

文章编号: 1000-8152(2009)10-1111-07

双积分系统阶跃响应快速无超调控制: 一种增益切换非线性PD控制

朱 波, 王新华, 蔡开元

(北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191)

摘要: 采用标准PD或PID控制器镇定双积分对象时, 系统的阶跃响应必然存在超调; 为此, 设计了一种可以切换增益的非线性PD控制器, 给出了系统阶跃响应无超调的充要条件, 以及减小调节时间的方法. 采用的切换规律是: 当误差的幅值大于设定门限时, 设计好的快速PD控制器投入工作, 以加快误差的收敛; 当误差的幅值小于设定门限时, 设计好的强阻尼PD控制器投入工作, 以抑制可能出现的超调. 通过这两个控制器的配合作用, 既能实现阶跃响应无超调, 又能有效减小调节时间. 仿真验证了该结论.

关键词: 双积分模型; 阶跃响应; 快速无超调控制; 非线性PD控制

中图分类号: TP214, TP273 **文献标识码:** A

Fast and nonovershooting control for a double-integral system with step input: nonlinear PD control based on gain-switching

ZHU Bo, WANG Xin-hua, CAI Kai-yuan

(School of Automation Science and Electrical Engineering, BeiHang University, Beijing 100191, China)

Abstract: If a standard PD or a PID controller is used to stabilize a double-integral system with step input, a nonovershooting step-response can't be obtained. A novel nonlinear PD controller with gain-switching is presented to deal with this problem. The necessary and sufficient condition of the nonovershooting step-response and the methods to reduce the settling time are given. The designed switching action obeys the following rule: when the amplitude of the tracking error is larger than a threshold value, a fast PD controller is employed to accelerate the convergence of the tracking error; otherwise, a strong-damping PD controller is adopted to restrain the overshoot. The cooperation of the two PD controllers reduces the settling time while rendering a nonovershooting step-response. These theoretical results are confirmed by computer simulations.

Key words: double-integral model; step response; fast and nonovershooting control; nonlinear PD control

1 引言(Introduction)

系统响应的快速性和无超调特性是两个矛盾的性能指标, 但工程实际中又经常面对快速无超调控制的问题, 如高速机床的进给控制, 固定翼飞机起飞-着陆段的姿态角和迎角控制等. 快速控制器的设计已有大量成熟的方法, 典型的有时间最优控制^[1]和快速Terminal滑模控制^[2]等. 但无超调方面的研究却不够成熟. 文[3,4]通过讨论闭环系统的零极点位置关系, 给出了阶跃响应无超调的条件, 但是没有结合开环被控对象的能控特性讨论无超调控制器的设计问题. 文[5]探讨控制器阶次和闭环系统的极点位置受到限时最小超调量控制器的设计, 提出

了利用线性规划求解最佳零点以减小超调量的方法, 但没有解析出阶跃响应无超调的条件. 文[6]研究无超调补偿器的设计, 文[7,8]研究无超调反馈控制器的设计. 这两种方法都是传统的设计方法, 而且都没有讨论系统响应的快速性问题.

双积分系统是很多被控对象的等价模型或简化模型, 也是牛顿力学第二定律的抽象, 它大量存在于倒立摆控制系统和飞行器姿态控制系统中. 本文研究双积分系统快速无超调控制器的设计问题. 先通过两个定理指出: 采用标准PD或PID控制器镇定双积分对象, 闭环系统的阶跃响应必然存在超调; 然后, 提出一种新的增益切换非线性PD控制方案; 接

着,采用这种思想为双积分系统设计阶跃响应无超调控制器;最后分析了系统的全局稳定性问题和影响控制信号跳变量的因素.

2 问题描述(Problem formulation)

2.1 典型控制方案(Typical control schemes)

考察双积分系统

$$\ddot{y}(t) = u(t), \quad (1)$$

其中:系统输出 $y(t) \in \mathbb{R}$,输入 $u(t) \in \mathbb{R}$.

文[9]指出:双积分系统的镇定需要引入输出量的速率反馈.因此采用PD或PID控制器镇定该对象时,其微分项增益应不为零.单位负反馈结构下,采用标准PID控制时的系统如图1所示.

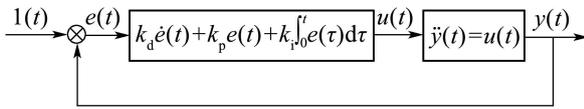


图1 采用PID控制器时的系统

Fig. 1 The closed-loop system with PID controller

参考输出为单位阶跃信号时,定义误差

$$e(t) = y_r(t) - y(t) = 1(t) - y(t). \quad (2)$$

采用标准PID控制时,被控对象的输入

$$u(t) = k_d \dot{e}(t) + k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau. \quad (3)$$

其中: k_d, k_p, k_i 为待设计的常数,分别表示控制器的微分项、比例项和积分项增益,而且 $k_d \neq 0$.

当式(3)中的 $k_i = 0$ 时,获得标准PD控制

$$u(t) = k_d \dot{e}(t) + k_p e(t). \quad (4)$$

为了区别式(3)和(4)这两种控制,下面的讨论假设式(3)中的 $k_i \neq 0$.

2.2 超调特性分析(Analysis of the overshoot)

本节讨论采用式(3)和(4)的控制时,图1所示系统响应的超调特性,给出本文的定理1和2.

1) $k_i = 0$ (对应式(4)的PD控制).

闭环系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{k_d s + k_p}{s^2 + k_d s + k_p}. \quad (5)$$

根据劳斯判据可知:系统(5)稳定的充要条件是 $k_d, k_p > 0$.为了分析该系统阶跃响应的超调特性,先根据文[3]的结论给出一个引理.

引理 1 系统(5)满足稳定条件时,其阶跃响应无超调当且仅当

$$\begin{cases} k_d^2 \geq 4k_p, \\ \frac{-k_d + \sqrt{k_d^2 - 4k_p}}{2} \geq -\frac{k_p}{k_d}. \end{cases} \quad (6)$$

证 根据文献[3]的结论可知,正则2阶系统的阶跃响应无超调当且仅当这3个条件:响应初值 $y(0^+) \leq 1$ 、系统的阻尼系数大于或等于1、系统较大的实极点大于或等于系统零点同时满足.对于严格正则的2阶系统(5),根据初值定理有

$$y(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} s y(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G(s) \frac{1}{s} = 0,$$

所以第1个条件成立,而另两个条件则可用式(6)表示. 证毕.

这里通过检验式(6)的两个条件能否同时满足,以判断系统(5)的阶跃响应是否存在超调.

定理 1 系统(5)的阶跃响应必然存在超调.

证 对系统(5)的参数,存在关系式:

$$\frac{-k_d + \sqrt{k_d^2 - 4k_p}}{2} + \frac{k_p}{k_d} = \frac{4k_p^2}{2k_d(2k_p - k_d^2 - k_d\sqrt{k_d^2 - 4k_p})}. \quad (7)$$

在 $k_d, k_p > 0$ 时,若 $k_d^2 \geq 4k_p$ (即式(6)的第1个条件满足),则有关系式:

$$\begin{aligned} 2k_p - k_d^2 - k_d\sqrt{k_d^2 - 4k_p} < \\ 4k_p - k_d^2 - k_d\sqrt{k_d^2 - 4k_p} \leq \\ -k_d\sqrt{k_d^2 - 4k_p}, \end{aligned} \quad (8)$$

从而可得

$$\frac{4k_p^2}{2k_d(2k_p - k_d^2 - k_d\sqrt{k_d^2 - 4k_p})} < 0. \quad (9)$$

联立式(7)可得

$$\frac{-k_d + \sqrt{k_d^2 - 4k_p}}{2} + \frac{k_p}{k_d} < 0. \quad (10)$$

这说明式(6)中的两个条件在 $k_d, k_p > 0$ 时不能同时满足. 证毕.

2) $k_i \neq 0$ (对应式(3)的标准PID控制).

这里先给出两个引理,再给出本文的定理2.

引理 2 对于系统(1),若存在一个有限时刻 $t_s \in (0, +\infty)$,当 $t > t_s$ 时控制输入 $u(t) \equiv \varepsilon$ ($\varepsilon \in \mathbb{R}$,为一非零的常数),则当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $y(t) \rightarrow \infty$.

证 设 t_s 时刻的输出为 $y(t_s)$, 其导数为 $\dot{y}(t_s)$. 则当 $t > t_s$ 时:

$$y(t) = \frac{\varepsilon}{2}(t - t_s)^2 + \dot{y}(t_s)(t - t_s) + y(t_s). \quad (11)$$

显然, 若 $\varepsilon \neq 0$, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $y(t) \rightarrow \infty$.

证毕.

引理 3 对于系统(1), 若存在一个有限时刻 $t_s \in (0, +\infty)$, 当 $t > t_s$ 时控制输入 $u(t) > \varepsilon (\varepsilon \in \mathbb{R}^+, \text{为一非零的正常数})$, 则当 $t \rightarrow +\infty$ 时 $y(t) \rightarrow +\infty$.

证 结合式(11), 易证.

定理 2 采用图1所示的基于单位负反馈的标准PID控制器镇定被控对象(1), 在 $k_i \neq 0$ 时, 闭环系统的阶跃响应必然存在超调.

证 这里采用反证法. 输出无超调当且仅当误差不变号. 对于图1所示的控制系统, 误差的初值 $e(0^+) = 1$. 这样, 输出无超调当且仅当 $e(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ ^[3], 假设该条件成立.

结合 $e(0^+) = 1$ 和 $e(t)$ 关于时间 t 处处连续的性质可知: 必然存在一个有限时刻 $t_s > 0$, 使得当 $t \in [0, t_s]$ 时, $e(t) > 0$. 根据定积分中值定理有

$$\int_0^{t_s} e(\tau) d\tau = e(\xi)t_s > 0, \quad 0 \leq \xi \leq t_s. \quad (12)$$

根据 $e(t)$ 和 $\dot{e}(t)$ 的指数收敛特性及函数极限的定义可知: 必定存在一个有限时刻 $t_{ss} \in (t_s, +\infty)$, 使得当 $t > t_{ss}$ 时有

$$|k_p e(t)| < \frac{1}{4} k_i e(\xi) t_s, \quad (13)$$

$$|k_d \dot{e}(t)| < \frac{1}{4} k_i e(\xi) t_s. \quad (14)$$

结合式(12)~(14)及假设条件 $e(t) \geq 0, \forall t \geq 0$, 可知: 当 $t > t_{ss}$, 有关系式:

$$\begin{aligned} u(t) = & k_d \dot{e}(t) + k_p e(t) + k_i \int_0^t e(\tau) d\tau > \\ & -\frac{1}{4} k_i e(\xi) t_s - \frac{1}{4} k_i e(\xi) t_s + k_i \int_0^{t_s} e(\tau) d\tau > \\ & \frac{k_i e(\xi) t_s}{2} > 0. \end{aligned} \quad (15)$$

根据引理3的结论可知: 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, 有 $y(t) \rightarrow +\infty$, 从而有 $e(t) \rightarrow -\infty$. 这与无超调等价条件 $e(t) \geq 0, \forall t \geq 0$ 矛盾, 所以原假设不成立.

证毕.

注 1 通常情况下, PID控制器中的积分项可以改善闭环系统的静态特性, 而不能改善调节时间和超调量等动态特性. 针对某些特殊的被控对象, 控制器中引入误差积分项只会增加超调, 而不会避免超调. 例如, 基于图1所示的单

位负反馈结构控制单积分模型($\frac{1}{s}$), 若采用标准P控制器, 则闭环系统是1阶惯性环节, 其阶跃响应不存在超调; 但若采用标准PI控制器, 则闭环系统是形如式(5)的正则2阶系统. 根据定理1可知其阶跃响应必然存在超调.

定理1和2说明采用标准PD或PID控制器镇定双积分对象, 系统的阶跃响应必然存在超调. 为了引入增益切换PD控制, 下文结合2阶常系数齐次线性微分方程的解析解, 进一步分析PD控制下超调的原因.

2.3 PD控制超调产生原因的分析(Analysis of the overshoot introduced by PD control)

采用单位负反馈PD控制器镇定双积分对象时, 误差的动态方程为

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = \ddot{y}_r. \quad (16)$$

参考输出为单位阶跃信号时, 有 $\ddot{y}_r \equiv 0, \forall t > 0$. 这样式(16)变为

$$\ddot{e} + k_d \dot{e} + k_p e = 0. \quad (17)$$

假设误差收敛条件 $k_d, k_p > 0$ 成立, 式(17)的两个特征根分别记为 p_1, p_2 . 对于系统(17), 采用文献[3]中的分析方法, 可以得到下面的定理3.

定理 3 对于系统(17), 在 $t \in [0, +\infty)$ 内, e 不变号(不考虑恒为零的情况) 当且仅当参数 k_d, k_p 和初值 $e(0^+), \dot{e}(0^+)$ 满足关系式

$$\begin{cases} k_d, k_p > 0, \\ k_d^2 \geq 4k_p, \\ e(0^+)(\dot{e}(0^+) - p_1 e(0^+)) \geq 0, \end{cases} \quad (18)$$

其中

$$p_1 = \frac{-k_d - \sqrt{k_d^2 - 4k_p}}{2}.$$

证 采用文献[3]中的证明方法易证, 这里略.

用定理3的结论来解释定理1. 利用初值定理可得 $e(0^+) = 1, \dot{e}(0^+) = -k_d$, 从而有

$$e(0^+)(\dot{e}(0^+) - p_1 e(0^+)) = \frac{\sqrt{k_d^2 - 4k_p} - k_d}{2} < 0. \quad (19)$$

这与式(18)中的第3个条件矛盾. 因此在 $t \in [0, +\infty)$ 内, 误差必变号, 该结论与定理1的相同.

从式(18)可以看出: 阶跃响应是否超调与误差动态的初值, PD控制器的增益都有关系. 若能在响应过程的某一时刻 t_s , 让误差动态的值和当前控制器增益满足式(18), 则可以实现无超调. 下文增益切换PD控制器的设计就基于这种思路.

3 增益切换PD控制(Gain-switching PD control scheme)

本节先介绍增益切换PD控制的切换规律;再基于这种规律,设计一种通用的关于时间 t 处处右连续的切换函数.

3.1 切换规律(Switching law)

考虑两个PD控制器,其增益向量分别记为 $K_1 = [k_{p1} \ k_{d1}]$ 和 $K_2 = [k_{p2} \ k_{d2}]$.对于系统(5),若选择不同的 K_1, K_2 ,则可以设计出两个阻尼特性完全不同的2阶系统,一个可以是欠阻尼的,其采用的控制器称为“快速PD控制器”;而另一个是过阻尼或临界阻尼的,其采用的控制器称为“强阻尼PD控制器”.在控制的初始阶段,一般误差较大,此时若采用快速PD控制器,则可以提高误差的收敛速度;一段时间后,当误差的绝对值小于某一门限 e_s 时,若采用强阻尼PD控制器,则可以抑制响应的超调量,这就是本文提出的增益切换规律(如图2所示).显然,这种切换旨在利用两个PD控制器性能上的互补性以实现快速且小超调(甚至无超调)跟踪控制.

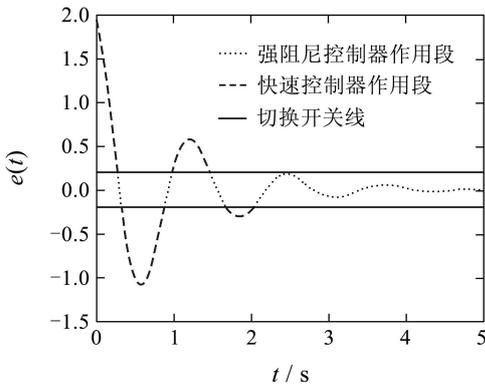


图2 PD控制器切换规律

Fig. 2 The switching law of PD controllers

注2 文[10,11]研究了另一种非线性增益切换PD控制器及其在机器人控制中的应用.其主要思想是:当系统输出有远离期望值的趋势时(即当 $e\dot{e} > 0$ 时),比例项增益取较大的一个值;当系统输出有靠近期望值的趋势时(即当 $e\dot{e} < 0$ 时),比例项增益切换到较小的一个值.

3.2 切换函数(Switching function)

基于上文提出的切换策略,设计切换函数如下:

$$\sigma(e) = \begin{cases} 2, & \text{若 } -e_s \leq e(t) < e_s, \\ 1, & \text{其他.} \end{cases} \quad (20)$$

上式中的1表示快速PD控制器在作用,2表示强阻尼PD控制器在作用.

目前的切换系统分析和设计中,大多假定切换函数关于时间 t 处处右连续^[12,13].结合定义式(20)和复

合函数连续性的判定法则,可得到关于该切换函数连续性的两个结论.

结论1 切换函数(20)关于误差 e 处处右连续.

结论2 当参考信号 $y_r(t)$ 关于时间 t 处处连续时,切换函数(20)关于时间 t 也处处右连续.

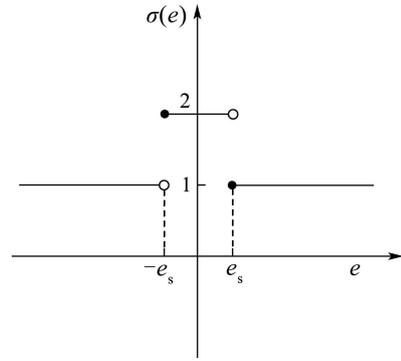


图3 基于误差的切换函数

Fig. 3 The switching function in terms of error

下文将基于式(20)为双积分对象(1)设计增益切换PD控制器,以保证闭环系统的阶跃响应无超调且调节时间较小.

4 双积分系统的增益切换PD控制(Applying the scheme to the double-integral model)

4.1 设计参数的约束(Parameter constraints)

式(20)涉及两个控制子系统(1和2).这里,系统切换由控制器切换引起,控制器的设计包括两个PD子控制器增益和切换门限的设计.

快速PD控制器的主要作用是提高系统的响应速度,为此把子系统1设计成欠阻尼2阶系统.结合传递函数式(5),可知快速PD控制器的增益须满足

$$\begin{cases} k_{d1}, k_{p1} > 0, \\ k_{d1}^2 < 4k_{p1}. \end{cases} \quad (21)$$

结合定理1的结论可知:若快速PD控制器持续作用,则必然存在超调.因此需要借助于强阻尼控制器,以减小超调量或避免超调.为此,把子系统2设计成临界阻尼或过阻尼2阶系统.结合传递函数式(5),可知强阻尼PD控制器的增益须满足

$$\begin{cases} k_{d2}, k_{p2} > 0, \\ k_{d2}^2 \geq 4k_{p2}. \end{cases} \quad (22)$$

基于式(20),给出双积分对象的增益切换PD控制方案见图4.对于该控制系统,在 $t \in [0, +\infty)$ 内,误差 e 是否会变号与其初值和控制器增益都有关系.下文根据定理3的结论,给出误差 e 不变号的充要条件.

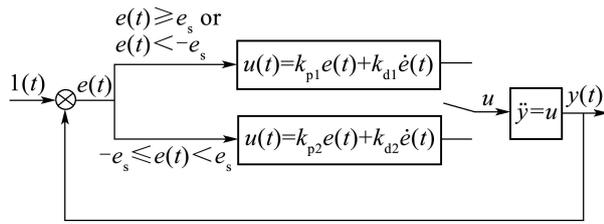


图 4 增益切换PD控制方案
Fig. 4 The gain-switched PD control scheme

定理 4 对于图4所示的切换线性系统, 当控制器增益满足式(21)和(22)时, 系统阶跃响应无超调当且仅当下述条件成立:

$$\begin{cases} 0 < e_s < 1, \\ \dot{e}_s \geq p_{21} e_s. \end{cases} \quad (23)$$

其中: \dot{e}_s 表示第1次增益切换时刻的误差导数即 $\dot{e}_s = \dot{e}(t_s)$, 特征根 $p_{21} = \frac{-k_{d2} - \sqrt{k_{d2}^2 - 4k_{p2}}}{2}$.

证 必要性: 单位阶跃信号激励下, 图4所示的切换线性系统误差动态的初值 $e(0^+) = 1$. 该条件下, 系统输出无超调等价于误差在整个响应过程中恒大于零; 又由于参数满足式(21)的子系统1是最小相位系统, 其输出不会负调^[8], 因此误差 e 必恒小于1. 所以切换门限应满足 $0 < e_s < 1$. 再结合定理3可知条件 $\dot{e}_s \geq p_{21} e_s$ 也必然成立.

充分性: 由于 $e(0^+) = 1 > e_s$, $\dot{e}(0^+) = -k_{d1} < 0$, 所以在 $t \in [0, t_s]$ 时段, 误差 e 单调递减; 在 t_s 时刻后, 强阻尼PD控制器开始作用(该段误差的初值是 e_s), 由于其增益 k_{d2}, k_{p2} 满足式(22)和式(23)中的第2个条件, 根据定理3可知这一时段误差也不会变号. 所以在整个 $t \in [0, +\infty)$ 时段, 系统输出不会超调. 证毕.

式(21)~(23)共同构成图4所示系统阶跃响应无超调的条件. 对于给定的切换门限 e_s , \dot{e}_s 由快速PD控制器的增益 k_{d1}, k_{p1} 决定; 对于子系统2, 其特征根 p_{21} 的大小由强阻尼PD控制器的增益 k_{d2}, k_{p2} 决定. 因此, 式(23)的第2个不等式反映了快速PD控制器的增益、强阻尼PD控制器的增益和切换门限三者之间的约束关系. 显然, 在 k_{d1}, k_{p1}, e_s 一定时, 特征根 p_{21} 可取的最大值为 $\frac{\dot{e}_s}{e_s}$, 这说明 k_{d2}, k_{p2} 的可行取值有多个, 也说明增益切换PD控制设计参数的选择不唯一. 因此, 这种设计具备一定的灵活性.

4.2 闭环系统的稳定性分析(Stability analysis of the closed-loop system)

这一节基于条件式(21)~(23), 简要分析图4所示的切换线性系统的全局稳定性.

当子控制器增益分别满足式(21)和(22)时, 子系统1和2都是指数稳定的. 在 $t \in [0, t_s]$ 时段, 误差动态必定有界; 而在 $t \in (t_s, +\infty)$ 时段, 在强阻尼PD控制器的作用下, 误差动态也必定向原点指数收敛(而且误差不会变号). 所以整个响应过程中误差不会发散.

实际上, 一旦进入强阻尼PD控制器作用段输出便不会振荡, 只会单调趋近于稳态值(而且不会超调). 这样, 系统将不会再次进入快速PD控制器的作用段. 所以对于该问题, 增益切换的次数是有限的, 理想情况下(没有干扰时)只有一次. 所以该系统的全局稳定性并没有因为切换的引入而改变.

下面两节将分析影响调节时间大小和控制信号跳变量的因素.

4.3 调节时间的分析(Analysis of the settling time)

在快速控制器的作用下, 系统输出迅速上升. 经过 t_s s, 误差减小到切换门限 e_s . 该时段 ($0 \leq t \leq t_s$), 误差曲线的包络线为

$$e(t) = \sqrt{\frac{4k_{p1}}{4k_{p1} - k_{d1}^2}} \exp\left(-\frac{k_{d1}}{2}t\right). \quad (24)$$

对于式(24), 令 $e(t_s) = e_s$ 得 t_s 的近似计算公式

$$t_s \approx \frac{2}{k_{d1}} \left(\ln \sqrt{\frac{4k_{p1}}{4k_{p1} - k_{d1}^2}} - \ln e_s \right). \quad (25)$$

在 $t \in (t_s + \infty)$ 时段, 强阻尼PD控制器工作, 该时段误差动态的初值是 e_s . 这里把误差的稳态阈值记为 δ (其取值一般为0.02或0.05). 设输出进入稳态的时刻为 t_{ss} , 并假设 $t_{ss} > t_s$. 由于 t_{ss} 的解析表达式较难获得, 这里给出两种近似计算公式以辅助分析.

1) 2阶近似法.

根据定积分的定义及中值定理有

$$\delta - e_s = \dot{e}(\xi)(t_{ss} - t_s), \quad t_s \leq \xi \leq t_{ss}. \quad (26)$$

利用数值积分的2阶梯形近似思想, 可得关系式

$$\dot{e}(\xi) \approx \frac{\dot{e}_s + \dot{e}(t_{ss})}{2}. \quad (27)$$

联立式(26)(27), 可得

$$t_{ss} = t_s + \frac{2(\delta - e_s)}{\dot{e}_s + \dot{e}(t_{ss})}. \quad (28)$$

强阻尼PD控制器作用段 $e(t)$ 不存在振荡, 可认为误差进入稳态后其导数也进入稳态, 即

$$\dot{e}(t_{ss}) \approx 0. \quad (29)$$

把式(29)代入式(28)得

$$t_{ss} = t_s + \frac{2(\delta - e_s)}{\dot{e}_s}. \quad (30)$$

当 e_s 较小时, t_{ss} 主要由 t_s 决定. 这样, 用式(30)估算 t_{ss} 不会引起较大的误差.

2) 主导模态近似法.

当子系统2的根满足 $p_{21} < 4p_{22} < 0$ 时, 误差收敛的速度主要由主导模态 p_{22} 决定. 存在1阶近似关系

$$e(t) \approx \frac{\dot{e}_s - p_{21}e_s}{p_{22} - p_{21}} \exp(p_{22}(t - t_s)), \quad (31)$$

于是, 可得

$$t_{ss} \approx t_s + \frac{\ln \delta(p_{22} - p_{21}) - \ln(\dot{e}_s - p_{21}e_s)}{p_{22}}. \quad (32)$$

从式(30)和(32)可以看出: 选择较小的 e_s 或选择 k_{d1}, k_{p1} 以产生较小的 \dot{e}_s (这里 $\dot{e}_s < 0$)都可以减小 t_{ss} . 两种调节方案的物理意义分别是增加快速PD控制器的作用时段和增大切换时刻误差的收敛速度.

控制器增益的切换会引起控制信号的跳变, 下文将分析控制信号的跳变量.

4.4 控制信号跳变量分析(Analysis of the jumping magnitude of control signal)

设切换前后瞬间的控制分别为 $u(t_s^-)$ 和 $u(t_s^+)$ 结合误差及其导数的连续性有

$$u(t_s^-) = k_{p1}e_s + k_{d1}\dot{e}(t_s), \quad (33)$$

$$u(t_s^+) = k_{p2}e_s + k_{d2}\dot{e}(t_s). \quad (34)$$

用 $\Delta u(t_s)$ 表示控制信号的跳变量, 并定义

$$\Delta u(t_s) = u(t_s^+) - u(t_s^-). \quad (35)$$

联立式(33)~(35), 可得

$$\Delta u(t_s) = (k_{p2} - k_{p1})e_s + (k_{d2} - k_{d1})\dot{e}(t_s). \quad (36)$$

从式(36)可以看出: 选择较小的切换门限 e_s 或设计 $k_{p1} \approx k_{p2}$ 或设计 $k_{d1} \approx k_{d2}$ 都有助于减小控制信号跳变量的大小.

4.5 设计小结(Summary of the design)

本文快速无超调增益切换PD控制器的设计主要是 $e_s, k_{d1}, k_{p1}, k_{d2}, k_{p2}$ 5个参数的设计. 理想情况下(不考虑外在干扰), 可以按以下5个步骤进行:

- 1) 在(0, 1)范围内, 选择切换门限 e_s ;
- 2) 根据式(21), 选择增益 k_{d1}, k_{p1} ;
- 3) 利用数值仿真获得 \dot{e}_s 的值;
- 4) 根据式(22)和(23), 选择增益 k_{d2}, k_{p2} ;
- 5) 利用数值仿真或式(30)(或式(32))估算调节时间 t_{ss} , 以检验快速性是否满足设计要求.

实际设计时, 这5个步骤往往需要反复迭代进行. 满足式(21)~(23)的控制器增益和切换门限是无穷

多组的. 因此, 可以根据快速性的要求, 选择一组理想的设计参数.

5 仿真实验(Simulation and experiment)

为了对比, 这里考虑3种PD控制方案, 各自参数的取值见表1. 其中, 方案1采用本文提出的增益切换PD控制, 其切换门限和控制器增益满足设计条件式(21)~(23); 方案2和3都采用标准PD控制, 其控制增益分别采用方案1两个子控制器的增益. 图5给出了单位阶跃输入下, 系统误差随时间的变化曲线. 图6给出了这3种方案的控制信号随时间的变化曲线.

表1 设计参数及系统特点

Table 1 Design parameters and the characteristics of the closed-loop systems

方案	设计参数	闭环系统的特点
1	$e_s = 0.2$ $K_1 = [1 \ 0.6], K_2 = [1 \ 4.2]$	切换线性系统
2	$K = K_1$	欠阻尼且 $\xi_1 = 0.3$
3	$K = K_2$	过阻尼且 $\xi_2 = 2.1$

从图5可以看出: 方案1实现了无超调控制, 对于2%误差带, 其调节时间在2 s内; 方案2的误差在10 s内有较大振荡, 调节时间很长(10 s左右), 超调量很大(接近50%); 方案3的响应存在小幅度超调, 整个响应过程没有振荡, 但调节时间显然比方案1长; 在开始的一段时间(大致1.2 s内), 方案1和方案2的误差曲线完全重合.

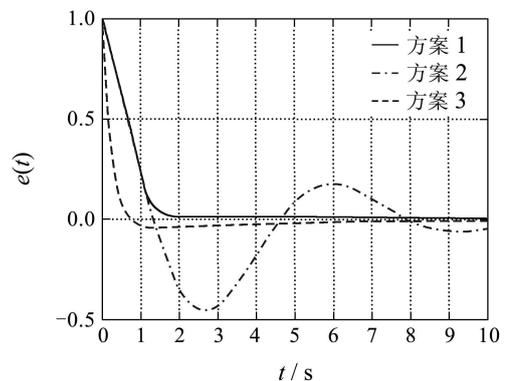


图5 误差曲线

Fig. 5 The curves of errors

从图6可以看出: 方案1的控制信号在响应的初始阶段(大致1.2 s内)和方案2的完全重合, 在1 s左右发生了跳变, 幅值大约为3; 而在2 s以后, 方案1,3的控制信号重合; 方案2的控制信号的幅值在整个响应过程中一直较小(没有超过1), 但过渡时间较长; 方案3的控制信号收敛较快(用时1 s左右), 但在开始阶段, 控制信号幅值很大.

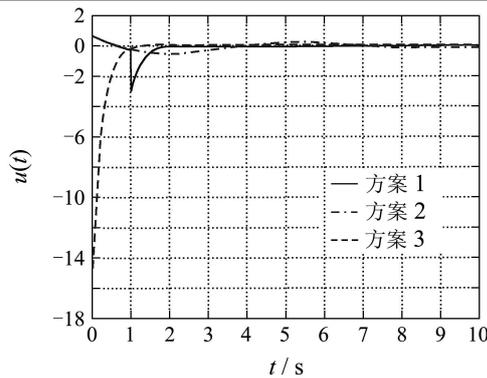


图 6 控制信号

Fig. 6 The control signals

综合以上分析, 可以得出3点结论: 1) 在镇定双积分对象时, 采用常用的参数时不变PD控制器不能实现系统的阶跃响应无超调, 而且调节时间较长; 2) 本文提出的增益切换PD控制器则可以实现阶跃响应无超调控制, 而且系统的响应既具有过阻尼2阶系统小超调(实现了零超调)的优点, 又具有欠阻尼2阶系统响应上升时间短的优点; 3) 本文增益切换PD控制付出的代价是控制信号的一次跳变. 通过选择合适的控制器增益和切换门限, 可以减小控制信号的跳变量.

6 总结(Conclusion)

本文以双积分模型为被控对象, 研究阶跃响应快速无超调控制器的设计问题. 先后讨论了工程中常用的标准PD和PID控制器的控制效果, 并得出结论: 这两种方案都不能实现无超调控制. 为此, 提出了增益切换PD控制方案, 即利用两个性能互补的PD子控制器分阶段控制. 本文讨论了该方案的设计与实现, 并给出了切换门限和控制器增益应满足的条件, 这是该方案下实现阶跃响应无超调的充分必要条件. 最后给出了减小调节时间和减小控制信号跳变量的措施.

本文给出的设计方法为快速无超调控制器的设计提供了一种新思路. 今后进一步研究的问题包括: 1) 针对高阶系统的快速无超调跟踪算法; 2) 增益切换PD控制器的应用和推广; 3) 多次切换情形下的无超调跟踪算法.

参考文献(References):

- [1] BOBROW J, DUBOWSKY S, GIBSON J S. Time-optimal control of robotic manipulators along specified paths[J]. *The International Journal of Robotics Research*, 1985, 4(3): 3 – 17.
- [2] YU X, MAN Z. Fast terminal sliding-mode control design for nonlinear dynamical systems[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, 2002, 49(2): 261 – 264.
- [3] LIN S K, FANG C J. Non-overshooting and monotone non-decreasing step responses of a third-order SISO linear system[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(9): 1299 – 1303.
- [4] KWON B M, RYU H S, KWON O K. Some conditions for monotone non-decreasing step response with the fastest rise time[C] // *Proceeding of American Control Conference*. Virginia: Arlington Press, 2001, 1: 552 – 557.
- [5] MOORE K L, BHATTACHARYYA S P. A technique for choosing zero locations for minimal overshoot[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(5): 577 – 580.
- [6] JAYASURIYA S, SONG J W. On the synthesis of compensators for nonovershooting step response[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 1996, 118(4): 757 – 763.
- [7] BEMENT M, JAYASURIYA S. Construction of a set of nonovershooting tracking controllers[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2004, 126(3): 558 – 567.
- [8] BEMENT M, JAYASURIYA S. Use of state feedback to achieve a nonovershooting step response for a class of non-minimum phase systems[J]. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2004, 126(3): 657 – 660.
- [9] SLOTINE J E, LI W. *Applied Nonlinear Control*[M]. Englewood Cliffs: Prentice-Hall Press, 1991.
- [10] XU Y, HOLLERBACH J, MA D. A nonlinear PD controller for force and contact transient control[J]. *IEEE Control Systems Magazine*, 1995, 15(1): 15 – 21.
- [11] ARMSTRONG B, MCPHERSON J, LI Y. Stability of nonlinear PD control[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 1997, 7(2): 101 – 120.
- [12] LIBERZON D. *Switching in Systems and Control*[M]. Boston: Birkhauser Press, 2003.
- [13] CHENG D. Stabilization of planar switching systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 51(2): 79 – 88.

作者简介:

朱波 (1982—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为飞行器控制和非线性跟踪控制, E-mail: chubo@asee.buaa.edu.cn;

王新华 (1975—), 男, 副教授, 目前研究方向为非线性跟踪控制和先进飞行器设计与控制, E-mail: wangxinhua@buaa.edu.cn;

蔡开元 (1965—), 男, 长江学者特聘教授, 博士生导师, 目前研究方向为主动控制、软件测试和软件可靠性, E-mail: kycai@buaa.edu.cn.