文章编号：1000−8152(2009)08−0903−04

T-S模糊系统的构造及其逼近能力的充分条件

肖小石, 毛志忠, 袁　平

(东北大学 信息科学与工程学院 自动化研究所, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 针对任意多变量非线性函数, 至今缺少一种简单有效的构造性方法来建造一个T-S模糊系统对其实现给定精度的模糊逼近. 本文在逼近函数$g(X)\in\mathbb{C}^2$及$g(X)\notin\mathbb{C}^2$两种情况下给出了一种当模糊集满足均匀性、连续性、正规性条件下T-S模糊系统的构造方法以及该T-S模糊系统逼近能力的充分条件. 该构造性方法简单易行且其逼近能力充分条件的保守性低. 最后通过仿真研究证实了该方法的正确性与有效性.

关键词: T-S模糊系统; 模糊划分; 逼近能力; 充分条件

中图分类号: TP273　　　**文献标识码**: A

Construction of T-S fuzzy system and the sufficient condition of its approximation ability

XIAO Xiao-shi, MAO Zhi-zhong, YUAN Ping

(Automation Institute, College of Information Science and Technology, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: A constructive method for building the T-S fuzzy system to approximate a given multi-variable nonlinear function is yet to be found. In either case of $g(X)\in\mathbb{C}^2$ or $g(X)\notin\mathbb{C}^2$, this paper proposes a convenient method for building a T-S fuzzy system and gives a loose sufficient condition of its approximation ability, when the fuzzy sets are uniformly distributed, continuous and normalized. A simulation example is given to show the correctness and effectiveness of the method.

Key words: T-S fuzzy system; fuzzy partition; approximation ability; sufficient condition

1　引言(Introduction)

T-S模糊模型自1985年由Takagi和Sugeno提出以来, 由于其特殊的规则后件引起了广泛的研究兴趣. 文献[1,2]研究了T-S模糊系统的逼近能力, 证明了T-S模糊系统是一个万能逼近器. 文献[3]研究了随机过程的T-S模糊逼近问题, 证实了T-S模糊系统较强的逼近能力. 文献[4,5]研究了T-S模糊系统逼近能力的充分条件, 给出了一个较为乐观的模糊划分结果. 文献[6～8]研究了T-S模糊系统的稳定性问题, 得出了系统稳定的充分条件. 这些工作都为T-S模糊系统走向控制工程应用打下了坚实的理论基础. 但是, 以上文献都是一些关于T-S模糊系统存在性的讨论, 并没有涉及到T-S模糊系统的构造问题. 尽管在文献[4,5]中作者的分析已经暗含了T-S模糊系统的确定性方法, 但是由于采用多项式为过渡手段使得问题复杂化, 不但其充分条件的求解较复杂, 而且未能明确给出一个T-S模糊系统的构造性方法. 这种构造性方法的缺失, 也从一个方面说明了对于T-S模糊逼近本质的研究有待深入. 本文给出了逼近函数$g(X)\in\mathbb{C}^2$及$g(X)\notin\mathbb{C}^2$两种情况下T-S模糊系统的一种构造方法及其逼近能力的充分条件, 在一定程度上揭示了T-S模糊系统的本质.

2　基本概念(Preliminary concepts)

为便于讨论, 首先给出一些模糊系统的一些基本概念. 考虑多输入单输出的模糊系统$f: U\subset\mathbb{R}^n\mapsto V\subset\mathbb{R}$, 其中$U=U_1\times U_2\times\cdots\times U_n=\prod\limits_{j=1}^{n}U_j$为输入空间, $V\subset\mathbb{R}$为输出空间. 第j个输入变量的论域为$[\alpha_j,\beta_j]$, 模糊划分数为N_j. 定义T-S模糊系统为:

$$R^i: \text{if } x_1 \text{ is } A_1^i \text{ and } x_2 \text{ is } A_2^i \text{ and } \cdots \text{ and } x_n \text{ is } A_n^i,\\ \text{then } y=a_{i0}+a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n. \tag{1}$$

其中: $x_j(j=1,2,\cdots,n)$为第j个输入变量, A_j^i为x_j的第i个模糊集, $M=\prod\limits_{j=1}^{n}N_j$为模糊规则数, 第$i$条模糊规则的激发强度为$\mu_i(X)=\prod\limits_{j=1}^{n}\mu_{A_j^i}(x_j)$, 其

收稿日期: 2008−06−12; 收修改稿日期: 2008−11−02.
基金项目: 国家高技术研究计划资助项目(2007AA04Z194)

中$\mu_{A_j^i}(x_j)$表示x_j隶属于模糊集A_j^i的隶属度. 同时给出如下定义:

定义 1　一个模糊集A被称为是正规模糊集, 如果$hgt(A) \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{x\in U}\mu_A(x) = 1$.

定义 2　模糊基$A_i(i = 1,2,\cdots,N)$被称为在$U \in \mathbb{R}$上是连续的, 若对$x \in U$, $\mu_{A_i}(x) = 1$, 对于$j \neq i$, $\mu_{A_j}(x) = 0$.

定义 3　第i个模糊集A_i的中心C^i定义为

$$C^i = \frac{1}{2}(\min\arg(\mu_{A_i}(x) = 1) + \max\arg(\mu_{A_i}(x) = 1)),$$

模糊间距

$$D^i = C^i - C^{i-1}\ (i = 1,2,\cdots,N), C^0 = \alpha_j,$$

最大模糊间距

$$D = \max\{D^i | i = 1,2,\cdots,N\}.$$

对于论域$[\alpha_j,\beta_j]$, 当采用均匀模糊划分且划分数为N_j时, 显然有$D \leqslant \dfrac{\beta_j-\alpha_j}{N_j-1}$. 本文后面的分析采用均匀模糊划分并且模糊集满足正规性和连续性.

3 T-S模糊系统的构造及其逼近能力的充分条件分析(Ananlysis of constructing T-S fuzzy system and the sufficient condition of its approximation ability)

逼近函数$g(X)$有$g(X) \in \mathbb{C}^2$和$g(X) \notin \mathbb{C}^2$两种情况, 其中符号$\mathbb{C}^2$表示具有连续2阶导数的函数集合, 因此下面分两种情况讨论.

3.1 逼近函数$g(X) \in \mathbb{C}^2$时T-S模糊系统的构造及其逼近能力的充分条件(Construction of T-S fuzzy system and its approximation ability when $g(X) \in \mathbb{C}^2$)

对于任一在$U = \prod\limits_{j=1}^{n}[\alpha_j,\beta_j]$上具有连续2阶导数的实函数$g(X)(X \in \mathbb{R}^n)$, 考虑构造T-S模糊系统来实现给定误差$\varepsilon$下的模糊逼近. 考察如式(1)所示的T-S模糊系统的每一条规则$R^i(i = 1,2,\cdots,M)$, 它决定了一个特殊的输入矢量$X^i = (x_1,x_2,\cdots,x_n)$, 其中每一个分量恰好等于相应的模糊子集的中心$C_j^{i_j}(i_j = 1,2,\cdots,N_j)$. 对任意的输入矢量$X$, 考察如下采用重心法解模糊的T-S模糊系统:

$$f_{\rm TS}(X) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)(a_{i0}+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)}{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)}. \tag{2}$$

当用它来逼近给定函数$g(X)$时, 逼近误差

$$\begin{aligned}&|f_{\rm TS}(X)-g(X)| = \\ &|\frac{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)(a_{i0}+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)}{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)} - g(X)| = \\ &|\frac{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)(a_{i0}+\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}x_j-g(X))}{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)}|.\end{aligned} \tag{3}$$

设当系统触发规则R^i时每一输入变量x_j所对应的模糊子集的中心为$C_j^{i_j}$, 将$g(X)$在$X^i = [C_1^{i_1}, C_2^{i_2},\cdots, C_n^{i_n}]$处泰勒(Tailor)展开有

$$g(X) = g(X^i) + \Delta\, g^{\rm T}(X^i)(X-X^i) + r_2(X). \tag{4}$$

其中$\Delta g^{\rm T}(X^i)$为$g(X^i)$在X^i处的梯度,

$$r_2(X) = \frac{1}{2}(X-X^i)^{\rm T}\frac{\rm d}{{\rm d}X}\frac{{\rm d}g(X)}{{\rm d}X}|_{X=\eta}$$

为拉格朗日(Lagrange)余项,

$$\frac{\rm d}{{\rm d}X}\frac{{\rm d}g(X)}{{\rm d}X}|_{X=\eta}$$

为$g(X)$的海赛(Hessian)矩阵, η位于X与X^i之间. 为构造T-S模糊系统, 令

$$a_{i0} + \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j = g(X^i) + \Delta\, g^{\rm T}(X^i)(X-X^i). \tag{5}$$

解之得

$$\begin{cases} a_{i0} = g(X^i) - \Delta\, g^{\rm T}(X^i)X^i, \\ a_{i1} = \Delta\, g_1^{\rm T}(X^i), \\ \quad\vdots \\ a_{in} = \Delta\, g_n^{\rm T}(X^i). \end{cases} \tag{6}$$

其中$\Delta\, g_j^{\rm T}(X^i)(j = 1,2,\cdots,n)$为$g(X)$在$X^i$处梯度的第$j$个分量. 当$i$从1取到$M$时, 模糊系统的$M$组参数就确定了, 即确定了整个T-S模糊系统. 下面考虑当规则数应满足什么条件以使构造的模糊系统达到给定的逼近精度. 假定每个输入变量的模糊划分数相同, 即$N_1 = N_2 = \cdots = N_n = N$, 由式(3)和式(5)有

$$|f_{\rm TS}(X)-g(X)| = |\frac{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)r_2(X)}{\sum\limits_{i=1}^{M}\mu_i(X)}|. \tag{7}$$

因为

$$r_2(X) = \frac{1}{2}(X-X^i)^{\rm T}\frac{\rm d}{{\rm d}X}\frac{{\rm d}g(X)}{{\rm d}X}\Big|_{X=\eta}(X-X^i) \leqslant$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}X}\frac{\mathrm{d}g(X)}{\mathrm{d}X}\bigg|_{X=\eta}\frac{L^2}{(N-1)^2}\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g(X)}{\partial x_j\partial x_k}\|_\infty\frac{L^2}{(N-1)^2}.$$

其中: $L=\max\{(\beta_j-\alpha_j)|j=1,2,\cdots,n\}$, N为L相应的划分数, $\|\cdot\|_\infty$定义为$\sup|\cdot|$. 所以有

$$|\frac{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)r_2(X)}{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)}|\leqslant$$
$$|\frac{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g(X)}{\partial x_j\partial x_k}\|_\infty\frac{L^2}{(N-1)^2})}{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)}|=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g(X)}{\partial x_j\partial x_k}\|_\infty\frac{L^2}{(N-1)^2}. \tag{8}$$

在给定逼近误差ε条件下有

$$|f_{\mathrm{TS}}(X)-g(X)|\leqslant$$
$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g(X)}{\partial x_j\partial x_k}\|_\infty\frac{L^2}{(N-1)^2}\leqslant\varepsilon\Rightarrow$$
$$N\geqslant N_0=$$
$$\left\lceil L\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{\partial^2 g(X)}{\partial x_j\partial x_k}\|_\infty}+1\right\rceil. \tag{9}$$

其中$\lceil\cdot\rceil$定义为向上取整函数, 例如$\lceil 3.3\rceil=4$, 下同. 综合以上分析, 得到如下定理:

定理 1　对于任意一个在$U=\prod_{j=1}^{n}[\alpha_j,\beta_j]$上具有连续二阶导数的实函数$g(X)(X\in\mathbb{R}^n)$, 给定逼近精度$\varepsilon>0$, 当采用均匀模糊划分且划分数$N$满足式(9)时, 存在如下T-S模糊系统:

$$\begin{cases}f_{\mathrm{TS}}(X)=\dfrac{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)(a_{i0}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)}{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)},\\ a_{i0}=g(X^i)-\Delta\, g^{\mathrm{T}}(X^i)X^i,\\ a_{i1}=\Delta\, g_1^{\mathrm{T}}(X^i),\\ \quad\vdots\\ a_{in}=\Delta\, g_n^{\mathrm{T}}(X^i),\end{cases} \tag{10}$$

使得$\|f_{\mathrm{TS}}(X)-g(X)\|_\infty<\varepsilon$.

其中$\mu_i(X)=\prod_{j=1}^{n}\mu_{ij}(x_j)$为第$i$条模糊规则的激发强度, 规则数$M=N^n$, $\Delta g_j^{\mathrm{T}}(X^i)$为函数$g(X)$在$X^i$处梯度的第$j$个分量.

3.2　逼近函数$g(X)\notin\mathbb{C}^2$时T-S模糊系统的构造及其逼近能力的充分条件(Construction of T-S fuzzy system and its approximation ability when $g(X)\notin\mathbb{C}^2$)

当$g(X)$在$U=\prod_{j=1}^{n}[\alpha_j,\beta_j]$上不具有连续2阶导数, 即$g(X)\notin\mathbb{C}^2$时, 在参考文献[4,5]的基础上给出如下定理(其推导过程与定理1类似, 细节见文献[4,5]).

定理 2　对于任意一个在$U=\prod_{j=1}^{n}[\alpha_j,\beta_j]$上不具有连续2阶导数的实函数$g(X)(X\in\mathbb{R}^n)$, 给定逼近精度$\varepsilon>0$, 当采用均匀模糊划分且划分数$N$满足

$$N\geqslant N_0=$$
$$\left\lceil L\sqrt{\frac{1}{2(\varepsilon-\varepsilon_1)}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\|\frac{\partial^2 P_q(X)}{\partial x_j\partial x_k}\|_\infty}+1\right\rceil \tag{11}$$

时, 存在如下T-S模糊系统:

$$\begin{cases}f_{\mathrm{TS}}(X)=\dfrac{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)(a_{i0}+\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j)}{\sum_{i=1}^{M}\mu_i(X)},\\ a_{i0}=P_q(X^i)-\Delta P_q^{\mathrm{T}}(X^i)X^i,\\ a_{i1}=\Delta P_{q_1^{\mathrm{T}}}(X^i),\\ \quad\vdots\\ a_{in}=\Delta P_{q_n^{\mathrm{T}}}(X^i),\end{cases} \tag{12}$$

使得$\|f_{\mathrm{TS}}(X)-g(X)\|_\infty<\varepsilon$.

其中$\varepsilon>\varepsilon_1>0$, $P_q(X)$为一多项式(通常可由$g(X)$的展开式得到) 且$\|P_q(X)-g(X)\|_\infty<\varepsilon_1$.

注 1　定理中的充分条件是在一般意义下的, 由于无穷范数$\|\cdot\|_\infty$的"放大"作用, 此条件尚具有一定的保守性. 针对某一具体逼近函数$g(X)$, 有可能当模糊划分数N远远小于N_0时模糊系统f_{TS}仍然能够很好地实现给定精度的模糊逼近.

注 2　若采用均匀模糊划分时逼近效果较好, 可考虑采用非均匀模糊划分来减小模糊规则数以进一步简化模糊系统, 即在逼近函数$g(X)$非线性特性较强的区域使模糊间距相对小一些, 而在$g(X)$非线性特性较弱的区域模糊间距可取得相对较大一些[9].

4　算例(Example)

为便于比较, 选取$g(X)=\mathrm{e}^{x_1-x_2}$, 其中$x_1,x_2\in[-0.5,0.5]$, 给定一致逼近误差0.2. 当采用Mamdani模糊系统时, 文献[1,10]给出的模糊划分数为351, 29, 分别对应123201, 841条模糊规则. 显然, 这两个结果都过于保守, 严重影响了模糊系统的实际应用. 当

采用T-S模糊系统时, 文献[4]以多项式为过度手段得出模糊划分数为8. 而根据本文的方法构造T-S模糊系统, 当模糊划分数为7时就能实现精度为0.2的模糊逼近. 图1给出了模糊划分数为7时的逼近误差曲面, 其最大逼近误差小于0.02. 鉴于逼近效果较好, 考虑减少模糊划分数以简化模糊系统, 图2给出了模糊划分数为3时的逼近误差曲面, 从图2可以看出, 模糊系统在模糊划分数为3时仍然能够很好地以给定精度$\varepsilon = 0.2$逼近$g(X)$, 已经接近最简模糊系统(模糊划分数为2).

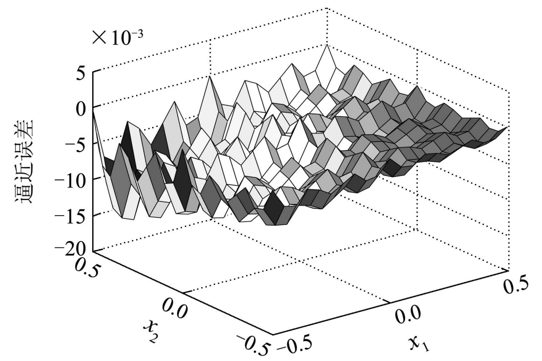

图 1 模糊划分数为7时的逼近误差曲面

Fig. 1 Approximation error surface with 7 fuzzy sets

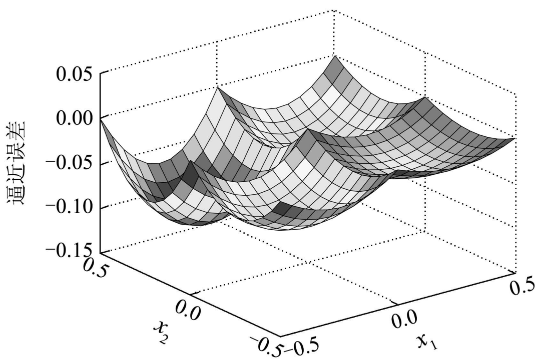

图 2 模糊划分数为3时的逼近误差曲面

Fig. 2 Approximation error surface with 3 fuzzy sets

5 结论(Conclusions)

本文提出了一种当模糊集满足均匀性、连续性、正规性条件时T-S模糊系统的构造方法及其逼近能力的充分条件, 并给出了相应定理. 定理的推导过程在一定程度上揭示了T-S模糊逼近的实质, 即T-S模糊系统本质上是逼近函数在M(M为规则数) 个点上的一次泰勒(Tailor)展开式的线性组合. 该构造性方法简单易行, 其逼近能力充分条件的保守性低, 有望在一定程度上解决模糊系统的维数灾问题以及模糊规则的获取问题.

参考文献(References):

[1] YING H. Sufficient conditions on uniform approximation of multivariate functions bu general Takagi-Sugeno fuzzy system with linear rule consequence[J]. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics*, 1998, 28(4): 515 – 520.

[2] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 典型T-S模糊系统是通用逼近器[J]. 控制理论与应用, 2001, 18(4): 293 – 297.
(ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Typical T-S fuzzy systems are general approximators[J]. *Control Theory & Applications*, 2001, 18(4): 293 – 297.)

[3] LIU P Y, LI H X. Approximation of stochastic processes by T-S fuzzy system[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2005, 155(3): 215 – 235.

[4] 曾珂, 张乃尧, 徐文立. 线性T-S模糊系统作为通用逼近器的充分条件[J]. 自动化学报, 2001, 27(5): 606 – 612.
(ZENG Ke, ZHANG Naiyao, XU Wenli. Sufficient condition for linear T-S fuzzy systems as universal approximators[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2001, 27(5): 606 – 612.)

[5] ZENG K, ZHANG N Y, XU W L. A comparative study on sufficient condition for Takagi-Sugeno fuzzy system as universal approximators[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2000, 8(6): 773 – 780.

[6] TAKAGI T, SUGENO M. Stability analysis and design of fuzzy control systems[J]. *Fuzzt Sets and Systems*, 1992, 45(2): 135 – 156.

[7] TANAKA K, IKEDA T, WANG H O. Robust stabilization of a class of uncertain nonlinear systems via fuzzy control:quadratic stabiliy, H_∞ control theory and linear matrix inequalities[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 1 – 13.

[8] JOH J, CHEN Y H, LANGARI R. On the stability issue of linear Takagi-Sugeno fuzzy models[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy System*, 1998, 6(3): 402 – 410.

[9] 何清, 王加银, 李洪兴. 论域的模糊划分与仿真数据采集[J]. 模糊系统与数学, 2001, 15(3): 19 – 24.
(HE Qing, WANG Jiayin, LI Hongxing. Fuzzy partition of universal and collection of simulation data[J]. *Fuzzy systems and Mathematics*, 2001, 15(3): 19 – 24.)

[10] 王立新. 模糊系统与模糊控制[M]. 北京: 清华大学出版社, 2003.

作者简介:

肖小石 (1981—), 男, 东北大学控制理论与控制工程专业博士研究生, 研究方向为鲁棒控制、自适应控制、模糊控制, E-mail: xiaoxiaoshi2005@sina.com;

毛志忠 (1961—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 中国自动化学会应用技术委员会委员, 研究方向为复杂工业系统建模、控制与优化, E-mail: maozhizhong@ise.neu.edu.cn;

袁 平 (1971—), 男, 副教授, 博士, 研究方向为智能建模与控制、软测量, E-mail: yuanping@ise.neu.edu.cn.