,得到图4所示的闭环系统稳定的充分条件.即:若存在正定矩阵X以及合适维数的矩阵W<sub>1</sub>,W<sub>2</sub>,使得LMI

$$\begin{bmatrix} A_0X + XA_0^T & A_1W_1 - XA_2^T + C^TW_2^T \\ * & \Upsilon \end{bmatrix} < 0 \quad (31)$$

成立,这里输出矩阵C的结构奇异值分解式为C =

$$U[S \ 0]V^T,$$

$$X = V \begin{bmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{bmatrix} V^T,$$

$$\Upsilon = AX - W_2C + A_1W_1 + XA^T - C^TW_2^T + W_1^TA_1^T,$$

$$A_0 = A - \frac{BC}{1+D}, \quad A_1 = \frac{B}{1+D}, \quad A_2 = \frac{BC}{1+D},$$

则图4所示的状态反馈控制系统稳定,并且状态反馈控制增益

$$\tilde{k}_p = W_1X^{-1}, \quad (32)$$

观测器增益矩阵

$$\tilde{L} = W_2USX_{11}^{-1}S^{-1}U^T. \quad (33)$$

通过运用MATLAB工具箱求得LMI(31)的可行解,并结合(32)式和(33)式求得重构状态反馈控制增益 $\tilde{k}_p = [-0.3010 \ -1.2708]$ ,观测器增益

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} 0.4662 \\ 0.9743 \end{bmatrix}.$$

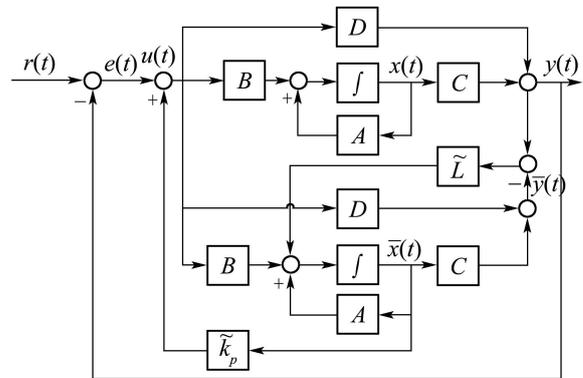


图4 基于观测器的状态反馈控制系统

Fig. 4 State feedback control system based on state observer

仿真结果如图5所示.从仿真结果可知,没有重复控制器的状态反馈控制系统在一个周期后即进入稳定状态,但其跟踪误差的幅值高达0.733.而基于状态观测器重构状态反馈的鲁棒重复控制系统能够实现无误差的稳态跟踪.

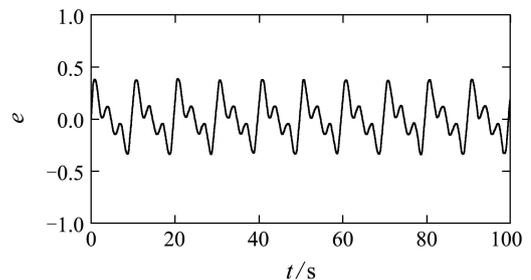


图5 基于观测器的状态反馈控制系统仿真图

Fig. 5 Simulation result of state feedback control system based on state observer

## 5 结语(Conclusion)

本文首次提出了基于状态观测器的鲁棒重复控制系统结构,并从独立考虑重复控制过程中的控制与学习这两种动态行为出发,建立了连续/离散2维混合模型,在此基础上应用连续/离散2维系统的稳定性条件和LMI方法,将重复控制系统的设计转化为LMI的可行解问题.控制器的设计具有简单、直观且实用的特点.针对能容许的不确定性结构,所设计的重复控制系统能保证系统的鲁棒稳定性和稳态跟踪性能.通过与传统的状态反馈控制系统仿真结果相比较说明了本文所提出的设计方法的有效性.

## 参考文献(References):

- [1] INOUE T, IWAI S, NAKANO M. High accuracy control of a proton synchrotron magnet power supply[C] // *Proceedings of the 8th World Congress of IFAC*. [s.l.]: [s.n.], 1981: 216 – 220.
- [2] 李翠艳, 张东纯, 庄显义. 重复控制综述[J]. *电机与控制学报*, 2005, 9(1): 37 – 44.  
(LI Cuiyan, ZHANG Dongchun, ZHUANG Xianyi. Repetitive control-a survey[J]. *Electric Machines and Control*, 2005, 9(1): 37 – 44.)
- [3] INOUE T, IWAI S. High accuracy control of servomechanism for repeated contouring[C] // *Proceedings of the 10th Annual Symposium on Incremental Motion, Control System and Devices*. [s.l.]: [s.n.], 1981: 285-292.
- [4] HARA S, YAMAMOTO Y, OMATA T, et al. Repetitive control system: A new type servo system for periodic exogenous signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7): 659 – 668.
- [5] HARA S, YAMAMOTO Y. Stability of repetitive control systems[C] // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1985: 326 – 327.
- [6] PEER Y T, özba Y H. On  $H_\infty$  optimal repetitive controllers[C] // *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*[C]. [s.l.]: [s.n.], 1993: 1146 – 1151.
- [7] SRINIVASAN K, SHAW F R. Analysis and design of repetitive control systems using the regeneration spectrum[J]. *ASME Transaction Journal Dynamical System, Measure and Control*, 1991, 113(2): 216 – 222.
- [8] CHEN J W, LIU T S.  $H_\infty$  Repetitive control for pickup head flying height in near-field optical disk drives[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, 41(2): 1067 – 1070.
- [9] 吴敏, 兰永红, 余锦华. 基于2维混合模型的重复控制系统设计新方法[J]. *自动化学报*, 2008, 34(9): 1208 – 1213.  
(WU Min, LAN Yonghong, SHE Jinhua. A new method of repetitive control designing based on 2D mixed model[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2008(in press).)
- [10] PARK S W, JEONG J, YANG H S, et al. Repetitive controller design for minimum track misregistration in hard disk drives[J]. *IEEE Transactions on Magnetics*, 2005, 41(9): 2522 – 2528.
- [11] RAMRATH L, SINGH T. A minimax approach to robust repetitive learning control[C] // *International Conference on Control and Automation*. Budapest, Hungary: [s.n.], 2005: 397 – 403.
- [12] DOH T Y, CHUNG M J. Design of a repetitive controller: an application to the track-following servo system of optical disk drives[J]. *IEEE Proceedings: Control Theory and Applications*, 2006, 153 (3): 323 – 330.
- [13] HO DWC, LU G. Robust stabilization for a class of discrete-time non-linear system via output feedback: the unified LMI approach[J]. *International Journal of Control*, 2003, 76(7): 105 – 115.
- [14] YAKUBOVICH V A. *S-procedure in nonlinear control theory*[D]. Vseslun Leningrad: Vestnik Leningrad University, 1971: 62 – 77.
- [15] KHARGONEK P P, PETERSEN I R, ZHOU K. Robust stabilization of uncertain linear systems: Quadratic stabilizability and  $H_\infty$  control theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35 (3): 356 – 361.
- [16] BARTLOMIEJ OWENS D H, LI L M, BANKS S P. Multi-periodic repetitive control system: a Lyapunov stability analysis for MIMO systems[J]. *International Journal of Control*, 2004, 77(5): 504 – 515.

## 作者简介:

周 兰 (1975—), 女, 中南大学博士研究生, 研究方向为鲁棒控制和重复控制, E-mail: zllly98@yahoo.cn;

吴 敏 (1963—), 男, 中南大学教授, 博士生导师, 研究方向为鲁棒控制、过程控制和智能系统, 1999年与日本中野道雄教授和余锦华博士一起获国际自动控制联合会(IFAC)控制工程实践优秀论文奖, E-mail: min@csu.edu.cn;

余锦华 (1963—), 男, 东京工科大学教授, 研究方向为控制理论与应用、鲁棒控制和智能机器人, E-mail: she@cc.teu.ac.jp;

何 勇 (1969—), 男, 中南大学教授, 博士生导师, 主要研究方向为鲁棒控制及其应用, E-mail: heyong08@yahoo.com.cn.