

输入空间新划分下模糊控制系统的稳定性

苗志宏¹, 李洪兴²

(1. 中国人民武装警察部队学院 消防工程系, 河北 廊坊 065000; 2. 大连理工大学 电信学院, 辽宁 大连 116024)

摘要: 对于模糊控制系统稳定性问题, 如何充分利用模糊规则的结构信息获得更加宽松的稳定性条件目前还没有有效的方法. 本文针对T-S模糊模型利用输入空间新划分方法讨论了模糊控制系统的稳定性和控制器设计问题. 首先通过输入空间新划分导出了模糊规则库的一些性质. 然后, 通过构建一个分段可微二次Lyapunov函数, 获得了保守性更低的稳定性充分条件. 这一条件进一步转化成了设计模糊控制器的线性矩阵不等式条件. 最后, 仿真实验验证了方法的有效性.

关键词: T-S 模糊模型; 分段二次稳定; 并行分布补偿方法; 线性矩阵不等式

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Stability of fuzzy control systems based on a new partition of input space

MIAO Zhi-hong¹, LI Hong-xing²

(1. Department of Fire Protection Engineering, The Chinese People's Armed Police Force Academy, Langfang Hebei 065000, China;

2. School of Electron and Information Engineering, Dalian University of Technology, Dalian Liaoning 116024, China)

Abstract: For fuzzy control systems, there is no effective way to determine stability conditions less conservative than the usual ones by fully utilizing the fuzzy rules structure information. We develop the stability conditions and the design method for the fuzzy control system by dividing its input space in a new way. The properties of the fuzzy rule base are derived from the division of the input space. A less conservative stability condition is obtained by constructing a piecewise differentiable quadratic Lyapunov function. This condition is transformed into the form of linear matrix inequalities for designing the fuzzy controller. Simulation examples are given to show the effectiveness of the proposed method.

Key words: T-S fuzzy model; piecewise quadratic stability; parallel distributed-compensation; linear matrix inequalities

1 引言(Introduction)

文献[1]中提出的T-S模糊模型可以用来逼近一类非线性系统, 近来在非线形控制领域受到普遍的关注. T-S模糊模型是由一组模糊规则构成, 其后件是线性的, 这样非线性系统的控制问题就便于用成熟的线性系统理论来分析. 在T-S模糊控制系统中, 一般以T-S模糊模型作为设计模型替代非线性系统, 而控制器设计采用并行分布补偿(parallel distributed compensation, PDC)方法^[2].

就T-S模糊控制系统的稳定性而言, Tanaka^[3~6]等人利用Lyapunov直接法首先获得了系统稳定的充分条件. 后来在文献[7]中Kim等人给出了保守性相对较低的稳定性条件. 紧接着在文献[8]中, Liu等人文在文献[7]基础上把对称的松弛变量矩阵改成了非对称的情形. 但以上这些方法保守性还是比较强,

问题在于它们都要求解出一个公共的对称正定矩阵. 鉴于此, Cao^[9,10], Johansson^[11], Zhang^[12]等人进一步研究了这一问题. Cao^[9,10]给出了一种输入空间的划分方式, 但没有充分利用模糊规则前件的结构信息. Johansson等人考虑了将输入空间划分为多个区域的方法, 但要寻找一个分段连续的Lyapunov函数比较困难, 并且划分的区域数远大于规则数. Zhang等人采用了的最大隶属度解模糊法, 但没有充分利用激活度较小的规则信息, 应用范围有限.

近年来, Antonio^[13]等人利用模糊规则前件隶属函数交叠信息, 放宽了文献[7,8]中稳定性条件, 分析了激活度的上界与稳定性条件保守性之间的关系, 但并没有考虑输入空间的划分问题. 文献[14]中也考虑了模糊规则库的结构信息, 但也没有考虑输入空间的划分问题. 就输入空间划分方式来说, 文献[15]

中的方式是目前常见的一种,如文献[16~18]中便沿用了这样的划分方式.但文献[16]没有充分利用模糊规则前件的结构信息,而文献[17,18]虽考虑模糊规则前件的结构信息,但要知道激活函数对时间导数的上界,这是比较困难的.另外,输入空间采用这样的划分可以得到的结构信息还是具有一定的局限性.实际上,不同的划分方式会在相应的区域上挖掘出不同类型的结构信息.那么,如何划分才能挖掘出更加丰富的结构信息呢?

本文在文献[8,10,13]的基础上,采用一种新的输入空间划分方式,得到保守性更低的稳定性充分条件.此外,利用分段PDC方法给出了基于线性矩阵不等式(linear matrix inequalities, LMI)的控制系统设计方法.通过理论分析证明了本文中的结论比文献[13]中的结论具有更小的保守性.两个例子也说明了本文方法的有效性.

2 模糊系统及输入空间的划分(Fuzzy system and partitioning of input space)

本文以T-S模糊模型为设计对象^[1],其模糊规则描述如下:

IF $z_1(t)$ is F_1^i and $\dots$ and $z_s(t)$ is F_s^i THEN

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t), \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (1)$$

其中: A_i, B_i 是具有适当维数的实常数矩阵,相应的 (A_i, B_i) 称为第 i 个子系统; F_j^i 表示模糊集, $\mathbf{u}(t)$ 是系统输入项.记:

$$\begin{aligned} \mathbf{z}(t) &= (z_1(t), z_2(t), \dots, z_s(t))^T, \\ \mathbf{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T. \end{aligned}$$

对于给定的输入对 $(\mathbf{z}(t), \mathbf{u}(t))$,采用单点模糊化、乘积推理和加权平均解模糊化后得

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \sum_{i=1}^r h_i(\mathbf{z}(t))(A_i \mathbf{x}(t) + B_i \mathbf{u}(t)), \quad (2)$$

这里

$$h_i(\mathbf{z}) = \prod_{j=1}^s F_j^i(z_j) / \sum_{i=1}^r \prod_{j=1}^s F_j^i(z_j).$$

虽然文献[8]给出的条件利用了模糊划分的信息,但要面对所有规则求解出一个公共的对称正定矩阵 P ,这里仍然存在很大的保守性,目前解决这一问题的有效手段之一是对模糊规则输入空间进行划分,即将输入空间划分为多个区域^[9,10],然后在各个区域上求解一个二次Lyapunov方程.除此之外,在输入空间划分基础上,进一步利用划分区域上结构信息也能大幅度地降低稳定性条件的保守性.以下本文按另一种方式来划分输入空间,并给出相关的性

质.

以下讨论中沿用了文献[15]中给出的关于模糊划分的部分概念.为引入本文的方法,以下再增加几个概念.

设一模糊集族 $\{F^1, F^2, \dots, F^k\}$ 是某个论域 $U = [a, b] \subset \mathbb{R}$ 上的一个标准模糊划分(standard fuzzy partition),其峰点分别是 $c^1, c^2, \dots, c^k$,并不妨设 $c^1 < c^2 < \dots < c^k$.在论域 U 上引入 $k+1$ 个分点 $d^0, d^1, \dots, d^k$ 使得有如下关系:

$$a = d^0 < c^1 < d^1 < c^2 < d^2 < \dots < c^k < d^k = b.$$

并且选择 d^i 是区间 $[c^i, c^{i+1}]$ 上使 $F^i(z) = F^{i+1}(z)$ 的一个点.于是得到论域 U 上的 k 个区间 $[d^0, d^1], [d^1, d^2], \dots, [d^{k-1}, d^k]$.显然对 $\forall z \in [d^{i-1}, d^i]$ 有

$$F^i(z) \geq F^j(z), \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

区间 $[d^{i-1}, d^i]$ 称为模糊集 F^i 的主导区间.因此每一个模糊集都有一个主导区间,并记:

$$m(F^i) = \min\{F^i(d^{i-1}), F^i(d^i)\},$$

$$M(F^i) = \max\{F^i(d^{i-1}), F^i(d^i)\}.$$

显然 $\forall z \in [d^{i-1}, d^i], F^i(z) \geq m(F^i)$.

对于第 i 个模糊规则,如果前件模糊集 $F_1^i, F_2^i, \dots, F_s^i$ 对应的主导区间分别是 $[d_1^{i_1}, d_1^{i_1+1}], [d_2^{i_2}, d_2^{i_2+1}], \dots, [d_s^{i_s}, d_s^{i_s+1}]$,于是可以构造 s 维输入空间上的一个操作域:

$$S_i = [d_1^{i_1}, d_1^{i_1+1}] \times [d_2^{i_2}, d_2^{i_2+1}] \times \dots \times [d_s^{i_s}, d_s^{i_s+1}].$$

因此对每一个模糊规则,都可以构造出一个相应的操作域.这样本文可以将输入空间划分为 r 个操作域: $S_1, S_2, \dots, S_r$.如图1给出了2维输入空间上的9个操作域.

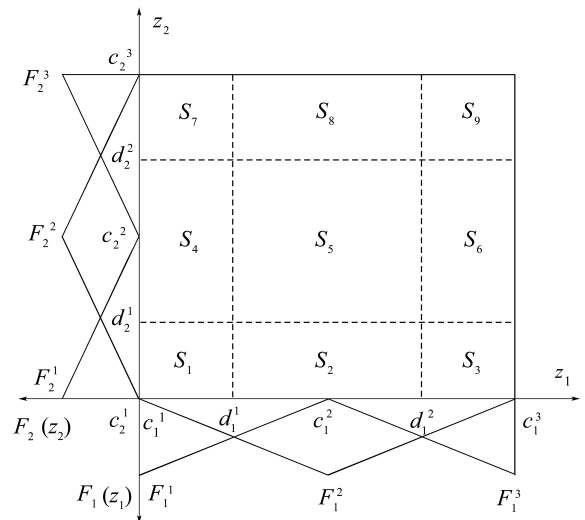


图1 输入空间上的一个划分

Fig. 1 A partition of the input space

所有落在操作域 S_i 中前件变量 z 激活的规则全体构成一个规则组, 类似于文献[15]中给出的最大交叠规则组(maximal overlapped-rules group)概念, 本文给出针对操作域 S_i 的如下模糊规则组:

$$\mathcal{R}_i = \{R_k | h_k(z) > 0, \exists z \in S_i\},$$

这里将 $\mathcal{R}_i$ 称为操作域 S_i 上的激活规则组. 自然第 i 个模糊规则一定在 $\mathcal{R}_i$ 中. 于是在区域 S_i 上, 相应的局部模型表示为

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=1}^{f_i} h_{ki}(z(t))(A_{ki}x(t) + B_{ki}u(t)), \quad (3)$$

其中: f_i 为 $\mathcal{R}_i$ 中规则的个数; $h_{ki}(z(t))$ 表示局部模型的归一化激活度, 也是整体模糊模型中的一个激活度, 并满足

$$h_{ki}(z(t)) \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{f_i} h_{ki}(z(t)) = 1.$$

(A_{ki}, B_{ki}) 是局部模型上的第 k 个子系统, 这个子系统也是整体模糊模型中的一个子系统.

考虑到第 i 个子系统 (A_i, B_i) 也在这个局部模型中, 因此子系统的序号规定如下:

$(A_{1i}, B_{1i}) = (A_i, B_i)$; 其余子系统的序号根据其在整体模糊系统中的序号从小到大排列.

例如图1中的区域 S_3 对应的局部模型包含了子系统: (A_3, B_3) , (A_2, B_2) , (A_5, B_5) , (A_6, B_6) , 则它们在第 i 个局部模型中分别被表示为: (A_{13}, B_{13}) , (A_{23}, B_{23}) , (A_{33}, B_{33}) , (A_{43}, B_{43}) . $h_{ki}(z(t))$ 与 $h_i(z(t))$ 之间也有类似的对应关系.

对操作域 S_i 定义如下的特征函数:

$$\lambda_i(z) = \begin{cases} 1, & z \in S_i, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \quad (4)$$

这样模糊模型(2)可以改写为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(z) \sum_{k=1}^{f_i} h_{ki}(z(t))(A_{ki}x(t) + B_{ki}u(t)). \quad (5)$$

设 U_k 是变量 z_k ($k = 1, 2, \dots, s$)的论域. 假设各论域 U_k ($k = 1, 2, \dots, s$)上的模糊划分分别是 F_k^i ($i = 1, 2, \dots, m_k$, $k = 1, 2, \dots, s$). 可以在每个模糊划分上依次取一个模糊集组合成一个序列, 将所有序列构成一个集合, 记为

$$\mathcal{F} = \{(F_1^{i_1}, F_2^{i_2}, \dots, F_s^{i_s}) | 1 \leq i_1 \leq m_1, 1 \leq i_2 \leq m_2, \dots, 1 \leq i_s \leq m_s\}. \quad (6)$$

定义 1 称一个T-S模糊模型是完备的, 如果相应模糊规则与 $\mathcal{F}$ 的序列之间存在一一映射.

由上述概念不难得到如下性质:

性质 1 如果一个T-S模糊模型是完备的, 则模糊规则组中共有 $r = m_1 m_2 \cdots m_s$ 条不同规则.

定义 2 称一个T-S模糊模型是完备标准的, 如果相应模糊规则是完备的, 模糊划分是标准的.

对于完备标准的T-S模糊模型又有如下性质:

性质 2 如果T-S模糊模型(2)是完备标准的, 则对操作域 S_i 有

- 1) $h_{1i}(z) \geq \delta, \forall z \in S_i$;
- 2) $h_{1i}(z) \geq h_{ki}(z), \forall z \in S_i, k = 1, 2, \dots, f_i$;
- 3) $0 \leq h_{ki}(z)h_{li}(z) \leq \beta_{kli}, \forall z \in S_i, k, l = 1, 2, \dots, f_i$, 其中

$$\beta_{kli} = \begin{cases} 1, & k = l = 1, \\ \gamma^2, & k = l \neq 1, \\ 0.25, & \text{其他.} \end{cases}$$

而这里:

$$\delta = m(F_1^i)m(F_2^i) \cdots m(F_s^i),$$

$$\gamma = \max\{M(F_1^i), \dots, M(F_s^i)\}.$$

证 首先注意到在完备模糊模型中 $r = m_1 \cdot m_2 \cdots m_s$, 又因为每个论域上的模糊划分是标准的, 所以 $\sum_{j=1}^{m_i} F_i^j(z_j) = 1$. 因此 $\sum_{i=1}^r w_i(z) = 1$. 这样 $h_i(z) = w_i(z)$ ($i = 1, 2, \dots, r$).

在操作域 S_i 上不妨设 $h_{1i} = F_1 F_2 \cdots F_s$, 这里 $F_1, F_2, \dots, F_s$ 分别是论域 $U_1, U_2, \dots, U_s$ 上模糊划分中的一个模糊集. 注意到 S_i 是由 $F_1, F_2, \dots, F_s$ 的主导区间构成的一个区域. 因此

$$h_{1i}(z) \geq m(F_1)m(F_2) \cdots m(F_s), \quad \forall z \in S_i.$$

任意取 $k \neq 1$, 不妨设

$$h_{ki}(z) = G_1(z_1)G_2(z_2) \cdots G_s(z_s),$$

这里 $G_1, G_2, \dots, G_s$ 是分别是论域 $U_1, U_2, \dots, U_s$ 上模糊划分中的一个模糊集. 注意到 G_j 与 F_j 是同一个论域 U_j 上的两个模糊集, 且至少有一对不同. 由主导区间的概念有

$$G_1(z_1) \leq F_1(z_1), \dots, G_s(z_s) \leq F_s(z_s), \quad \forall z \in S_i.$$

于是对 $\forall z \in S_i$, 有 $h_{1i}(z) \geq h_{ki}(z)$.

另一方面, 不妨设 G_i 与 F_i 不同, 则

$$G_1(z_1)G_2(z_2) \cdots G_s(z_s) \leq G_i(z_i) \leq M(F_i),$$

$$\forall (z_1, \dots, z_s) \in S_i,$$

因此

$$G_1(z_1)G_2(z_2) \cdots G_s(z_s) \leq$$

$\max\{M(F_1), \dots, M(F_s)\}, \forall (z_1, \dots, z_s) \in S_i.$

于是 $h_{ki}^2 \leq \gamma^2 (k \neq 1, \forall z \in S_i).$

对于第3个结论再注意到(或见文献[13]):

$$h_{ki}h_{li} \leq h_{ki}(1 - h_{ki}) \leq 0.25, k \neq l.$$

证毕.

3 模糊控制系统稳定性条件(Stability conditions for fuzzy control systems)

针对模糊模型(5), 本文考虑如下形式的控制律:

$$u(t) = \begin{cases} u_i, & z(t) \in S_i, t \neq \tau_i; \\ u_j, & z(t) \in S_i \cap S_j (i \neq j), t = \tau_i, \end{cases} \quad (7)$$

其中

$$u_i(t) = - \sum_{k=1}^{f_i} h_{ki}(z(t))K_{ki}x(t).$$

而 $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{\bar{T}}$ 是 $\bar{T}$ 个时间序列, τ_i 表示变量 $z(t)$ 到达某个操作域边界的时间, 并假设变量 $z(t)$ 在每个时间常数 τ_i 处是连续的.

采用上述控制律后其模糊闭环系统为

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^r \lambda_i(x) \sum_{k=1}^{f_i} \sum_{l=1}^{f_i} h_{ki}h_{li}(A_{ki} - B_{ki}K_{li})x(t). \quad (8)$$

引入以下记号:

$$G_{kli} = (A_{ki} - B_{ki}K_{li}),$$

$$Q_{kki} = G_{kki}^T P_i + P_i G_{kki},$$

$$Q_{kli} = ((G_{kli} + G_{lki})^T P_i + P_i (G_{kli} + G_{lki}))/2.$$

其中: $i \neq j, P_i$ 是对称正定矩阵.

结合上节性质2, 获得如下:

定理 1 模糊闭环系统(8)是渐进稳定的, 如果 $\bar{T} < \infty$, 且对每个 $S_i (i=1, 2, \dots, r)$ 都存在一个共同的对称正定矩阵 P_i , 一组对称正定矩阵 $R_{kli} (k \leq l)$, 以及一组矩阵 $X_{kli} = X_{lki}^T$, 使得如下矩阵不等式成立:

- 1) $Q_{11i} + \sum_{k=2}^{f_i} R_{1ki} + \Lambda_i \leq X_{11i};$
- 2) $Q_{1ki} + Q_{k1i} - 2R_{1ki} + 2\Lambda_i \leq X_{1ki} + X_{k1i},$
 $k = 2, \dots, f_i, h_{1i}h_{ki} \neq 0;$
- 3) $Q_{kki} - R_{kki} + \Lambda_i \leq X_{kki}, k = 2, \dots, f_i;$
- 4) $Q_{kli} + Q_{lki} - R_{kli} + 2\Lambda_i \leq X_{kli} + X_{lki},$
 $k < l, k \neq 1, h_{ki}h_{li} \neq 0;$
- 5) $\begin{pmatrix} X_{11i} & \cdots & X_{1f_i i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{f_i 1i} & \cdots & X_{f_i f_i i} \end{pmatrix} < 0;$

这里 $\Lambda_i = -\delta^2 R_{11i} + \sum_{k=1}^{f_i} \sum_{l \leq k} \beta_{kli} R_{kli}.$

证 定义操作域 S_i 上的Lyapunov函数为

$$V_i(x) = x^T P_i x.$$

当 $z(t) \in S_i, t \neq \tau_i$ 时, 上述函数对时间的导数

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x(t)) &= x^T \left(\sum_{k=1}^{f_i} \sum_{l=1}^{f_i} h_{ki}h_{li} G_{kli} \right)^T P_i x + \\ & x^T P_i \sum_{k=1}^{f_i} \sum_{l=1}^{f_i} h_{ki}h_{li} G_{kli} x = \\ & \sum_{k=1}^{f_i} h_{ki}^2 \{x^T Q_{kki} x\} + \\ & \sum_{k=1}^{f_i} \sum_{k < l \leq f_i} h_{ki}h_{li} \{x^T (Q_{kli} + Q_{lki}) x\} \end{aligned}$$

在 S_i 上由于性质2的3个结论成立, 并注意到 R_{kli} 是对称正定矩阵, 因此也就有如下几个式子成立:

$$\begin{aligned} h_{1i}^2 x^T R_{11i} x - \delta^2 x^T R_{11i} x &\geq 0; \\ h_{1i}h_{ki} x^T R_{1ki} x - h_{1i}h_{ki} x^T R_{1ki} x &\geq 0, \\ k = 1, 2, \dots, f_i; \\ \beta_{kli} x^T R_{kli} x - h_{ki}h_{li} x^T R_{kli} x &\geq 0, k \leq l, \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(x) &\leq \dot{V}_i(x) + (h_{1i}^2 x^T R_{11i} x - \delta^2 x^T R_{11i} x) + \\ & \sum_{k=2}^{f_i} (h_{1i}h_{ki} x^T R_{1ki} x - h_{1i}h_{ki} x^T R_{1ki} x) + \\ & \sum_{k=1}^{f_i} \sum_{k \leq l \leq f_i} (\beta_{kli} x^T R_{kli} x - h_{ki}h_{li} x^T R_{kli} x) = \\ & h_{1i}^2 x^T (Q_{11i} + \sum_{k=2}^{f_i} R_{1ki} + \Lambda_i) x + \\ & \sum_{k=2}^{f_i} h_{1i}h_{ki} x^T (Q_{1ki} + Q_{k1i} - 2R_{1ki} + 2\Lambda_i) x + \\ & \sum_{k=2}^{f_i} h_{ki}^2 x^T (Q_{kki} - R_{kki} + \Lambda_i) x + \\ & \sum_{k=2}^{f_i} \sum_{k < l \leq f_i} h_{ki}h_{li} x^T (Q_{kli} + Q_{lki} - R_{kli} + 2\Lambda_i) x. \end{aligned}$$

由定理中的条件, 有

$$\dot{V}_i(x) \leq \sum_{k=1}^{f_i} \sum_{l=1}^{f_i} h_{ki}h_{li} x^T X_{kli} x < 0.$$

对于分界点处(即 $z(t) \in S_i \cap S_j, t = \tau_i$)左右导数的定义及讨论过程与文献[10]相同, 因此由文献[10]的定理2.1知, 系统是全局渐进稳定的. 证毕.

为说明定理1的有效性, 下面的例子中在相同条件下, 采用不同的稳定性条件进行比较.

例 1 考虑T-S模糊模型具有如下系统参数:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

指定3个子系统的闭环极点均为 $[-1, -15]$. 于是子系统的反馈增益 K_i 可以由Ackermann公式得到. 当 a 和 b 分别在区间 $[50, 100]$, $[10, 50]$ 内取值时, 本文相继采用了文献[8]定理2, 文献[13]定理3以及本文中定理1进行了数值验证. 在3个定理中取参数 $\beta_{13} = 0, \gamma = 0.5, \delta = 0.5$.

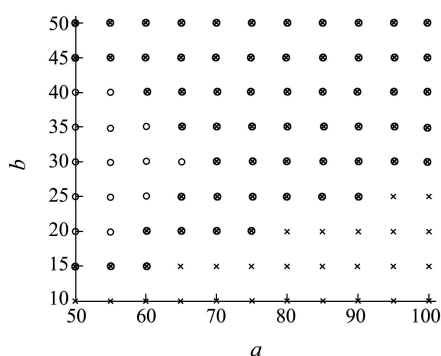


图2 能够判断系统为稳定的点

Fig. 2 The points at which the system can be determined to be stabilized

注 1 图2中标记说明:

1) 标有“o”的点是能用文献[13]中定理判断为稳定的点, 其余点不能断为稳定;

2) 标有“o”和“x”的点都是能用本文定理1能够判断系统为稳定的点, 而“x”是不能断为稳定的点;

3) 图中所有点处采用文献[8]中定理时均不能判断为稳定.

从图2中可以看出, 对 $\forall a \in [50, 100], \forall b \in [10, 50]$ 文献[8]中定理均不能判断系统是稳定的, 而采用文献[13]中定理时在部分点处取值时可以判断系统是稳定的, 这说明文献[13]中定理放宽了文献[8]中定理的条件. 采用本文定理1时可以判断为稳定的点不仅包含文献[13]中定理能判定为稳定点而且还增加了很多, 因此本文定理1的条件比文献[13]中给出的条件保守性要小.

4 模糊控制器设计(Design of fuzzy controller)

上节定理1的条件不是关于反馈增益 K_{li} 的线性矩阵不等式, 因此不能直接用来设计形如式(8)的模糊控制器. 下面的定理给出了基于LMI方法的模糊控制器设计条件.

定理 2 模糊闭环系统(8)是渐进稳定的, 如果 $\bar{T} < \infty$, 且对每个 $S_i (i = 1, 2, \dots, f_i)$ 都存在一个共

同的对称正定矩阵 Z_i , 一组矩阵 W_{ki} , 一组对称正定矩阵 $V_{kli} (k \leq l)$, 以及一组矩阵 $Y_{kli} = Y_{lki}^T$, 使得如下矩阵不等式成立:

- 1) $A_{1i}Z_i + Z_iA_{1i}^T - (B_{1i}W_{1i} + W_{1i}^TB_{1i}^T) + \sum_{k=2}^{f_i} V_{1ki} + \Gamma_i \leq Y_{11i};$
- 2) $(A_{1i} + A_{ki})Z_i + Z_i(A_{1i} + A_{ki})^T - ((B_{1i}W_{ki} + B_{ki}W_{1i}) + (B_{1i}W_{ki} + B_{ki}W_{1i})^T) - 2V_{1ki} + 2\Gamma_i \leq Y_{1ki} + Y_{k1i}, k = 2, \dots, f_i, h_{1i}h_{ki} \neq 0;$
- 3) $A_{ki}Z_i + Z_iA_{ki}^T - (B_{ki}W_{ki} + W_{ki}^TB_{ki}^T) - V_{kki} + \Gamma_i \leq Y_{kki}, k = 2, \dots, f_i;$
- 4) $(A_{ki} + A_{li})Z_i + Z_i(A_{ki} + A_{li})^T - ((B_{ki}W_{li} + B_{li}W_{ki}) + (B_{ki}W_{li} + B_{li}W_{ki})^T) - V_{kli} + 2\Gamma_i \leq Y_{kli} + Y_{lki}, k < l, k \neq 1, h_{li}h_{ki} \neq 0;$
- 5) $\begin{pmatrix} Y_{11i} & \cdots & Y_{1f_i i} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Y_{f_i 1 i} & \cdots & Y_{f_i f_i i} \end{pmatrix} < 0,$

其中:

$$\Gamma_i = -\delta^2 V_{11i} + \sum_{k=1}^{f_i} \sum_{k \leq l \leq f_i} \beta_{kli} V_{kli},$$

而反馈增益为 $K_{ki} = W_{ki}Z_i^{-1}$.

证 在定理1的各个条件上分别左乘右乘矩阵 P_i^{-1} , 并记

$$Z_i = P_i^{-1}, W_{ki} = K_{ki}Z_i,$$

$$V_{kli} = Z_i R_{kli} Z_i, Y_{kli} = Z_i X_{kli} Z_i.$$

便可获得本定理的相应条件. 证毕.

定理2的各个条件是关于矩阵 $Z_i, W_{ki}, V_{kli}, Y_{kli}$ 的线性矩阵不等式, 因此可以通过内点法求出可行解, 下面例子中本文采用MATLAB中的LMI工具箱求解.

例 2 考虑质量块-弹簧-阻尼器机械系统, 其方程为^[15]:

$$\ddot{x} = -\dot{x}^3 - 0.02x - 0.1x^3 + (1 + 0.13\dot{x}^3)u. \quad (9)$$

其中: x 是质量块的位置, u 是作用力.

设 $x_1 = x, x_2 = \dot{x}$. 采用文献[20]中的线性化处理方法, 在操作点 $(-1.5, -1.5), (0, -1.5), (1.5, -1.5), (-1.5, 0), (0, 0), (1.5, 0), (-1.5, 1.5), (0, 1.5), (1.5, 1.5)$ 处可分别给出相应的线性模型, 取 $z_1 = x_1, z_2 = x_2$, 得到如下形式的模糊规则:

$$\text{IF } z_1(t) \text{ is } F_1^k \text{ and } z_2(t) \text{ is } F_2^l \text{ THEN}$$

$$\dot{x}(t) = A_i x(t) + B_i u(t), \quad i = 1, 2, \dots, 9,$$

其中: $k = \text{mod}(i-1, 3) + 1$, $l = \text{fix}((i-1)/3) + 1$. $\text{mod}(x, y)$ 表示 x 除以 y 的余数, $\text{fix}(x)$ 是 x 的截尾取整函数.

应模糊集合 $F_j^i (j = 1, 2)$ 的隶属函数取如下形式:

$$F_j^1(z) = \begin{cases} 1, & z < -1.5, \\ -z/1.5, & -1.5 \leq z \leq 0, \\ 0, & z > 0, \end{cases}$$

$$F_j^2(z) = \begin{cases} (z+1.5)/1.5, & -1.5 \leq z \leq 0, \\ (1.5-z)/1.5, & 0 < z \leq 1.5, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$$F_j^3(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ z/1.5, & 0 \leq z \leq 1.5, \\ 1, & z > 1.5. \end{cases}$$

由上述模糊集合形式不难计算出参数 $\delta = 0.25$, $\gamma = 0.5$. 采用定理2, 在MATLAB下利用LMI工具箱可以求出如下所有操作域上相应的反馈增益, 这里给出 S_1 上对应的反馈增益:

$$K_{11} = [17.2795, 6.4487],$$

$$K_{21} = [12.4710, 6.6307],$$

$$K_{31} = [6.2063, 5.5754],$$

$$K_{41} = [6.1262, 5.3683].$$

在实验中本文分别就初始条件 $x_0 = [2, -1.5]$ 和 $x_0 = [1.5, 1.5]$ 进行了仿真实验, 图3和图4是相应的响应曲线, 从两个图中可以看出, 系统是稳定的. 这里需要补充说明的是模糊系统的稳定性不一定能保证原系统稳定性, 但目前已有研究证明模糊系统对原系统具有一定的逼近性能, 因此这也是一种有效的方法.

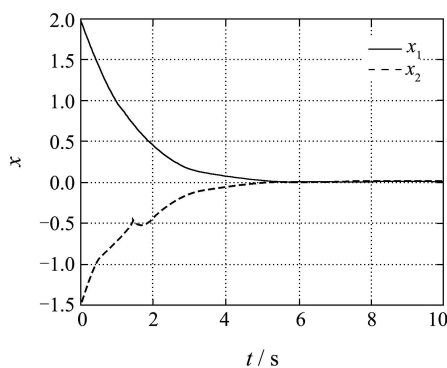


图3 初始条件 $x_0 = [2, -1.5]^T$ 下系统状态的响应曲线

Fig. 3 The state response of system with the initial condition $x_0 = [2, -1.5]^T$

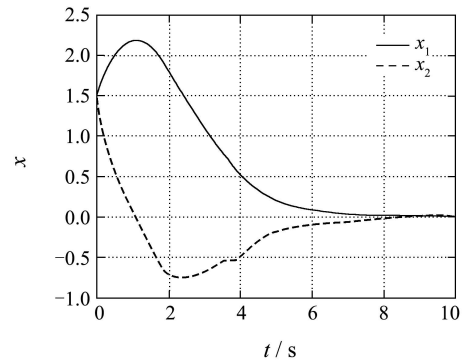


图4 初始条件 $x_0 = [1.5, 1.5]^T$ 下系统状态的响应曲线

Fig. 4 The state response of system with the initial condition $x_0 = [1.5, 1.5]^T$

5 结论(Conclusion)

本文讨论了T-S模糊控制系统的稳定性和控制器设计问题. 为使控制系统的稳定性条件保守性更低, 一方面本文的稳定性条件中充分利用了模糊划分的一些信息, 另一方面针对不同的操作域给出不同的PDC结构的控制策略. 为此本文给出了一种模糊规则输入空间新的划分策略. 并研究了在这种划分下模糊模型在各个操作域上的性质. 用分段可微二次Lyapunov稳定性方法, 获得了保守性更低的稳定性充分条件, 然后将稳定性条件转化为关于反馈增益的线性矩阵不等式, 从而获得了判别稳定模糊控制系统的充分条件, 最后得到了设计模糊控制器保守性更低的充分条件.

参考文献(References):

- [1] TAKAGI T, SUGENO M. Fuzzy identification of systems and its application to modeling and control[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 1985, 15(1): 116 – 132.
- [2] WANG H O, TANAKA K, GRIFFIN M. An analytical framework of fuzzy modeling and control of nonlinear systems: stability and design issues[C] // *Proceedings of the 1995 American Control Conference*. Evanston, IL: American Automatic Control Council, 1995, 3: 2272 – 2276.
- [3] TANAKA K, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 – 156.
- [4] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: Relaxed stability condition and LMI-based design[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1998, 6(2): 250 – 256.
- [5] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. A unified approach to controlling chaos via LMI-based fuzzy control system design[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental Theory and Application*, 1998, 45(10): 1021 – 1040.
- [6] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. An LMI approach to fuzzy controller designs based on the relaxed stability conditions[C] // *Proceedings of the 6th IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Barcelona Spain: IEEE, 1997, 1: 171 – 176.
- [7] KIM E, LEE H. New approaches to relaxed quadratic stability condition of fuzzy control systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(5): 523 – 534.

- [8] LIU X D, ZHANG Q L. New approaches to H_∞ controller designs based on fuzzy observers for T-S fuzzy systems via LMI[J]. *Automatica*, 2003, 39(9): 1571 – 1582.
- [9] CAO S G, REES N W, FENG G. Quadratic stability analysis and design of continuous-time fuzzy control systems[J]. *System Science*, 1996, 27(2): 193 – 203.
- [10] CAO S G, REES N W, FENG G. Further results about quadratic stability of continuous-time fuzzy control systems[J]. *System Science*, 1997, 28(4): 397 – 404.
- [11] JOHANSSON M, RANTZER A, ARZEN K E. Piecewise quadratic stability of fuzzy systems[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1999, 7(6): 713 – 722.
- [12] ZHANG J M, LI P A, ZHANG P A. Stability analysis and systematic design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2001, 121(1): 65 – 67.
- [13] ANTONIO S, CARLOS A. Relaxed stability and performance conditions for Takagi-Sugeno fuzzy systems with knowledge on membership function overlap[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*, 2007, 37(3): 727 – 732.
- [14] 张大庆, 张庆灵, 胡跃冰. T-S模糊系统稳定性的一个新的充分条件[J]. 自动化学报, 2007, 33(2): 222 – 224.
(ZHANG Daqing, ZHANG Qingling, HU Yuebing. A new sufficient condition on the stability of T-S fuzzy systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(2): 222 – 224.)
- [15] XIU Z H, REN G. Stability analysis and systematic design of Takagi-Sugeno fuzzy control systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 151(1): 119 – 138.
- [16] 孙予明, 纪志成. 采用PQLF的不确定模糊系统最优保性能控制[J]. 南京航空航天大学学报, 2007, 39(5): 616 – 621.
(SUN Yuming, JI Zhicheng. Optimal guaranteed cost control for uncertain fuzzy systems based on piecewise quadratic Lyapunov function[J]. *Journal of Nanjing University of Aeronautics & Astronautics*, 2007, 39(5): 616 – 621.)
- [17] 纪志成, 朱芸, 王艳. 基于分段模糊Lyapunov方法的T-S模糊系统 H_∞ 控制[J]. 控制与决策, 2007, 22(12): 1357 – 1362.
(JI Zhicheng, ZHU Yun, WANG Yan. H_∞ control for T-S fuzzy system based on piecewise fuzzy Lyapunov approach[J]. *Control and Decision*, 2007, 22(12): 1357 – 1362.)
- [18] 孙予明, 纪志成. 基于分段模糊Lyapunov函数的模糊系统分析与设计[J]. 系统仿真学报, 2008, 20(3): 706 – 711.
(SUN Yuming, JI Zhicheng. Analysis and design of fuzzy systems based on piecewise fuzzy Lyapunov function[J]. *Journal of System Simulation*, 2008, 20(3): 706 – 711.)
- [19] BODY S, GHAOUI L, FERON E, et al. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*[M]. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [20] MARCELO C M, TEIXEIRA, STANISLAW H Z. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear system using fuzzy models[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 1999, 7(2): 133 – 142.

作者简介:

苗志宏(1964—), 男, 教授, 主要研究方向为模糊控制、鲁棒控制, E-mail: miaozhh@21cn.com;

李洪兴(1953—), 男, 教授, 博士生导师, 主要研究方向为模糊系统、智能控制、知识表示与数据挖掘等, E-mail: lihx@dlut.edu.cn.