

具有漏泄时滞的高阶细胞神经网络的多周期性分析

盛立, 杨慧中, 楼旭阳

(江南大学 通信与控制工程学院, 江苏 无锡 214122)

摘要: 分析了一类具有漏泄时滞的高阶细胞神经网络的多周期性和指数收敛性. 给出了保证此类网络的周期环在饱和区内局部指数收敛的充分条件. 所得结果表明, 一个 n 维网络可以有 2^n 个周期环存在于饱和区, 而且这些周期环是局部指数收敛的. 仿真实例进一步证明了结论的有效性.

关键词: 高阶细胞神经网络; 局部指数收敛; 多周期性; 漏泄时滞

中图分类号: TP183

文献标识码: A

Multiperiodicity analysis of higher-order cellular neural networks with leakage time-lags

SHENG Li, YANG Hui-zhong, LOU Xu-yang

(School of Communication and Control Engineering, Jiangnan University, Wuxi Jiangsu 214122, China)

Abstract: The multiperiodicity and the exponential convergence of a class of higher-order cellular neural networks with leakage time-lags are analyzed. A sufficient condition for guaranteeing periodic orbits of this kind of networks to be locally exponentially convergent in saturation regions is obtained. The results show that an n -dimensional neural network can have 2^n periodic orbits located in saturation regions, and these periodic orbits are locally exponentially convergent. The simulation example shows the effectiveness of the results.

Key words: higher-order cellular neural networks; local exponential convergent; multiperiodicity; leakage time-lags

1 引言(Introduction)

自从L.O.Chua等^[1]首次提出细胞神经网络(CNNs)理论与应用以来, CNNs已经成功地用于信号处理和图像处理等问题. 由于在信号放大器的设计中, 时滞不可避免, 而时滞扰动可能导致系统不稳定或振动, 因此时滞细胞神经网络(DCNNs)的稳定性研究引起了广泛的重视.

然而, 目前大部分关于神经网络稳定性的研究都是围绕单稳定性展开的. 但单稳定网络不能处理重要的神经计算, 如决策选择等问题, 因此应用方面受到诸多限制. 最近, Nie等^[2], Zeng等^[3], Huang等^[4,5]重点研究了各类神经网络的多稳定性问题, 并提出一些创新性结果. 除稳定性之外, 一个激励状态可能围绕一个轨道周期振荡, 在这种情况下收敛子就是一个极限环. 文献[6]指出, 这种极限环可以通过存储模式应用到联想记忆中. 因为一个平衡点可以看成具有任意周期振荡的特殊形式, 所以神经网络的周期性研究比稳定性研究更具有概括

性. Cao等^[7]研究了一类带有特殊激励函数的Cohen-Grossberg神经网络, 讨论了该系统的多稳定性与多周期性.

近年来, 由于高阶神经网络在网络的逼近能力、收敛速度、存储水平和容错能力等多方面较之一阶神经网络具有更强的功能, 因而高阶神经网络的研究愈来愈受到人们的重视^[8]. 另外, 时滞神经网络的稳定化负反馈项往往瞬间表现出来, 这些项通常称为“遗忘项”或“漏泄项”^[9]. 文献[10]指出, 在稳定化负反馈项中的时滞可能会导致一个系统的不稳定. 因此, 研究具有漏泄时滞的高阶细胞神经网络模型的多周期性和多稳定性具有重要的意义.

本文初步探讨了一类具有漏泄时滞的高阶细胞神经网络(HOCNNs)模型的多周期性和多稳定性问题. 利用细胞神经网络激励函数的特性, 对该网络在饱和区周期解的局部指数收敛性进行了分析, 并给出了一些充分性的判据.

2 系统描述与准备工作(System description and preliminaries)

考虑带漏泄时滞的高阶细胞神经网络如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} = & -x_i(t - \tau_i(t)) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \\ & \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \times \\ & f_j(x_j(t - \tau_j(t))) f_k(x_k(t - \tau_k(t))) + \\ & u_i(t), i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $x_i(t)$ 表示第 i 个神经元状态; a_{ij} 和 b_{ij} 为网络的一阶连接权重; c_{ijk} 为网络的二阶连接权重; $u_i(t)$ 表示第 i 个具有 ω 周期的外部输入变量; $\tau_i(t)$ 为变时滞且满足 $0 \leq \tau_i(t) \leq \tau < +\infty$; $f(\cdot)$ 是细胞神经网络的激励函数, 定义为 $f(y) = \frac{1}{2}(|y+1| - |y-1|)$.

定义 $\mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta)$ 为 $[t_0 - \tau, t_0] \rightarrow \Theta \in \mathbb{R}^n$ 映射的连续函数空间, 其范数为

$$\|\phi\|_{t_0} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sup_{s \in [t_0 - \tau, t_0]} |\phi_i(s)| \right\},$$

其中 $\phi(s) = (\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s))^T$. 设

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$$

为向量 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 的向量范数.

对于任意 $\phi, \varphi \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta)$, 其中

$$\begin{aligned} \phi(s) &= (\phi_1(s), \phi_2(s), \dots, \phi_n(s))^T, \\ \varphi(s) &= (\varphi_1(s), \varphi_2(s), \dots, \varphi_n(s))^T. \end{aligned}$$

令

$$\|\phi, \varphi\|_{t_0} = \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sup_{s \in [t_0 - \tau, t_0]} |\phi_i(s) - \varphi_i(s)| \right\}$$

作为一个在 $\mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta)$ 上的测度.

定义

$$\begin{aligned} (-\infty, -1) &= (-\infty, -1)^1 \times [-1, 1]^0 \times (1, +\infty)^0, \\ [-1, 1] &= (-\infty, -1)^0 \times [-1, 1]^1 \times (1, +\infty)^0, \\ (1, +\infty) &= (-\infty, -1)^0 \times [-1, 1]^0 \times (1, +\infty)^1, \\ \mathbb{R} &= (-\infty, +\infty) = (-\infty, -1) \cup [-1, 1] \cup (1, +\infty), \end{aligned}$$

则 $(-\infty, +\infty)^n$ 可以分为 3^n 个子空间:

$$\begin{aligned} \Omega = & \left\{ \prod_{i=1}^n (-\infty, -1)^{\delta_1^{(i)}} \times [-1, 1]^{\delta_2^{(i)}} \times (1, +\infty)^{\delta_3^{(i)}}, \right. \\ & (\delta_1^{(i)}, \delta_2^{(i)}, \delta_3^{(i)}) = (1, 0, 0) \text{ 或者 } (0, 1, 0) \text{ 或者 } \\ & \left. (0, 0, 1), i = 1, 2, \dots, n. \right\}. \end{aligned} \quad (2)$$

另外, Ω 也可以分为 3 个子空间:

$$\Omega_1 = \{[-1, 1]^n\},$$

$$\Omega_2 = \left\{ \prod_{i=1}^n (-\infty, -1)^{\delta^{(i)}} \times (1, +\infty)^{1-\delta^{(i)}}, \right.$$

$$\delta^{(i)} = 1 \text{ or } 0, i = 1, 2, \dots, n\},$$

$$\Omega_3 = \Omega - \Omega_1 - \Omega_2.$$

因此, Ω_1 由 1 个区域构成, Ω_2 由 2^n 个区域构成, Ω_3 由 $3^n - 2^n - 1$ 个区域构成.

定义 1 如果 $x^*(t)$ 是 HOCNN(1) 的一个孤立的周期轨迹, 则称 $x^*(t)$ 是该 HOCNN 的周期环, 即存在 $\omega > 0$ 使得 $\forall t \geq t_0, x^*(t + \omega) = x^*(t)$, 且存在 $\xi > 0$ 使得

$$\forall \bar{x} \in \{x | 0 < \|x, x^*(t)\| < \xi, x \in \mathbb{R}^n, t \geq t_0\},$$

其中 $\bar{x}$ 不是 HOCNN(1) 的任意周期轨迹上的点.

定义 2 HOCNN(1) 的一个周期环 $x^*(t)$ 在区域 Υ 中是局部指数收敛的, 如果存在常数 $\alpha > 0, \beta > 0$ 使得

$$\|x(t; t_0, \phi) - x^*(t)\| \leq \beta \|\phi\|_{t_0} e^{-\alpha(t-t_0)}, \forall t \geq t_0,$$

其中 $x(t; t_0, \phi)$ 是 HOCNN(1) 在初始条件 (t_0, ϕ) 下的状态, $\phi(\vartheta) \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Upsilon)$, Υ 是周期轨迹 $x^*(t)$ 的局部指数收敛集. 当 $\Upsilon = \mathbb{R}^n$ 时, $x^*(t)$ 是全局指数收敛. 特别地, 当 $x^*(t)$ 为不动点时, 则 HOCNN(1) 是全局指数稳定的.

引理 1^[11] 令 Θ 为有界且在 $\mathbb{R}^n$ 上的闭集, H 是一个在完备矩阵空间 $(\Theta, \|\cdot, \cdot\|)$ 上的映射, 其中

$$\|x, y\|_{t_0} = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\}, \forall x, y \in \Theta$$

是一个在 Θ 上的测度. 如果 $H(\Theta) \subset \Theta$, 且存在常数 $\alpha < 1$ 使得

$$\|H(x), H(y)\| \leq \alpha \|x, y\|, \forall x, y \in \Theta,$$

则存在 $x_0 \in \Theta$ 使得 $H(x_0) = x_0$.

假设 $N_1 \cup N_2 \cup N_3 = \{1, 2, \dots, n\}$, $N_1 \cap N_2, N_2 \cap N_3$ 和 $N_1 \cap N_3$ 均为空集. 定义

$$\begin{aligned} \Theta_1 &= \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \in (-\infty, -1), i \in N_1; \\ & x_i \in (1, +\infty), i \in N_2; \\ & x_i \in [-1, 1], i \in N_3\}. \end{aligned}$$

注意到 $\Theta_1 \subset \Omega$, 其中 Ω 由式(2)定义. 若 N_3 为空, 则令

$$\begin{aligned} \Theta_2 &= \{x \in \mathbb{R}^n | x_i \in (-\infty, -1), i \in N_1; \\ & x_i \in (1, +\infty), i \in N_2\}. \end{aligned}$$

3 主要结果(Main results)

定理 1 对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \forall t \geq t_0$, 如果有

$$|u_i(t)| < a_{ii} - 1 - \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| - \sum_{j=1}^n |b_{ij}| - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |c_{ijk}|, \quad (3)$$

则HOCNN(1)在 Ω_2 内有 2^n 个局部指数收敛极限环.

证 如果 $\forall s \in [t_0 - \tau, t]$, $x(s) \in \Theta_2$, 由系统(1)和激励函数特性可知:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} = & -x_i(t - \tau_i(t)) - \sum_{j \in N_1} (a_{ij} + b_{ij}) + \\ & \sum_{j \in N_2} (a_{ij} + b_{ij}) + \sum_{j, k \in N_1 \text{ or } j, k \in N_2} c_{ijk} - \\ & \sum_{j \in N_1, k \in N_2 \text{ or } j \in N_2, k \in N_1} c_{ijk} + u_i(t). \end{aligned} \quad (4)$$

当 $i \in N_2$ 和 $x_i(t) = 1$ 时, 由式(3)和(4)得

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} = & -1 - \sum_{j \in N_1} (a_{ij} + b_{ij}) + \sum_{j \in N_2} (a_{ij} + b_{ij}) + \\ & \sum_{j, k \in N_1 \text{ or } j, k \in N_2} c_{ijk} - \\ & \sum_{j \in N_1, k \in N_2 \text{ or } j \in N_2, k \in N_1} c_{ijk} + u_i(t) > 0. \end{aligned} \quad (5)$$

当 $i \in N_1$ 和 $x_i(t) = -1$ 时, 由式(3)和(4)得

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} = & 1 - \sum_{j \in N_1} (a_{ij} + b_{ij}) + \sum_{j \in N_2} (a_{ij} + b_{ij}) + \\ & \sum_{j, k \in N_1 \text{ or } j, k \in N_2} c_{ijk} - \\ & \sum_{j \in N_1, k \in N_2 \text{ or } j \in N_2, k \in N_1} c_{ijk} + u_i(t) < 0. \end{aligned} \quad (6)$$

由式(5)和(6)可知, 如果 $\forall \phi \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$, 则 $x(t; t_0, \phi)$ 将保持在 Θ_2 区域内.

令 $x_i(t; t_0, \phi)$ 和 $x_i(t; t_0, \varphi)$ 分别为HOCNN(1)的两个初始条件 (t_0, ϕ) 和 (t_0, φ) 下的两个状态, 其中 $\phi, \varphi \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$.

由式(1)和(4)知, 对 $\forall t \geq t_0$, 有

$$\begin{aligned} \frac{d(x_i(t; t_0, \phi) - x_i(t; t_0, \varphi))}{dt} = \\ -(x_i(t - \tau_i(t); t_0, \phi) - x_i(t - \tau_i(t); t_0, \varphi)), \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (7)$$

因此, 对 $\forall t \geq t_0$, 有

$$\begin{aligned} |x_i(t; t_0, \phi) - x_i(t; t_0, \varphi)| \leq & \|\phi, \varphi\|_{t_0} e^{-(t - \tau - t_0)}, \\ \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (8)$$

定义 $x_\phi^{(t)}(\theta) = x(t + \theta; t_0, \phi)$, $\theta \in [t_0 - \tau, t_0]$. 根据式(5)和(6)可知, 对 $\forall \phi \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$, 有 $x_\phi^{(t)} \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$.

通过 $H(\phi) = x_\phi^{(\omega)}$ 定义一个映射

$$H: \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2) \rightarrow \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2),$$

则有

$$H(\mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)) \subset \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2),$$

且 $H^m(\phi) = x_\phi^{(m\omega)}$.

选择一个正整数 m 使得

$$e^{-(m\omega - \tau)} \leq \alpha < 1. \quad (9)$$

由式(8)和(9)可得

$$\begin{aligned} \|H^m(\phi), H^m(\varphi)\|_{t_0} \leq \\ \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sup_{\theta \in [t_0 - \tau, t_0]} |x_i(m\omega + \theta; t_0, \phi) - \right. \\ \left. x_i(m\omega + \theta; t_0, \varphi)| \right\} \leq \\ \|\phi, \varphi\|_{t_0} e^{-(m\omega - \tau)} \leq \\ \alpha \|\phi, \varphi\|_{t_0}. \end{aligned} \quad (10)$$

根据引理1, H^m 是一个收缩映射, 故存在唯一不动点 $\phi^* \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2)$ 使得

$$H^m(\phi^*) = \phi^*.$$

另外, 容易得出

$$H^m(H(\phi^*)) = H(H^m(\phi^*)) = H(\phi^*).$$

因此, $H(\phi^*)$ 也是 H^m 的一个不动点. 由映射 H^m 不动点的唯一性可知 $H(\phi^*) = \phi^*$, 即 $x_{\phi^*}^{(\omega)} = \phi^*$.

令 $x(t; t_0, \phi^*)$ 为HOCNN(1)的一个状态, 且初始条件为 (t_0, ϕ^*) . 由式(1)可得

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t; t_0, \phi^*)}{dt} = \\ -x_i(t - \tau_i(t); t_0, \phi^*) - \sum_{j \in N_1} (a_{ij} + b_{ij}) + \\ \sum_{j \in N_2} (a_{ij} + b_{ij}) + \sum_{j, k \in N_1 \text{ or } j, k \in N_2} c_{ijk} - \\ \sum_{j \in N_1, k \in N_2 \text{ or } j \in N_2, k \in N_1} c_{ijk} + \\ u_i(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned} \quad (11)$$

所以有

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t + \omega; t_0, \phi^*)}{dt} = \\ -x_i(t + \omega - \tau_i(t + \omega); t_0, \phi^*) - \sum_{j \in N_1} (a_{ij} + b_{ij}) + \\ \sum_{j \in N_2} (a_{ij} + b_{ij}) + \sum_{j, k \in N_1 \text{ or } j, k \in N_2} c_{ijk} - \\ \sum_{j \in N_1, k \in N_2 \text{ or } j \in N_2, k \in N_1} c_{ijk} + \\ u_i(t), \quad \forall i = 1, 2, \dots, n, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned} \quad (12)$$

这说明 $x(t + \omega; t_0, \phi^*)$ 也是HOCNN(1)初始条件为 (t_0, ϕ^*) 的一个状态, 因此有

$$x(t + \omega; t_0, \phi^*) = x(t; t_0, x_{\phi^*}^{(\omega)}) = x(t; t_0, \phi^*).$$

所以 $x(t; t_0, \phi^*)$ 是HOCNN(1)的一个周期为 ω 的周期

轨迹. 由式(8)可知带有初始条件 $(t, \phi)(\phi \in \mathcal{C}([t_0 - \tau, t_0], \Theta_2))$ 的HOCNN(1)的任意状态将随 $t \rightarrow \infty$ 指数收敛到这一周期轨迹上. 所以, Θ_2 是 $x(t; t_0, \phi^*)$ 的一个局部指数收敛集. 因为 Ω_2 中存在 2^n 个区域, 所以在 Ω_2 内存在 2^n 个孤立周期轨迹, 并且这 2^n 个孤立周期轨迹是局部指数收敛的.

证毕.

4 数值例子(Numerical example)

下面通过一个仿真实例来说明文中结论的有效性. 考虑具有漏泄时滞的高阶细胞神经网络如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} = & -x_i(t-0.8) + \sum_{j=1}^3 a_{ij} f_j(x_j(t)) + \\ & \sum_{j=1}^3 b_{ij} f_j(x_j(t-0.6)) + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 c_{ijk} \times \\ & f_j(x_j(t-0.2)) f_k(x_k(t-0.2)) + \\ & u_i(t), \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (13)$$

令 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$, $B = (b_{ij})_{3 \times 3}$, $C_i = (c_{ijk})_{3 \times 3}$, $i = 1, 2, 3$. 设

$$\begin{aligned} A = & \begin{pmatrix} 6 & -0.5 & 0.1 \\ 0.7 & 8 & 0 \\ -1.1 & 0.2 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & 0.2 \\ -0.2 & -0.1 & 0.3 \\ 0.6 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}, \\ C_1 = & \begin{pmatrix} 0.1 & -0.2 & 0.1 \\ -0.3 & 0.1 & 0.4 \\ -1 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}, C_2 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0.1 \\ 1.2 & -0.4 & 0.4 \\ -0.2 & 0.3 & 0.5 \end{pmatrix}, \\ C_3 = & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.1 \\ 0 & 0.4 & 0.4 \\ -0.2 & 0.4 & 0.1 \end{pmatrix}, u_1(t) = 0.8 \cos t, \\ & u_2(t) = -0.9 \sin t, u_3(t) = 0.5(\cos t + \sin t). \end{aligned}$$

容易验证以上系数满足(3), 根据定理1, HOCNN(13)有 $2^3 = 8$ 个周期环, 且是局部指数收敛的. $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 各80个随机初始条件下的相位图如图1所示.

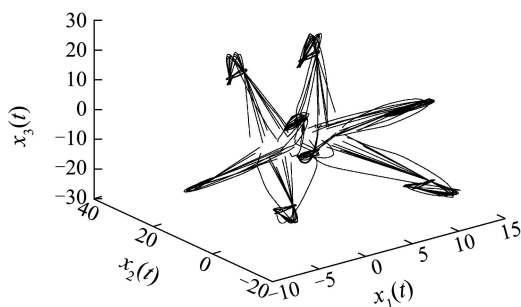


图1 系统状态 $x_1(t)$, $x_2(t)$ 和 $x_3(t)$ 的相位图

Fig. 1 The phase plot of the states $x_1(t)$, $x_2(t)$ and $x_3(t)$

5 结束语(Conclusions)

根据细胞神经网络激励函数的特性和不动点定理, 研究了一类具有漏泄时滞的高阶细胞神经网络的多周期性和多稳定性. 给出了该类神经网络的周期环或平衡点在饱和区内局部指数收敛的充分性判据. 仿真实例表明了所得结论的有效性.

参考文献(References):

- [1] CHUA L O, YANG L. Cellular neural networks: Theory[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, 1988, 35(10): 1257 – 1272.
- [2] NIE X B, CAO J D. Multistability of competitive neural networks with time-varying and distributed delays[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2009 10(2): 928 – 942.
- [3] ZENG Z G, WANG J. Multiperiodicity and exponential attractivity evoked by periodic external inputs in delayed cellular neural networks[J]. *Neural Computation*, 2006, 18(4): 848 – 870.
- [4] HUANG G, CAO J D. Multistability of neural networks with discontinuous activation function[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2008, 13(10): 2279 – 2289.
- [5] HUANG G, CAO J D. Multistability in bidirectional associative memory neural networks[J]. *Physics Letters A*, 2008, 372(16): 2842 – 2854.
- [6] CIVALLERI P, GILLI M. Practical stability criteria for cellular neural networks[J]. *Electronics Letters*, 1997, 33(11): 970 – 971.
- [7] CAO J D, FENG G, WANG Y. Multistability and multiperiodicity of delayed Cohen-Grossberg neural networks with a general class of activation functions[J]. *Physica D*, 2008, 237(13): 1734 – 1749.
- [8] LOU X Y, CUI B T. Novel global stability criteria for high-order Hopfield-type neural networks with time-varying delays[J]. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2007, 330(1): 144 – 158.
- [9] HAYKIN S. *Neural Networks*[M]. New Jersey: Prentice Hall, 1999.
- [10] GOPALSAMY K. *Stability and Oscillations in Delay Differential Equations of Population Dynamics*[M]. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.
- [11] KOSAKU Y. *Functional Analysis*[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978.

作者简介:

盛立 (1982—), 男, 博士研究生, 主要研究方向非线性系统的稳定性与混沌同步, E-mail: victory8209@yahoo.com.cn;

杨慧中 (1955—), 女, 博士, 教授, 博士生导师, 研究领域为过程建模、优化控制, E-mail: yhz_jn@163.com;

楼旭阳 (1982—), 男, 博士研究生, 主要研究方向神经网络动态性分析, E-mail: Louxuyang28945@163.com.