

未知不确定非线性系统的直接自校正滑模控制

张细政^{1,2}, 王耀南¹

(1. 湖南大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410082; 2. 湖南工程学院 计算机与通信学院, 湖南 湘潭 411104)

摘要: 针对一类具有未知不确定性的非线性系统, 提出一种参数直接自校正滑模控制方法. 将系统的非线性、参数变化和外部干扰都视作系统不确定性, 控制器的设计无需不确定项的上下界等信息; 为改善跟踪性能与减小输入抖振, 控制器设计中引入可调边界层厚度的双极性sigmoid函数与可变滑模切换增益, 推导出控制增益和边界层厚度的直接自校正律, 并基于Lyapunov判据给出了闭环系统稳定性证明. 仿真实例证明了该方法的有效性和正确性.

关键词: 滑模变结构控制; 自适应控制; 抖振; 边界层调节

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Sliding mode control with direct self-tuning for a class of nonlinear system with unknown uncertainties

ZHANG Xi-zheng^{1,2}, WANG Yao-nan¹

(1. College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China;

2. College of Computer and Communication, Hunan Institute of Engineering, Xiangtan Hunan 411104, China)

Abstract: Based on the combination of the direct adaptive control and the sliding-mode control, we present a new robust tracking controller for a class of nonlinear systems with unknown uncertainties. The controller treats the nonlinearity, the parametric uncertainties and the external disturbances as the system uncertainties. Without the boundaries and other information of the uncertainties, the controller and the self-tuning laws for the parameters are designed by using the Lyapunov stability theory. The closed-loop system is robust and asymptotically stable in the sense of the Lyapunov stability. The state trajectories can reach the sliding mode within finite time, eliminating the control input chattering thereafter. Simulation results are presented to verify the feasibility and correctness of the proposed control scheme.

Key words: sliding mode control; direct adaptive control; input chattering; boundary layer adaptation

1 引言(Introduction)

滑模变结构控制(SVC)已得到广泛的研究并在工业领域得到成功的应用. SVC能提供匹配条件下的与参数不确定性和外部扰动无关的强鲁棒性^[1]. SVC通常需要一个较大的控制增益, 用来抵抗未知的参数变化和外部扰动. 然而, 控制增益越大意味着控制输入抖动越严重, 且易激活对象的未建模动态性从而使系统不稳定的机会增加. 使用边界层技术和可变控制增益调节机制可以有效的降低输入高频颤抖, 并能改善跟踪精度^[2,3]. 文献[4]给出了一种边界层厚度和控制增益的自适应调节律. 文献[5]使用模糊技术通过隶属函数来实现切换项增益调节律, 为了降低抖振, 通过采用遗传算法来优化隶属函数, 实现了抖振的消除. 文献[6]采用RBF神经网络辨识系统不确定部分的上界, 在控制律设计中根据上

界信息设计可控制增益. 然而, 以上方法均未考虑到不确定的输入系数矩阵, 或控制算法复杂、计算量过大. 本文针对一类具有不确定性参数的非线性系统, 提出了一种带自适应参数调节律的滑模变结构控制方法. 整个控制策略思路清晰, 结构简单, 控制量及参数调节律计算量小.

2 直接自校正滑模控制器设计(Design of adaptive self-tuning SVC controller)

考虑一类具有未知不确定性的非线性系统, 其状态方程如下:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u. \quad (1)$$

其中:

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T = [x_1, \dot{x}_1, \dots, x_1^{(n-1)}]^T$$

为状态向量, $u \in \mathbb{R}^1$ 为控制输入, $f(x) \in \mathbb{R}^n$ 与 $g(x)$

$\in \mathbb{R}^n$ 是时变函数, 且可分别表示为

$$f(x) = f_0(x) + \Delta f(x), \quad g(x) = g_0(x) + \Delta g(x),$$

其中

$$f_0(x) = [x_2, \dots, x_n, f_0]^T, \quad g_0(x) = [0, \dots, 0, g_0]^T$$

为已知确定部分, 而

$$\Delta f(x) = [0, \dots, 0, \Delta f_0]^T,$$

$$\Delta g(x) = [0, \dots, 0, \Delta g_0]^T$$

为未知不确定部分.

2.1 常规滑模控制器设计(Design of the conventional SVC controller)

为简化控制器的设计, 假设 $\Delta f(x)$ 和 $\Delta g(x)$ 是有界的, 且关于时间 t 可导; 系统(1)的所有状态可测量. 定义期望状态向量为 $x_d = [x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd}]^T$, 跟踪误差为 $e = x - x_d$. 控制目标为: 在不确定部分及其上下界等信息未知下, 使用滑模变结构方法来选择合适的控制量 u , 使得状态 x_1 能跟踪期望状态 x_{1d} .

首先设计滑模切换函数, 定义函数 $S = C^T e$, 其中 $C = [c_1, c_2, \dots, c_n]^T$, 选择正系数 c_i 使得多项式 $c_n s^{n-1} + c_{n-1} s^{n-2} + \dots + c_1$ 是 Hurwitz 的, 且不等式 $C^T g_0(x) \neq 0$ 与 $|(C^T g_0(x))^{-1} C^T \Delta g(x)| \leq 1$ 成立. C 的选择决定了跟踪误差的衰减速率. 再设计合适的控制量 u 使得切换函数 S 趋近于零.

定义如下控制输入:

$$u = -(C^T g_0)^{-1} [C^T (f_0 - \dot{x}_d) + \beta \operatorname{sgn} S]. \quad (2)$$

其中 $\operatorname{sgn}(\cdot)$ 为符号函数, β 为滑模增益且满足

$$\beta \geq \frac{|C^T \Delta f + (C^T g_0)^{-1} C^T \Delta g C^T (\dot{x}_d - f_0)|}{1 - |(C^T g_0)^{-1} C^T \Delta g|}. \quad (3)$$

对切换函数 S 求导数, 得

$$\begin{aligned} \dot{S} &= C^T (\dot{x} - \dot{x}_d) = \\ &C^T \Delta f + C^T f_0 + C^T g_0 u + C^T \Delta g u - C^T \dot{x}_d = \\ &C^T \Delta f - \beta \operatorname{sgn} S - C^T \Delta g (C^T g_0)^{-1} \beta \operatorname{sgn} S + \\ &C^T \Delta g (C^T g_0)^{-1} [C^T \dot{x}_d - C^T f_0] = \\ &\varphi(x) - \beta \operatorname{sgn} S (1 + \eta). \end{aligned} \quad (4)$$

其中函数:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= C^T \Delta f + C^T \Delta g (C^T g_0)^{-1} [C^T \dot{x}_d - C^T f_0], \\ \eta(x) &= C^T \Delta g (C^T g_0)^{-1}, \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} \xi(x) &= (1 + \eta) / (1 - |\eta|), \\ r(x) &= \beta (1 - |\eta|) - |\varphi|, \end{aligned}$$

则有

$$S \cdot \dot{S} = S \varphi(x) - \beta \operatorname{sgn} S (1 + \eta) =$$

$$S \varphi(x) - |S| \xi r - |S| \xi |\varphi(x)|. \quad (5)$$

由前面 C 值的选择有 $|\eta(x)| \leq 1$, 由不等式(3)可推得 $r > 1, \xi \geq 1$. 则选择控制输入(2), 能使得不等式 $S \dot{S} < 0$ 成立, 即意味着 S 可在有限时间内到达零值, 系统进入滑模状态, 则由 $S \rightarrow 0$ 可得 $e_1 \rightarrow 0$.

2.2 参数自校正滑模控制器设计(Design of the parameter direct self-tuning SVC controller)

由于常规 SVC 中的抖振问题, 常借助边界层技术来减轻控制量的抖动. 然而, 等式(2)中的控制增益被设置为常数, 不利于稳定的精确跟踪. 为取代等式(2), 设计如下控制量:

$$u = -(C^T g_0)^{-1} [C^T (f_0 - \dot{x}_d) + \hat{\beta} \phi(\hat{\varepsilon}, S)]. \quad (6)$$

其中: $\phi(\hat{\varepsilon}, S) = (1 - e^{-\hat{\varepsilon} S}) / (1 + e^{-\hat{\varepsilon} S})$ 为双极性 sigmoid 函数, $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\varepsilon}$ 是待调节参数, 其目标值为理想的控制增益 β_d 和边界层厚度参数 ε_d . 本文所使用的可变边界层厚度和控制增益能有效的减小抖振.

当选取的切换增益 $\hat{\beta}$ 满足式(3)时, 可令 $\hat{\beta} = k|\varphi(x)| / (1 - |\eta(x)|)$, 其中比例系数 $k \geq 1$. 当使用控制律式(6)时, 仿照等式(4), 可求得切换函数的导数为

$$\dot{S} = \varphi(x) - \hat{\beta} \phi(\hat{\varepsilon}, S) (1 + \eta), \quad (7)$$

则有

$$\begin{aligned} S \cdot \dot{S} &= \\ S \varphi(x) - S k \frac{\varphi(x)}{1 - |\eta|} \phi(\hat{\varepsilon}, S) (1 + \eta) &= \\ S \varphi(x) - S \operatorname{sgn} S |\varphi(x)| \frac{\phi(\hat{\varepsilon}, S)}{\operatorname{sgn} S} k \xi(x) &= \\ S \varphi(x) - |S| |\varphi(x)| \frac{\phi(\hat{\varepsilon}, S)}{\operatorname{sgn} S} k \xi(x). \end{aligned} \quad (8)$$

由式(8)可知, 当 $\phi(\hat{\varepsilon}, S) k \xi(x) / \operatorname{sgn} S \geq 1$ 时, $S \cdot \dot{S} < 0$. 由于 $\phi(\hat{\varepsilon}, S)$ 与 $\operatorname{sgn} S$ 的极性相同, 而 $\xi(x) \geq 1$, 故当所选取的比例系数 k 满足下式:

$$k \geq \frac{1}{\phi(\hat{\varepsilon}, S)}, \quad (9)$$

则控制系统的滑模到达条件得到满足, 系统能进入滑模状态.

对于边界层厚度和控制增益, 设计如下的参数自校正律

$$\dot{\hat{\varepsilon}} = \mu \cdot C^T g_0(x) \cdot \operatorname{sgn}(\partial x_1 / \partial u) \cdot S, \quad (10)$$

$$\dot{\hat{\beta}} = \gamma \cdot C^T g_0(x) \cdot \operatorname{sgn}(\partial x_1 / \partial u) \cdot \phi(\hat{\varepsilon}, S), \quad (11)$$

其中 μ 和 γ 为表示调节速率的正常数.

定理1给出了在上述带参数自校正律的控制输入

作用下系统的稳定性证明.

定理 1 对于系统(1), 选取滑模切换函数 $S = C^T e$, 在式(6)控制律及式(10)(11)自校正律作用下, 系统(1)稳定, 且输入抖振和稳态误差将最终消除.

证 使用Lyapunov稳定性判据进行证明. 选择稳定函数 $V = 0.5e_1^2$, 依据求导的链式法则, 可得 V 对时间的导数为

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial \hat{\beta}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \hat{\varepsilon}} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} \right). \quad (12)$$

将控制律式(6)代入上式, 则等式(12)右边第1项、第2项可分别进一步化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \frac{\partial V}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \hat{\beta}} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial t} = \\ &e_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \hat{\beta}} \left(- (C^T g_0)^{-1} \hat{\beta} \frac{1 - e^{-\hat{\varepsilon} S}}{1 + e^{-\hat{\varepsilon} S}} \right) \frac{d\hat{\beta}}{dt} = \\ &-e_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} (C^T g_0)^{-1} \frac{1 - e^{-\hat{\varepsilon} S}}{1 + e^{-\hat{\varepsilon} S}} \dot{\hat{\beta}}, \\ \dot{V}_2 &= \frac{\partial V}{\partial e_1} \frac{\partial e_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial \hat{\varepsilon}} \frac{\partial \hat{\varepsilon}}{\partial t} = \\ &e_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} \frac{\partial}{\partial \hat{\varepsilon}} \left(- (C^T g_0)^{-1} \hat{\beta} \frac{1 - e^{-\hat{\varepsilon} S}}{1 + e^{-\hat{\varepsilon} S}} \right) \frac{d\hat{\varepsilon}}{dt} = \\ &-e_1 \frac{\partial x_1}{\partial u} (C^T g_0)^{-1} \hat{\beta} \frac{2Se^{-\hat{\varepsilon} S}}{(1 + e^{-\hat{\varepsilon} S})^2} \dot{\hat{\varepsilon}}. \end{aligned} \quad (13)$$

将式(10)代入等式(13), 将式(11)代入等式(14), 进一步化简得到

$$\dot{V}_1 = -\gamma e_1^2 \left| \frac{\partial x_1}{\partial u} \right| \left(\frac{1 - e^{-\hat{\varepsilon} S}}{1 + e^{-\hat{\varepsilon} S}} \right)^2 \leq 0, \quad (14)$$

$$\dot{V}_2 = -\mu e_1^2 \left| \frac{\partial x_1}{\partial u} \right| \frac{2e^{-\hat{\varepsilon} S}}{(1 + e^{-\hat{\varepsilon} S})^2} \hat{\beta} S^2 \leq 0. \quad (15)$$

由于 $\dot{V} < 0$ 而 $V > 0$, 则可知 V 将在有限时间内到达零值, 即误差信号将会渐近收敛到零点 $e_1 = 0$. 等式(12)中 $\dot{V} = 0$ 的唯一成立条件是 $e_1 = 0$ 或 $S = 0$, 此时误差都会为零.

证毕.

3 数值仿真(Numerical simulation)

本节将给出一个非线性系统控制实例. 考虑如下3阶非线性系统的零点稳定控制:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= 0.3x_1^2 + (1 - 0.45\sin(2t))x_2^2 + 0.2x_3^2 + \\ &(1.4387 - 0.13x_2^2 - 0.1\cos t x_1)u. \end{aligned}$$

令函数

$$\begin{aligned} f_0(x) &= [x_2, x_3, 0.3x_1^2 + x_2^2 + 0.2x_3^2]^T, \\ g_0(x) &= [0, 0, 1.478 - 0.13x_2^2]^T, \end{aligned}$$

不确定项为

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= [0, 0, -0.45\sin(2t)x_2^2]^T, \\ \Delta g(x) &= [0, 0, -0.1\cos t x_1]^T. \end{aligned}$$

使用本文控制方法, 选择切换系数

$$C^T = [c_1, c_2, c_3] = [10, 1, 1],$$

待调节参数初始值设置为

$$\hat{\beta}(0) = 15, \hat{\varepsilon}(0) = 15,$$

调节速率 $\gamma = 3$ 和 $\mu = 4$; 初始状态为 $x(0) = [1.5, 0, 0]^T$, 期望跟踪信号为 $x_d = [0, 0, 0]^T$.

仿真结果如图1~图5. 可见, 系统状态能快速收敛到零值, 且采用等式(8)的控制输入抖振现象基本消除, 而无参数自校正律的控制输入抖振严重. 在自校正律作用下, 边界层参数 $\hat{\varepsilon}$ 收敛到14.32, 控制增益 $\hat{\beta}$ 收敛到19.99, 如图4和图5所示.

在控制律和自校正律设计中, 表征调节速率的参数 γ 与 μ 的取值, 对控制器的性能影响较大, 尤其是 γ 的变化. 选择切换系数 $C^T = [10, 1, 1]$, 待调节参数初始值设置为 $\hat{\beta}(0) = 10$, $\hat{\varepsilon}(0) = 2$, 初始状态为 $x(0) = [1, 0.5, 1]^T$, 期望跟踪信号为 $x_d = [0, 0, 0]^T$. 取 $\mu = 4$, 在调节速率分别为 $\gamma = 2$, $\gamma = 10$ 和 $\gamma = 50$ 时, 对控制器性能进行了仿真比较, 如图6~图10所示. 可见, 若调节速率慢即 γ 较小, 则系统状态收敛到零值所需时间较长, 滑模增益自适应过程也较长; 若调节速率快即 γ 较大, 则系统状态能快速收敛到零值, 增益自适应过程也较短, 但此时所需控制量会有所增大; 若再增大调节速率, 则系统状态收敛时间没有明显减少, 但控制量却急剧增大. 所以, 适当的自校正律参数对于获得较好的控制器性能十分重要.

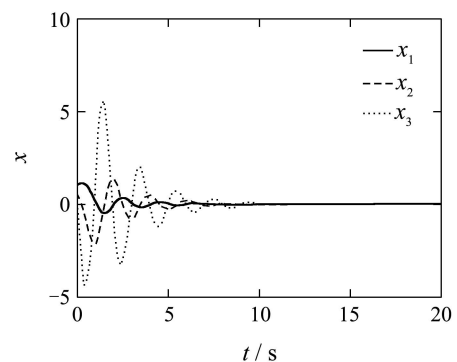


图1 状态轨迹

Fig. 1 State trajectories

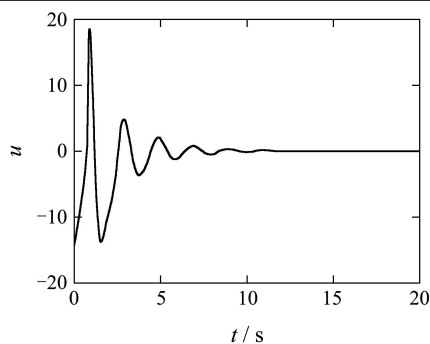


图 2 本文方法下的控制输入

Fig. 2 Control input of the proposed scheme

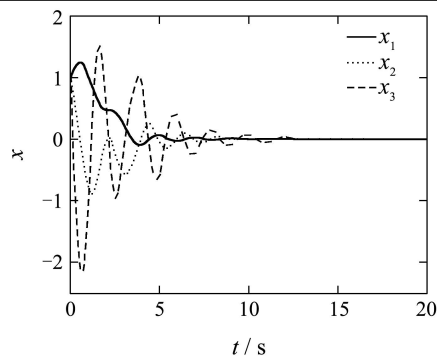
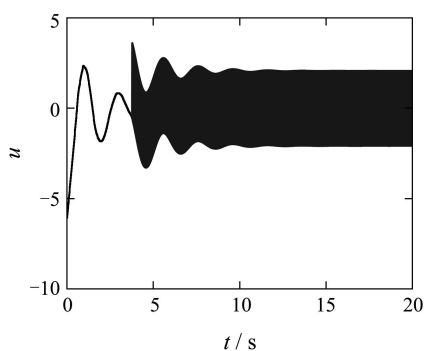
图 6 $\gamma = 2$ 时的状态轨迹Fig. 6 State trajectories under $\gamma = 2$ 

图 3 无参数调节的滑模控制输入

Fig. 3 Control input of the conventional SVC

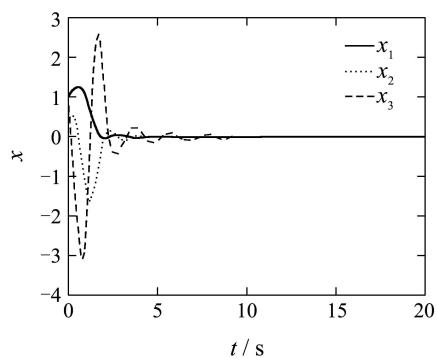
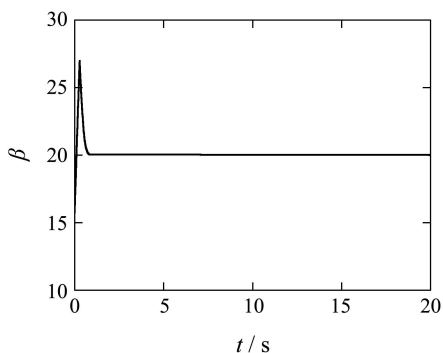
图 7 $\gamma = 10$ 时的状态轨迹Fig. 7 State trajectories under $\gamma = 10$ 

图 4 增益自适应曲线

Fig. 4 Adaptive gain

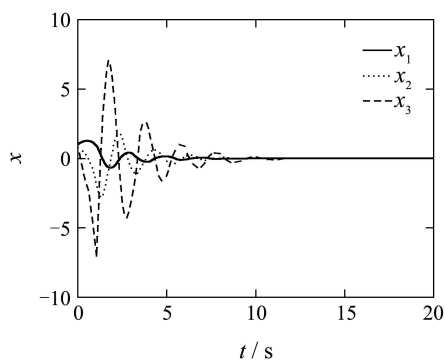
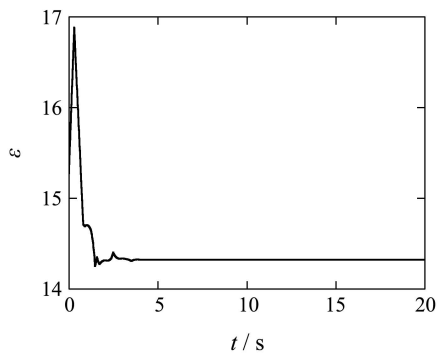
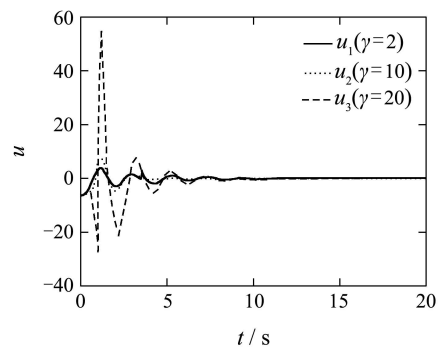
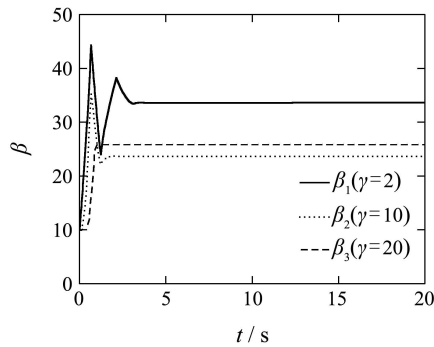
图 8 $\gamma = 50$ 时的状态轨迹Fig. 8 State trajectories under $\gamma = 50$ 

图 5 边界层厚度自适应曲线

Fig. 5 Boundary layer parameter

图 9 不同调节速率 γ 时的控制输入Fig. 9 Control input under different γ

图10 不同调节速率 γ 时的滑模增益曲线Fig. 10 Adaptive gain under different γ

4 结束语(Conclusion)

针对一类未知不确定非线性系统, 无需不确定项上下界等信息, 使用等式(2)中控制量能够实现良好的稳定控制. 为减少控制输入抖动并改善性能, 可采用等式(8)确定的控制量, 这时控制增益和边界层厚度作自适应调整. 相比较于无参数调节滑模控制输入的强高频颤抖, 直接自校正滑模控制方法基本消除了控制量的抖动, 且控制性能良好.

参考文献(References):

- [1] 刘金琨. 滑模变结构控制MATLAB仿真[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
(LIU Jinkun. *MATLAB Simulation for Sliding-mode Control*[M]. Beijing: Tsinghua university Press, 2005.)
- [2] KACHROOP, TOMIZUKAM. Chattering reduction and error convergence in the sliding mode control of a class of nonlinear system[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(7):1063 – 1068.
- [3] ERTUGRUL M, KAYNAK O. Gain adaptation in sliding mode control of robotic manipulators[J]. *International Journal of System Science*, 2000, 31(7): 1009 – 1106.
- [4] CHANG W D, HWANG R C, HSIEH J G. Application of an auto-tuning neuron to sliding mode control[J]. *IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics-Part C*, 2002, 32(3): 517 – 519.
- [5] LHEE C G, PARK J S, AHN H S, et al. Sliding mode-like fuzzy logic control with self-tuning the dead zone parameters[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2001, 9(2): 343 – 348.
- [6] LIN S C, CHEN Y Y. RBF network based sliding mode control[C] // *Proceeding of IEEE International Conference on System, Man and Cybernetics*. New York: IEEE, 1994, 5: 1957 – 1961.

作者简介:

张细政 (1978—), 男, 讲师, 博士研究生, 目前研究方向为非线性控制及在电气工程中的应用, E-mail: z_x_z2000@163.com;

王耀南 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 目前研究方向为智能控制及智能信息处理, E-mail: yaonan@hnu.cn.