

基于向量图分析的分布参数系统迭代学习控制

戴喜生, 田森平

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 针对一类不确定线性分布参数系统的迭代学习控制问题进行了讨论, 基于向量图分析方法, 提出了分布参数系统的一种新的迭代学习控制算法, 该算法与现有算法不同, 具有非线性形式. 此外, 利用 $(L^2, \lambda(\xi))$ 范数对所提算法进行了完整的收敛性分析.

关键词: 分布参数系统; 迭代学习控制; 向量图分析

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Iterative learning control of distributed parameter system based on vector plots analysis

Dai Xisheng, Tian Senping

(College of Automation Science and Technology, South China University of Technology,
Guangzhou Guangdong 510640, China)

Abstract: An iterative learning control problem for distributed parameter systems is discussed. Based on vector plots analysis, a new iterative learning control algorithm is proposed, which is different from the present algorithms and has the form of nonlinear. Furthermore, convergence analysis is given completely to new algorithm. by employing $(L^2, \lambda(\xi))$ -norm.

Key words: distributed parameter system; iterative learning control; vector plots analysis;

1 引言(Introduction)

迭代学习控制算法自Arimoto等人^[1]于1984年提出以来便受到人们的重视, 现已成为热门的研究课题, 已发表许多研究成果^[2-6]. 然而, 现有关于迭代学习控制的研究大多是针对能用常微分方程描述的系统进行的. 但在实际工程中, 分布参数系统及其控制问题有着广泛的应用^[7-8], 如弹性振动系统的控制, 温度场的控制, 核反应堆的控制, 带柔性连杆的机器人等系统通常要用偏微分方程或偏微分-积分方程所代表的分布参数系统来描述, 而且对该类系统的控制问题的研究也很多. 到目前为止, 将迭代学习控制方法应用于分布参数系统的研究成果不多, 文献^[9-10]分别针对线性和非线性分布参数系统的迭代学习控制算法进行探讨, 提出了线性的迭代学习控制算法.

本文基于文献^[11-12]中的向量图分析思想, 研究了一类不确定线性分布参数系统的迭代学习控制问题, 给出了带有自适应调节因子的非线性迭代学习控制算法, 进一步, 考虑到分布参数系统是无穷维

系统的特点, 不同于有限维系统, 从而利用文献^[4]中采用的 $(L^2, \lambda(\xi))$ 范数, 证明了新算法的收敛性.

2 问题描述及新算法(Problem statement and new algorithm)

考虑如下形式的不确定线性分布参数系统

$$\begin{cases} \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = D\Delta Q(x, t) + A(t)Q(x, t) + B(t)u(x, t), \\ y(t) = C(t)Q(x, t) + G(t)u(x, t). \end{cases} \quad (1)$$

其中 $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$, $Q \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^l$, $D, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{l \times n}$, $G \in \mathbb{R}^{l \times m}$. A, B, C 是不确定的有界矩阵, D 是正的有界对角矩阵, 即 $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $0 < p_i \leq d_i < \infty (i = 1, 2, \dots, n)$, p_i 是已知的. $\Delta = \sum_{i=1}^k \frac{\partial}{\partial x_i}$ 是区域 Ω 上的 Laplace 算子, 而 Ω 是 $\mathbb{R}^q$ 中有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界开子集.

系统(1) 相应的边界条件为

$$\alpha Q(x, t) + \beta \frac{\partial Q(x, t)}{\partial \nu} = 0, (x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^+, \quad (2)$$

$$Q(x, 0) = Q_0(x), x \in \Omega, \quad (3)$$

其中, $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \alpha_i \geq 0, \beta = \text{diag}(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n); \beta_i > 0. \frac{\partial}{\partial \nu}$ 是区域边界 $\partial\Omega$ 上的外法向导数. 对由系统(1)描述的被控对象, 我们所期望的理想输出是 $y_d(x, t)$. 现在的问题是要寻求与之相对应的理想输入 $u_d(x, t)$, 使得系统对应的实际输出

$$y^*(x, t) = C(t)Q_d(x, t) + G(t)u_d(x, t)$$

对应于理想输出 $y_d(x, t)$. 由于系统的不确定性, 对理想控制不易求得, 我们将通过学习控制的方法来逐步寻找控制输入序列 $\{u_k(x, t)\}$, 使得 $u_k(x, t) \rightarrow u_d(x, t)$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时. 寻找控制输入序列 $\{u_k(x, t)\}$, 最基本的P-型迭代学习控制算法为:

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \Gamma(t)e_k(x, t). \quad (4)$$

其中, $e_k(x, t) = y_d(x, t) - y_k(x, t)$.

向量图分析的基本思想是: 要使一个序列较快的趋近于0, 只需这个序列所对应向量的模快速的变小并趋于0即可. 为此, 记 $\hat{u}_k(x, t) = u_k(x, t) - u_d(x, t)$, 则(4)式可改写为:

$$\hat{u}_{k+1}(x, t) = \hat{u}_k(x, t) + \Gamma(t)e_k(x, t) \quad (5)$$

此时有 $u_k(x, t) \rightarrow 0$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时. 将式中各项看成向量, 可得到如图所示的向量图:

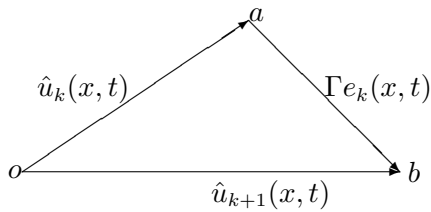


图1 向量分析图

Fig. 1 Graph of vector analysis

类似于文献^[12]的分析, 可得如下迭代学习算法

$$u_{k+1}(x, t) = u_k(x, t) + \Gamma(t) \cdot \frac{(e_k(x, t) - \sigma \frac{(\Gamma(t)e_{k-1}(x, t))^T \Gamma(t)e_k(x, t)}{\|\Gamma(t)e_{k-1}(x, t)\|^2} e_{k-1}(x, t))}{\quad} \quad (6)$$

其中, $t \in [0, T], \sigma = a(1 - e^{-b\|e_k(x, t)\|}), (a, b) \in (0, 1) \times [0, +\infty)$ 为可调常数. 它们决定自适应因子 σ 随误差变化的情况, 由于 $(a, b) \in (0, 1) \times [0, +\infty)$, 则 $\sigma \in (0, 1)$. 而 $y_k(x, t)$ 是系统(1)相应于第 k 次输入 $u_k(x, t)$ 的第 k 次输出, $\Gamma(t)$ 是待寻的学习过程中的增益矩阵.

我们假设在学习过程中, 系统的状态都从相同的

初值开始, 即

$$Q_k(x, 0) = Q_0(x), x \in \Omega, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (7)$$

或更一般的

$$Q_k(x, 0) = \varphi_k(x), x \in \Omega, k = 1, 2, 3, \dots, \quad (8)$$

$$\|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\|_{L^2}^2 \leq lr^k, r \in [0, 1), l > 0. \quad (9)$$

3 新算法的收敛性分析(Convergence analysis of the new algorithm)

在下面的讨论中采用如下范数记号:

$$\|e_k(x, t)\|_{(L^2, \lambda(\xi))} = \sup_{0 \leq t \leq T} \{(\|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 e^{-\lambda t})^{\xi^k}\}.$$

引理 1 若 $\rho, \sigma, r \in (0, 1)$, 且对正常数 d, l 有如下不等式成立

$$\frac{dl\rho\sigma}{1-\rho} < 1$$

则存在 $\xi > 1$ 及适当的正数 λ , 使得对正常数 c, d , 有 $F(\lambda, \xi) \in (0, 1)$, 其中

$$F(\lambda, \xi) = \frac{\xi\rho}{1-\xi\rho} \left(\frac{\xi c d l (1+\sigma)^2}{\lambda-d} + \sigma \xi d l \right) \quad (10)$$

进一步, 如果 $\rho + r < 1$, 还可以使 $\xi(\rho + r) < 1$.

证明: 由实数连续性知, 对 $\rho, \sigma \in (0, 1)$, 可选取 $\xi_1 < 1$, 使得 $\xi \in (1, \xi_1)$ 时, 有 $\rho\xi, \sigma\xi \in (0, 1)$. 同理, 由 $\frac{dl\rho\sigma}{1-\rho} < 1$ 知, 存在 $\eta > 0$, 使得 $\frac{dl\rho\sigma}{1-\rho} + \eta < 1$. 记

$$g(x) = dl \frac{(\rho x)(\sigma x)}{1-\rho x} + \eta$$

显然 $g(x)$ 于 $[1, \xi_1]$ 上是连续的, 且 $g(1) < 1$, 则存在 $\xi_2 > 1$, 使得对 $x \in (1, \xi_2)$ 有 $g(x) < 1$. 另外, 由 $\rho + r < 1$ 可知存在 $\xi_3 > 1$ 使得 $\xi_3(\rho + r) < 1$, 取 $\xi_4 = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$, 从而对 $\xi \in (1, \xi_4)$, 有 $\xi(\rho + r) < 1, \rho\xi, \sigma\xi \in (0, 1)$ 且 $g(x) < 1$. 对上面的 $\eta > 0$ 再选取适当的正数 λ , 使得 $\lambda > a$, 且

$$\frac{\rho\xi}{1-\rho\xi} \cdot \frac{\xi c a l (1+\sigma)^2}{\lambda} < \eta$$

从而对如上所选取的 λ, ξ 有

$$F(\lambda, \xi) < \eta + dl \frac{(\rho x)(\sigma x)}{1-\rho x} = g(x) < 1$$

证毕.

下面是本文的主要结果

定理 1 若算法(6)中的参数 σ 及增益矩阵 $\Gamma(t)$ 满足:

$$1) \|I - G(t)\Gamma(t)\|^2 \leq \rho \in [0, 1), 3\rho + r < 1,$$

$$2) \frac{9\rho\sigma b_G b_\Gamma}{1-3\rho} < 1.$$

则由式(6)所确定的算法在 $[0, T]$ 上一致收敛, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(x, t)\|_{L^2} = 0, \forall t \in [0, T].$$

其中,

$$b_\Gamma = \max_{0 \leq t \leq T} \|\Gamma(t)\|^2, \lambda_G = \max_{0 \leq t \leq T} \|G(t)\|^2$$

证明: 由算法(6),可得

$$\begin{aligned} e_{k+1}(x, t) &= e_k(x, t) - y_{k+1}(x, t) + y_k(x, t) \\ &= e_k(x, t) - G(t)(u_{k+1}(x, t) - u_k(x, t)) - \\ &\quad C(t)(Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t)) \\ &= (I - G(t)\Gamma(t))e_k(x, t) - C(t) \cdot \\ &\quad (Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t)) + \sigma G(t)\Gamma(t) \cdot \\ &\quad \frac{(\Gamma(t)e_{k-1}(x, t))^T \Gamma(t)e_k(x, t)}{\|\Gamma(t)e_{k-1}(x, t)\|^2} e_{k-1}(x, t) \\ &= \bar{e}_k(x, t) + \bar{C}_k(x, t) + \bar{G}_k(x, t) \end{aligned}$$

其中

$$\bar{e}_k(x, t) = (I - G(t)\Gamma(t))e_k(x, t), \quad (11)$$

$$\bar{C}_k(x, t) = -C(t)(Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t)), \quad (12)$$

$$\bar{G}_k(x, t) = \sigma G(t)\Gamma(t) \cdot$$

$$\frac{(\Gamma(t)e_{k-1}(x, t))^T \Gamma(t)e_k(x, t)}{\|\Gamma(t)e_{k-1}(x, t)\|^2} e_{k-1}(x, t) \quad (13)$$

因此由

$$\begin{aligned} e_{k+1}^T(x, t)e_{k+1}(x, t) &= \\ &(\bar{e}_k^T(x, t) + \bar{C}_k^T(x, t) + \bar{G}_k^T(x, t)) \cdot \\ &(\bar{e}_k(x, t) + \bar{C}_k(x, t) + \bar{G}_k(x, t)) \\ &\leq 3(\bar{e}_k^T(x, t)\bar{e}_k(x, t) + \bar{C}_k^T(x, t)\bar{C}_k(x, t) + \\ &\quad \bar{G}_k^T(x, t)\bar{G}_k(x, t)) \end{aligned}$$

及(11),(12),(13)式及定理条件(1)可得:

$$\begin{aligned} \|e_{k+1}(x, t)\|^2 &\leq 3\rho\|e_k(x, t)\|^2 + \\ &3b_c\|\bar{Q}_k(x, t)\|^2 + \\ &3\sigma b_G b_\Gamma \|e_k(x, t)\|^2. \end{aligned} \quad (14)$$

这里定义

$$\begin{aligned} \bar{Q}_k(x, t) &= Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t), \\ b_C &= \max_{0 \leq t \leq T} \{ \|C(t)\|^2 \}. \end{aligned}$$

对(14)式两边关于 x 在 Ω 上积分,得

$$\begin{aligned} \|e(\cdot, t)_{k+1}\|_{L^2}^2 &\leq 3\rho\|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + 3b_c\|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \\ &3\sigma b_G b_\Gamma \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (15)$$

从上式可知,要估计 $\|e(\cdot, t)_{k+1}\|_{L^2}^2$,应先估计 $\|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2$, 因为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t))}{\partial t} &= \\ D\Delta(Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t)) &+ \\ A(t)(Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t)) &+ \\ B(t)(u_{k+1} - u_k(x, t)) & \end{aligned}$$

用 $(Q_{k+1}(x, t) - Q_k(x, t))^T$ 左乘上式两边有:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{Q}_k^T(x, t)\bar{Q}_k(x, t)}{\partial t} &= Q_k^T(x, t)D\bar{Q}_k(x, t) + \\ \bar{Q}_k^T(x, t)A(t)\bar{Q}_k(x, t) &+ \bar{Q}_k^T(x, t)B(t)\bar{Q}_k(x, t) \end{aligned}$$

上式两边关于 x 在 Ω 上积分,并利用Green公式可得:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2) &= 2 \int_{\Omega} \bar{Q}_k^T(x, t)D\Delta\bar{Q}_k(x, t)dx + \\ 2 \int_{\Omega} \bar{Q}_k^T(x, t)(A^T + A(t))\bar{Q}_k(x, t)dx &+ \\ 2 \int_{\Omega} \bar{Q}_k^T(x, t)B(t)\bar{u}_k(x, t)dx &\leq \\ \int_{\partial\Omega} Q_k^T(x, t)D\Delta\bar{Q}_k(x, t)dS &- \\ 2 \int_{\Omega} \bar{Q}_k^T(x, t)D\Delta\bar{Q}_k(x, t)dx &+ \\ \lambda_{\max}(A^T + A(t))\|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 &+ \\ \lambda_{\max}(B(t))(\|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \|\bar{u}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2). \end{aligned}$$

记 $d = \min\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$,由于

$$\begin{aligned} \bar{Q}_k^T(x, t)D\bar{Q}_k(x, t)|_{x \in \partial\Omega} &= \\ \bar{Q}_k^T(x, t)D(-\beta^{-1}\alpha\bar{Q}_k(x, t))|_{x \in \partial\Omega} &\leq 0, \end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2) &\leq -2(\|\Delta\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \\ \bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + g\bar{u}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2) \end{aligned} \quad (16)$$

这里

$$\begin{aligned} g &= \max_{0 \leq t \leq T} (\lambda_{\max}(b(t))), \\ h &= \max_{0 \leq t \leq T} (\lambda_{\max}(A^T + A(t)) + \lambda_{\max}(B(t))) \end{aligned}$$

因此,对式(16)两边关于 t 积分,再由Bellman-Gronwall不等式得

$$\begin{aligned} \|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 &\leq \bar{Q}_k(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 e^{ht} - \\ 2d \int_0^t e^{h(t-s)} \|\Delta\bar{Q}_k(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds &+ \\ g \int_0^t e^{h(t-s)} \|\bar{u}_k(\cdot, s)\|_{L^2}^2 ds \end{aligned}$$

选择适当的 λ ,使 $\lambda > h$,用 $e^{-\lambda t}$ 乘上面不等式两边,有

$$\|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 e^{-\lambda t} \leq \bar{Q}_k(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 e^{-(\lambda-h)t} -$$

$$\begin{aligned}
& 2d \int_0^t e^{-(\lambda-h)(t-s)} \|\Delta \bar{Q}_k(\cdot, s)\|_{L^2}^2 e^{-\lambda s} ds + \\
& g \int_0^t e^{-(\lambda-h)(t-s)} \|\bar{u}_k(\cdot, s)\|_{L^2}^2 e^{-\lambda s} ds \\
& \leq \|\bar{Q}_k(\cdot, 0)\|_{L^2}^2 + g \cdot \\
& \|u_{k+1} - u_k\|_{(L^2, \lambda)} \int_0^t e^{-(\lambda-h)(t-s)} ds \\
& \leq lr^k + \frac{g}{\lambda - h} \|u_{k+1} - u_k\|_{(L^2, \lambda)}
\end{aligned}$$

由式(6),有

$$\|u_{k+1}(x, t) - u_k(x, t)\| \leq (1 + \sigma) \|\Gamma(t)e_k(x, t)\|$$

于是

$$\|u_{k+1} - u_k\|_{(L^2, \lambda)} \leq (1 + \sigma)^2 b_\Gamma \|e_k\|_{(L^2, \lambda)}$$

所以

$$\|\bar{Q}_k\|_{L^2, \lambda} \leq lr^k + \frac{g}{\lambda - h} (1 + \sigma)^2 b_\Gamma \|e_k\|_{(L^2, \lambda)} \quad (17)$$

由(15)式得到

$$\begin{aligned}
& \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq (3\rho)^k \|e_0(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \\
& \sum_{i=1}^{k-1} (3\rho)^{k-i-1} (3b_C \|\bar{Q}_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 + \\
& 3\sigma b_G b_\Gamma \|e_i(\cdot, t)\|_{L^2}^2) \quad (18)
\end{aligned}$$

再在不等式(18)两边同乘 ξ^k ($\xi > 1$ 待定)和 $e^{-\lambda t}$, 并将(17)式代入(18)式中就有:

$$\begin{aligned}
& (\|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \xi^k) e^{-\lambda t} \leq (3\rho \xi)^k \|e_0(\cdot, t)\|_{L^2}^2 e^{-\lambda t} + \\
& \sum_{i=1}^{k-1} (3\rho \xi)^{k-i-1} \xi (3b_C l(\xi r)^i + \\
& \frac{3b_C g}{\lambda - h} (1 + \sigma)^2 b_\Gamma \|e_i\|_{(L^2, \lambda(\xi))} + \\
& 3\sigma b_G b_\Gamma \|e_i\|_{(L^2, \lambda(\xi))}) \quad (19)
\end{aligned}$$

这样,只要前面选择的 λ 充分大,利用定理的条件(2),由引理1可知,存在 $\xi_1 > 1$ 使得 $F(\lambda, \xi) < 1$,且 $\xi_1(3\rho + r) < 1$,并将前面待定的 ξ_1 取为这里的 ξ ,也即 $F(\lambda, \xi_1) = F(\lambda, \xi)$,注意这里:

$$F(\xi, \lambda) = \frac{3\xi\rho}{1 - 3\xi\rho} \left(\frac{3\xi g b_C b_\Gamma (1 + \sigma)^2}{\lambda - h} + 3\xi \sigma b_G b_\Gamma \right)$$

从而由(19)得到下面的不等式:

$$\begin{aligned}
& \|e_k\|_{(L^2, \lambda(\xi))} \leq \|e_0\|_{(L^2, \lambda)} + 3b_C l \xi (\xi(3\rho + r))^{k-1} + \\
& F(\xi, \lambda) \sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(L^2, \lambda(\xi))} \\
& \leq \|e_0\|_{(L^2, \lambda)} + 3b_C l \xi + \\
& F(\xi, \lambda) \sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(L^2, \lambda(\xi))}
\end{aligned}$$

经简单计算可得

$$\sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(L^2, \lambda(\xi))} \leq \frac{\|e_0\|_{(L^2, \lambda(\xi))} + 3b_C l \xi}{1 - F(\xi, \lambda)}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2}^2 \leq \xi^{-k} e^{-\lambda t} \sup_{1 \leq i \leq k} \|e_i\|_{(L^2, \lambda(\xi))} \\
& \leq \xi^{-k} e^{-\lambda t} \frac{\|e_0\|_{(L^2, \lambda)} + 3b_C l \xi}{1 - F(\xi, \lambda)} \quad (20)
\end{aligned}$$

最后由于 $\xi > 1$,便得到我们所需要的结果:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k(\cdot, t)\|_{L^2} = 0, t \in [0, T].$$

证毕.

关于 $\{u_k(x, t)\}$ 的一致收敛性证明不难由前面的证明推出, 此处省略.

4 结论(Conclusions)

本文讨论了工程实际中有广泛应用的分布参数系统的迭代学习控制问题, 利用向量图分析的方法, 得到了分布参数新的迭代学习控制算法, 新算法具有非线性形式. 本文的研究既是对迭代学习方法应用于分布参数系统的探索, 同时也可丰富基于向量图分析的迭代学习控制方法. 本文没有对所提非线性学习算法进行收敛速度分析, 因此下一步将研究在分布参数系统中迭代学习控制的收敛速度问题, 也是一个很有挑战性的课题.

参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Bettering operation of robotics by learning[J]. *J Robot Syst*, 1984, 12(2): 123 - 140.
- [2] 林辉, 王林. 迭代学习控制理论[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1998.
(LIN Hui, WANG Lin, Iterative learning control[M]. Xi'an: North-western Polytechnical University Press, 1998.)
- [3] 孙明轩, 黄宝键. 迭代学习控制[M]. 北京: 国防工业出版社, 1999.
(SUN Mingxuan, HUANG Baojian. Iterative learning control[M]. Beijing: National Defence Industry Press, 1999.)
- [4] 谢胜利, 田森平, 谢振东. 迭代学习控制的理论与应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(XIE Shengli, TIAN Senping, XIE Zhendong, Theory and Application of Iterative learning control[M]. Beijing: Science Press, 2005.)
- [5] 孙明轩, 何熊熊, 俞立. 迭代学习控制器设计: 一种有限时间死区方法[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(3): 349-355.
(SUN Mingxuan, HE Xiongxiang, YU Li. Iterative learning controller designs: a finite time dead-zone approach[J]. *Control Theory & Application*, 2007, 24(3): 349-355.)
- [6] Chi Ronghu, Hou Zhongsheng. Dual-stage optimal iterative learning control for nonlinear non-affine discrete-time system[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2007, 33(10): 1061-1065.
- [7] 王康宁. 分布参数控制系统[M]. 北京: 科学出版社, 1986
(WANG Kanling. Distribute Parameter Control System[M]. Beijing: Science Press, 1986.)
- [8] 樊晓平, 徐建闽, 周其节, 梁天培. 柔性机器人的动力学建模及控制[J]. 控制理论与应用, 1997, 14(3): 318-335.
(FAN Xiaoping, XU Jianming, ZHOU Qijie, LIANG Tianpei. Dynamic

- modeling and control of flexible manipulators[J]. *Control Theory & Application*, 1997, 14(3):318-335.)
- [9] 谢振东, 刘永清. 分布参数系统目标跟踪的二阶P-型学习算法. 暨南大学学报, 1998, 19(1):60-64.
(XIE Zhendong, LIU Yongqing. Two order P-type learning control algorithm of distributed parameter systems[J]. *Journal of Jinnan University*, 1998, 19(1):60-64.)
- [10] 谢胜利, 谢振东, 韦岗. 非线性分布参数系统目标跟踪的学习控制算法[J]. 自动化学报, 1999, 25(5): 627 – 632.
(XIE Shengli, XIE Zhendong, WEI Gang. Learning algorithm for tracking control of nonlinear distributed parameter systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 1999, 25(5): 627 – 632.)
- [11] 田森平, 谢胜利, 谢振东. 一类基于几何分析的迭代学习控制新算法[J]. 控制与决策, 2004, 19(9):1038-1041.
(TIAN Senping, XIE Shengli, XIE Zhendong. Iterative learning control algorithm based on geometric analysis[J]. *Control and Decision*, 2004, 19(9):1038-1041.)
- [12] XIE Shengli, TIAN Senping, XIE Zhendong. New Iterative learning control algorithms based on vector plots analysis[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2004, 30(2):161-168.

作者简介:

戴喜生 (1976—), 男, 华南理工大学自动化科学与工程学院博士研究生, 目前感兴趣的研究方向为迭代学习控制与随机控制, E-mail: mathdxs@163.com;

田森平 (1961—), 男, 现为华南理工大学自动化科学与工程学院副教授, 目前感兴趣的研究方向是非线性系统的迭代学习控制理论与算法, E-mail: ausptian@scut.edu.cn.