第 27 卷第 1 期
2010 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 1
Jan. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)01−0059−10

水雷运动变时滞区间系统保性能非脆弱H_∞控制

肖 敏, 史忠科

(西北工业大学 自动化学院, 陕西 西安 710072)

摘要: 针对水雷运动控制试验中模型存在不确定性和综合误差难以确定的问题, 给出矩阵分解区间系统描述, 避免求二次方根的保守性, 设计了一种变时滞区间系统非脆弱H_∞保性能控制器, 基于LMI方法给出解决上述问题的凸优化解法, 设计的控制器对所有的不确定性、时变时滞和海流干扰, 保证闭环系统稳定性、二次型性能指标上界和干扰衰减水平. 并给出使性能函数上界最小的最优控制器设计算法和最小干扰衰减度, 用某型水雷不确定运动系统分析演示了该方法的有效性.

关键词: 变时滞区间系统; 脆弱性; 保性能控制; H_∞控制; LMI; 运动控制

中图分类号: TP273　　**文献标识码**: A

Non-fragile guaranteed-cost H-infinity control for mine motion in an interval system with time-varying delay

XIAO Min, SHI Zhong-ke

(College of Automation, Northwestern Polytechnical University, Xi'an Shaanxi 710072, China)

Abstract: To deal with the uncertainties and modeling errors in the mine motion control test, the interval system with matrix factorization is provided. This leads to avoid the conservative conditions in finding a square root. The non-fragile guaranteed-cost H-infinity controller for a dynamic interval system with time-varying delay is designed. A linear convex optimization algorithm is developed in terms of an effective LMI for solving the problem. This algorithm guarantees the closed-loop system stability, keeps the specified upper bound for the cost function, and realizes the desired disturbance attenuation for all admissible uncertainties and under all kinds of disturbing sea flow. The procedures for the controller design and the attainable disturbance reduction are also given. The effectiveness of this approach has been demonstrated in the analysis of certain types of mine motion with uncertainties.

Key words: interval system with time-varying delay; fragility; guaranteed cost control; H-infinity control; LMI; motion control

1 引言(Introduction)

现代海战中的航程远, 高精度战术要求的水雷控制系统, 很容易受到模型不确定和海流扰动影响, 航行雷体发射后的运动轨迹与预设弹道偏差很大, 甚至完全相反, 控制系统失稳. 目前传统的PID控制方法已经不能满足精确打击的控制性能要求, 必须加以改进. 由于水雷运动速度变化范围大, 加速过程, 初始条件有很大的不确定性, 目前研究动机座发射和加速运动过程是它的两大难点, 动机座发射引起初始条件不确定性, 加速过程对控制过程鲁棒性要求很高. 为进一步提高水雷的性能, 处理模型和海流干扰不确定性问题, 提高水雷的性能, 采用现代控制理论方法来设计控制系统. 文献[1]对于模型不确定, 给出了一种H_∞控制思路, 但没有给出具体的设计方法. 文献[2]设计了单输入单输出控制, 但没有解决多输入多输出问题, 文献[3,4]采用LMI方法给出了频域设计, 上述设计方法并没有考虑模型不确定问题, 对于水雷运动滞后系统鲁棒稳定性研究目前国内外公开文献较少.

为了避免打击目标失败的严重后果, 通常用实航试验数据辨识水雷水动力学参数, 并以此为依据进行水雷不确定航行边界预测, 提供水雷的适航条件, 达到精确打击的目的. 由于流体动力参数辨识模型在实际测量值和观测数据间存在误差(不确定性), 刚开始通过实验得到的水动力学模型系数矩阵A、输入矩阵B和滞后矩阵A_d都存在着不确定, 但其综合

收稿日期: 2008−07−07; 收修改稿日期: 2009−04−11.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60134010); 国家航空科技基金资助项目(2007ZD53053).

误差一时难以确定. 为了解决实航试验中这一问题, 保证水雷运动具有良好的稳操纵性, 本文考虑水雷动力学模型为滞后区间系统, 给出一种非脆弱保性能H_∞控制器设计方法, 并应用于水雷控制系统分析试验.

近年来, 关于区间系统和时滞系统的稳定和综合研究已取得了许多结果[5~13]. 区间系统具有全局性, 结果可靠, 能避免其他方法的局部性[11]. 文献[9]基于Riccati方程给出区间系统稳定性和控制器设计方法, 但控制输入矩阵为区间矩阵时, 对参数矩阵有列满秩的约束条件, 区间矩阵分解中要求平方根. 文献[10]研究区间系统保性能控制, 但没有考虑时滞和脆弱性问题, 结果由拟M–矩阵条件给出. 以上方法结论具有局限性和保守性, 在实际应用中, Riccati方程方法不能保证收敛, 而且控制器脆弱性问题经常出现[14~16], 系统初运行时, 控制器的微调, 以及控制器性能衰减时, 增益参数的变化引起控制器摄动, 传统的鲁棒控制方法表现出高度的脆弱性. 保性能控制[17~19]使不确定系统具有确定的二次性能指标上界, 而H_∞控制[9]是一种处理未建模干扰的有效方法. 把保性能控制和H_∞控制相结合, 运用于变时滞区间系统的鲁棒性研究中, 使闭环系统具有更好的动态性能.

2 水雷运动模型描述和问题提出(Mine motion model description and problem formulation)

在连体浮心坐标系上, 区别于鱼雷[20], 上浮水雷纵向平面运动的动力学和运动学方程推导为

$$
\begin{aligned}
&(m+\lambda_{11})\dot v_{\rm x}=T-\Delta G\cos\theta-\frac{1}{2}\rho v^2SC_{\rm xs},\\
&(m+\lambda_{22})\dot v_{\rm y}+(mx_{\rm c}+\lambda_{26})\dot\omega_{\rm z}=\\
&-mv_{\rm x}\omega_{\rm z}-\Delta G\sin\theta+\frac{1}{2}\rho v^2S(C_{\rm y}^{\alpha}\alpha+C_{\rm y}^{\alpha^3}(\alpha-\\
&\alpha(t-\tau))^3+C_{\rm y}^{\delta}\delta_{\rm e}+\Delta_\alpha+C_{\rm y}^{\bar\omega_{\rm z}}\bar\omega_{\rm z}),\\
&(J_{\rm z}+\lambda_{66})\dot\omega_{\rm z}+(mx_{\rm c}+\lambda_{26})\dot v_{\rm y}=\\
&-mx_{\rm c}v_{\rm x}\omega_{\rm z}+G(y_{\rm c}\cos\theta+x_{\rm c}\sin\theta)+\\
&\frac{1}{2}\rho v^2SL(m_{\rm z}^{\alpha}\alpha+m_{\rm z}^{\alpha^3}(\alpha-\alpha(t-\tau))^3+\\
&m_{\rm z}^{\delta_{\rm e}}\delta_{\rm e}+\Delta_\omega+m_{\rm z}^{\bar\omega_{\rm z}}\bar\omega_{\rm z}),\\
&\dot\theta=\omega_{\rm z},v=\sqrt{v_{\rm x}^2+v_{\rm y}^2},\\
&\alpha=-\arctan(v_{\rm y}/v_{\rm x}),\\
&\dot x_0=v_{\rm x}\cos\theta-v_{\rm y}\sin\theta,\\
&\dot y_0=v_{\rm x}\sin\theta+v_{\rm y}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

式中: $\bar\omega_{\rm z}=\omega\dfrac{L}{r}$, L为物体长度, S为截面面积, m为水雷质量, G为重量, $J_{\rm z}$为水雷浮心转动惯量, T为推力, $\Delta G=G-B$, B为浮力, $C_{\rm xs}$为阻力系数, λ_{11}, $\lambda_{22},\lambda_{26},\lambda_{66}$为附加质量, $C_{\rm y}^{\alpha},C_{\rm y}^{\delta},C_{\rm y}^{\bar\omega_{\rm z}}$为升力动导数, $m_{\rm z}^{\alpha},m_{\rm z}^{\delta_{\rm e}},m_{\rm z}^{\bar\omega_{\rm z}}$为俯仰力矩动导数, α为攻角, θ为俯仰角, $\omega_{\rm z}$为俯仰角速度, $\delta_{\rm e}$为水平舵角, $(x_{\rm c},y_{\rm c})$为重心坐标, (x_0,y_0)为地面坐标系的浮心坐标, $v,v_{\rm x},v_{\rm y}$为浮心速度及其分量. $\lambda_{11},\lambda_{22},\lambda_{26},\lambda_{66},C_{\rm xs},C_{\rm y}^{\alpha},C_{\rm y}^{\delta}$, $C_{\rm y}^{\bar\omega_{\rm z}},m_{\rm z}^{\alpha},m_{\rm z}^{\delta_{\rm e}},m_{\rm z}^{\bar\omega_{\rm z}}$为水动力辨识参数, 有确定临界范围, $\Delta_\alpha,\Delta_\omega$为模型误差.

水雷运动状态控制涉及到复杂的非线性问题, 实际中难以得到控制解, 通过试验获取水雷模型时, 在做了各种工程容许的假设后, 根据给定速度v和纵倾深度y_0, 在标称状态附近线性化得到纵向线性运动方程.

在给定的速度和纵倾深度下, 纵向小扰动运动的状态空间方程为

$$
\begin{aligned}
&\dot x(t)=Ax(t)+A_{\rm d}x(t-\tau(t))+Bu(t)+B_1w(t), \qquad (1)\\
&z(t)=Cx(t)+Du(t),\\
&x(t)=\varphi(t),t\in[-\tau_M,0],\\
&A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & a_{14} & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & a_{52} & 0 & a_{54} & 0\end{bmatrix},\\
&A_{\rm d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_{32} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\\
&B=[0\ \ b_2\ \ b_3\ \ 0\ \ 0]^{\rm T},B_{\bf 1}=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1]^{\rm T}.
\end{aligned}
$$

状态向量$x(t)=[v,\alpha,\omega_{\rm z},\theta,y_0]^{\rm T}$, 控制输入$u(t)\in\mathbb{R}^p$, 被控输出$z(t)\in\mathbb{R}^p$, 外部干扰输入$w(t)\in\mathbb{R}^w$, $w(t)\in{\rm L}_2[0,\infty]$. A为状态矩阵, $a_{ij}(1\leqslant i\leqslant 5,1\leqslant j\leqslant 5)$为水动力参数系数:

$$
\begin{aligned}
&a_{11}=-\rho SC_{\rm xs}/mv_0,a_{12}=-a_{14}=\Delta G/m,\\
&a_{21}=((\lambda_{26}\rho SLm_{\rm z}^{\alpha}-(J_{\rm z}+\lambda_{66})\rho SC_{\rm y}^{\alpha})+\\
&\qquad((J_{\rm z}+\lambda_{66})\lambda_{22}-\lambda_{26}^2)\rho SC_{\rm xs}/m\alpha_0)/D_{26}-\\
&\qquad((J_{\rm z}+\lambda_{66})+\lambda_{26}x_{\rm c})\rho SC_{\rm y}^{\delta}\delta_{\rm e0}/D_{26},\\
&a_{22}=(((\frac{1}{2}\rho SLm_{\rm z}^{\alpha}\lambda_{26}-\frac{1}{2}\rho SC_{\rm y}^{\alpha}(J_{\rm z}+\lambda_{66}))+\\
&\qquad\frac{1}{2}\rho SC_{\rm xs}((J_{\rm z}+\lambda_{66})\lambda_{22}-\lambda_{26}^2)/m)/D_{26}-\\
&\qquad\frac{1}{2}\rho SC_{\rm xs}/m)v_0-((J_{\rm z}+\lambda_{66})\lambda_{22}-\\
&\qquad\lambda_{26}^2)\Delta G\alpha_0/mD_{26}v_0,
\end{aligned}
$$

$$a_{23}=((J_{\rm z}+\lambda_{66})(m-\frac{1}{2}\rho SLC_{\rm y}^{\bar{\omega}_{\rm z}})-\frac{1}{2}\rho SL^2m_{\rm z}^{\bar{\omega}_{\rm z}}\lambda_{26})/D_{26},$$

$$a_{24}=((J_{\rm z}+\lambda_{66})\lambda_{22}-\lambda_{26}^2)\Delta G\alpha_0/mD_{26}v_0,$$

$$b_2=-\frac{1}{2}\rho SC_{\rm y}^{\delta}((J_{\rm z}+\lambda_{66})+\lambda_{26}x_{\rm c})v_0/D_{26},$$

$$a_{31}=((\rho SLm_{\rm z}^{\alpha}(m+\lambda_{22})-\rho S\lambda_{26}(C_{\rm xs}+C_{\rm y}^{\alpha}))\alpha_0/D_{26}-(2(m+\lambda_{22})x_{\rm c}+\rho SLm_{\rm z}^{\delta}\lambda_{26})\delta_{\rm e0}/D_{26})v_0,$$

$$a_{32}=(\frac{1}{2}\rho SLm_{\rm z}^{\alpha}(m+\lambda_{22})-\frac{1}{2}\rho S\lambda_{26}(C_{\rm xs}+C_{\rm y}^{\alpha}))v_0^2/D_{26}+\lambda_{26}\Delta G\alpha_0/D_{26},$$

$$a_{33}=(\lambda_{26}(m-\frac{1}{2}\rho SLC_{\rm y}^{\bar{\omega}_{\rm z}})-\frac{1}{2}\rho SL^2m_{\rm z}^{\bar{\omega}_{\rm z}}(m+\lambda_{22}))v_0/D_{26},$$

$$a_{34}=-\lambda_{26}\Delta G\alpha_0/D_{26},$$

$$b_3=-((m+\lambda_{22})x_{\rm c}+\frac{1}{2}\rho SLm_{\rm z}^{\delta}\lambda_{26})v_0^2/D_{26},$$

$$a_{34}=1,a_{52}=-a_{54}=-v_0,$$

$$D_{26}=(J_{\rm z}+\lambda_{66})(m+\lambda_{22})-\lambda_{26}^2.$$

B为输入矩阵, B_1为干扰矩阵, C,D为适当维数的常数矩阵. 由于$w(t)$为统计特性未知的干扰信号, 无法估计它的具体大小, 只能在限定海洋环境航行条件下, 给出$w(t)$的上界. 滞后$\tau(t)$是系统状态时滞的非负时变有界函数, 假设对任意时刻t存在正数τ_M, 满足条件:

$$0\leqslant\tau(t)\leqslant\tau_M<\infty,\ \dot{\tau}(t)\leqslant\lambda<1. \tag{2}$$

$\varphi(t)\in\mathbb{C}^n[-\tau_M,0]$是关于$t$ 的连续实值向量初始函数. $A,A_{\rm d}\in\mathbb{R}^{n\times n}$和$B\in\mathbb{R}^{n\times p}$ 中的元素不能完全确定, 随水动力学参数变化, 但它们属于某些确定的区间[7,8]:

设$A=[a_{ij}],A_{\rm d}=[a_{{\rm d}ij}],B=[b_{ij}]$.

且满足

$$a_{ij}^m<a_{ij}<a_{ij}^M,i,j=1,\cdots,n,$$
$$a_{{\rm d}ij}^m<a_{{\rm d}ij}<a_{{\rm d}ij}^M,i,j=1,\cdots,n,$$
$$b_{ij}^m<b_{ij}<b_{ij}^M,i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,p.$$

a_{ij}^m,a_{ij}^M; $a_{{\rm d}ij}^m,a_{{\rm d}ij}^M$; b_{ij}^m,b_{ij}^M分别是a_{ij}, $a_{{\rm d}ij}$, b_{ij}的上界和下界, 它们是已知值, 表示为矩阵:

$$A^m=[a_{ij}^m]_{n\times n},A^M=[a_{ij}^M]_{n\times n},$$
$$A_{\rm d}^m=[a_{{\rm d}ij}^m]_{n\times n},A_{\rm d}^M=[a_{{\rm d}ij}^M]_{n\times n},$$
$$B^m=[b_{ij}^m]_{n\times p},\ \ B^M=[b_{ij}^M]_{n\times p}.$$

定义区间矩阵

$$[A^m,A^M]=\{[a_{ij}]:a_{ij}^m\leqslant a_{ij}\leqslant a_{ij}^M,i,j=1,\cdots,n\},$$
$$[A_{\rm d}^m,A_{\rm d}^M]=\{[a_{{\rm d}ij}]:a_{{\rm d}ij}^m\leqslant a_{{\rm d}ij}\leqslant a_{{\rm d}ij}^M,i,j=1,\cdots,n\},$$
$$[B^m,B^M]=\{[b_{ij}]:b_{ij}^m\leqslant b_{ij}\leqslant b_{ij}^M,i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,p\}.$$

或

$$A\in[A^m,A^M],A_{\rm d}\in[A_{\rm d}^m,A_{\rm d}^M],B\in[B^m,B^M].$$

取

$$A_0=(A^M+A^m)/2,\ A_{\rm d0}=(A_{\rm d}^M+A_{\rm d}^m)/2,$$
$$B_0=(B^M+B^m)/2$$

是介于矩阵A^m,A^M $A_{\rm d}^m,A_{\rm d}^M$; B^m,B^M之间的平均矩阵.

$$M=A^M-A_0,M_{\rm d}=A_{\rm d}^M-A_{\rm d0},N=B^M-B_0$$

是介于矩阵A^M,A_0; $A_{\rm d}^M,A_{\rm d0}$; B^M,B_0之间的偏差矩阵, 为最大偏差矩阵.

对于

$$A=A_0\pm\Delta A,A_{\rm d}=A_{\rm d0}\pm\Delta A_{\rm d},B=B_0\pm\Delta B,$$

偏差矩阵:

$$\Delta A=\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_{ij}M_{ij},\Delta A_{\rm d}=\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}M_{{\rm d}ij},$$
$$\Delta B=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}N_{ij}$$

是非负的, 且

$$|\lambda_{ij}|\leqslant1,i,j=1,\cdots,n,|\alpha_{ij}|\leqslant1,i,j=1,\cdots,n,$$
$$|\beta_{ij}|\leqslant1,i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,p.$$

$\Delta A,\Delta A_{\rm d},\Delta B$只有$(i,j)$位置元素$m_{ij},m_{{\rm d}ij},n_{ij}$非零, 其余元素均为零[9,12,13]. 矩阵$M,M_{\rm d},N$的秩至多为1, 根据矩阵满秩分解, 可分解为一个列向量和一个行向量的乘积, 即$m_{ij}e_i\times{e_j}^{\rm T},m_{{\rm d}ij}e_i\times{e_j}^{\rm T},n_{ij}e_i\times{e_j}^{\rm T}$, 给出矩阵分解等价形式:

$$A=A_0\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}M_{ij}=$$
$$A_0\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{ij}m_{ij}e_i\times{e_j}^{\rm T}=A_0\pm D_1F_1E_1,$$
$$A_{\rm d}=A_{\rm d0}\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{{\rm d}ij}M_{{\rm d}ij}=$$
$$A_{\rm d0}\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{{\rm d}ij}m_{{\rm d}ij}e_i\times{e_j}^{\rm T}=A_{\rm d0}\pm D_{\rm d}F_{\rm d}E_{\rm d},$$
$$B=B_0\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}N_{ij}=$$
$$B_0\pm\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\beta_{ij}n_{ij}e_i\times{e_j}^{\rm T}=B_0\pm D_2F_2E_2.$$

其中:

$$F_1=\mathrm{diag}\{\lambda_{ij}\}, F_{\mathrm{d}}=\mathrm{diag}\{\alpha_{ij}\}, F_2=\mathrm{diag}\{\beta_{ij}\}$$

为对角矩阵, 表示系统的时变不确定性, 满足

$$F_1^{\mathrm{T}}F_1\leqslant I_{n^2}, F_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}(t)F_{\mathrm{d}}(t)\leqslant I_{n^2}, F_2^{\mathrm{T}}F_2\leqslant I_{(n\times p)\times(n\times p)}. \tag{3}$$

由矩阵集合相等的定义, 可以验证, 变时滞区间系统(1)与如下不确定系统等价[9]:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&(A_0+D_1F_1(t)E_1)x(t)+\\&(A_{\mathrm{d}0}+D_{\mathrm{d}}F_{\mathrm{d}}(t)E_{\mathrm{d}})x(t-\tau(t))+\\&(B_0+D_2F_2(t)E_2)u(t)+B_1w(t).\end{aligned}$$

考虑控制器增益摄动变化, 实际控制输入为$u=(K_{p\times n}+\Delta K)x$, 其中$K_{p\times n}$和$\Delta K=D_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{k}}E_{\mathrm{k}}$是控制器增益和摄动, $D_{\mathrm{k}}, E_{\mathrm{k}}$是已知常数矩阵, $F_{\mathrm{k}}(t)$是不确定矩阵

$$F_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}F_{\mathrm{k}}\leqslant\rho I_{(p\times n)\times(p\times n)}, \tag{4}$$

$\rho>0$控制器增益范围.

上述系统的性能指标函数为

$$J=\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)]\mathrm{d}t, \tag{5}$$

其中R_1, R_2是给定加权矩阵.

闭环系统:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t)=&[(A_0+D_1F_1(t)E_1)+(B_0+D_2F_2(t)E_2)(K+\\&D_{\mathrm{k}}F_{\mathrm{k}}(t)E_{\mathrm{k}})]x(t)+(A_{\mathrm{d}0}+\\&D_{\mathrm{d}}F_{\mathrm{d}}(t)E_{\mathrm{d}})x(t-\tau(t))+B_1w(t).\end{aligned} \tag{6}$$

本文的目的: 设计非脆弱保性能H_{∞}控制器, 对于给定的外界干扰衰减度γ和非脆弱性δ, 不确定性(3)(4), 满足以下性质:

1) 闭环系统(6)是渐近稳定的.

2) 在零初始条件下, 对任意非零$w(t)\in\mathrm{L}_2[0,\infty]$,

$$\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2. \tag{7}$$

3) 保性能指标存在上确界$J\leqslant J^*$.

引理 1[21] 对于适当维数的矩阵Y, M, N, 其中Y是对称的, 则$Y+M\varPsi N+N^{\mathrm{T}}\varPsi^{\mathrm{T}}M^{\mathrm{T}}<0$对所有满足$\varPsi^{\mathrm{T}}\varPsi\leqslant I$的矩阵$\varPsi$成立, 当且仅当存在一个常数$\varepsilon>0$使得

$$Y+\varepsilon MM^{\mathrm{T}}+\varepsilon^{-1}N^{\mathrm{T}}N<0.$$

3 主要结果(Main results)

首先给出使闭环系统渐近稳定, 且二次性能指标有上界的非脆弱保性能控制器存在的充分条件:

定理 1 对于变时滞系统(1)(令$w(t)\equiv 0$), 保性能指标(5), 时变条件(2), $u(t)=Kx(t)$是系统的一个非脆弱保性能控制器, 如果存在正定对称矩阵P, Q, 使得对于不确定性(3)(4), 满足:

$$\begin{bmatrix}\Delta_1 & PA_{\mathrm{d}} & (K+\Delta K)^{\mathrm{T}}\\ A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & -(1-\lambda)Q & 0\\ K+\Delta K & 0 & -R_2^{-1}\end{bmatrix}<0. \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta_1=&Q+R_1+P(A+B(K+\Delta K))+\\&(A+B(K+\Delta K))^{\mathrm{T}}P.\end{aligned}$$

闭环系统性能指标满足

$$J\leqslant J^*=x_0^{\mathrm{T}}Px_0+\int_{-\tau_M}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(t)Q\varphi(t)\mathrm{d}t. \tag{9}$$

证 构造Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$V(x(t))=x^{\mathrm{T}}(t)Px(t)+\int_{t-\tau(t)}^{t}x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)\mathrm{d}t,$$

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x(t))\leqslant\\&x^{\mathrm{T}}(t)[P(A+B(K+\Delta K)x(t))+\\&(A+B(K+\Delta K)x(t))^{\mathrm{T}}P]x(t)+\\&2x^{\mathrm{T}}(t)PA_{\mathrm{d}}(t)x(t-\tau(t))+x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)-\\&x^{\mathrm{T}}(t-\tau(t))Qx(t-\tau)(1-\lambda),\end{aligned}$$

$$\dot{V}(x(t))+x^{\mathrm{T}}(t)(R_1+(K+\Delta K)^{\mathrm{T}}R_2(K+\Delta K))x(t)=$$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-\tau(t))\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}\Delta_1 & PA_{\mathrm{d}}\\ A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & -(1-\lambda)Q\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t)\\ x(t-\tau(t))\end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}\Delta_1=&Q+R_1+P(A+B(K+\Delta K))+\\&(A+B(K+\Delta K))^{\mathrm{T}}P.\end{aligned}$$

由不等式(8)可知,

$$\begin{aligned}&\dot{V}(x(t))<\\&-x^{\mathrm{T}}(t)(R_1+(K+\Delta K)^{\mathrm{T}}R_2(K+\Delta K))x(t)<0.\end{aligned}$$

由Lyapunov稳定性理论, 系统(1)渐近稳定, 且

$$\begin{aligned}J=&\int_0^{\infty}\left[x^{\mathrm{T}}(t)R_1x(t)+u^{\mathrm{T}}(t)R_2u(t)\right]\mathrm{d}t\leqslant\\&-\int_0^{\infty}\dot{V}(x(t))\mathrm{d}t\leqslant x_0^{\mathrm{T}}Px_0+\int_{-\tau_M}^{0}\varphi(t)^{\mathrm{T}}Q\varphi(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

下面给出非脆弱H_{∞}保性能控制存在充分条件:

定理 2 给定常数$\gamma>0$, 对系统(1)和保性能指标(5), 时变条件(2), $u(t)=Kx(t)$是系统的一个非脆弱保性能H_{∞}控制器, 如果存在对称正定矩阵P, Q, 使得对不确定性(3)(4), 满足:

$$
\begin{aligned}
&\Sigma=\begin{bmatrix}
\Delta_1 & (K+\Delta K)^{\mathrm{T}} & (C+D(K+\Delta K))^{\mathrm{T}} & PA_{\mathrm{d}} & PB_1\\
K+\Delta K & -R_2^{-1} & 0 & 0 & 0\\
C+D(K+\Delta K) & 0 & -I & 0 & 0\\
A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -(1-\lambda)Q & 0\\
B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I
\end{bmatrix}<0,\\
&\Delta_1=Q+R_1+P(A+B(K+\Delta K))+(A+B(K+\Delta K))^{\mathrm{T}}P.
\end{aligned}\tag{10}
$$

保性能上界J^*由式(9)给出.

证　式(10)隐含着式(8), 由定理1, 闭环系统(1)渐近稳定, 性能指标由式(8)给出. 只需证明干扰抑制能力$\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2$成立. 在零初始条件下, 即$x(t)=0, t\in[-\tau_M,0]$, 考虑性能指标

$$
J=\int_0^{\infty}[Z(t)^{\mathrm{T}}Z(t)-\gamma^2 w(t)^{\mathrm{T}}w(t)]\mathrm{d}t.
$$

对任意非零$w(t)\in \mathrm{L}_2[0,\infty]$, 有

$$
J\leqslant\int_0^{\infty}[z(t)^{\mathrm{T}}z(t)-\gamma^2 w(t)^{\mathrm{T}}w(t)+\dot V(x(t)]\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\phi(t)^{\mathrm{T}}\psi\phi(t)\mathrm{d}t
$$

成立. 定义

$$
\begin{aligned}
&\phi(t)=[x(t)^{\mathrm{T}}\ x(t-\tau(t))^{\mathrm{T}}\ w(t)^{\mathrm{T}}],\\
&\psi=\Sigma,
\end{aligned}
$$

由于$\psi<0$隐含着$\|z(t)\|_2<\gamma\|w(t)\|_2$, 因此, 当$\psi<0$时, 对于给定的$\gamma>0$, $\delta>0$, 闭环系统渐近稳定.

下面给出非脆弱H_∞保性能控制器设计方法:

定理 3　给定的常数$\gamma>0$, $\delta>0$, 对系统(1)、保性能指标(5)和时变条件(2), 如果存在标量$\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0,\rho_1>0,\rho_2>0$, 矩阵$W$和对称正定矩阵$U$和$V$, 使得以下LMI成立:

$$
\begin{bmatrix}
\Delta_3 & W^{\mathrm{T}} & (CU{+}DW)^{\mathrm{T}} & A_{\mathrm{d}}V & BD_{\mathrm{k}} & 0 & W^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & UE_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} & UE_1^{\mathrm{T}} & U & U & B_1\\
W & -R_2^{-1} & 0 & 0 & D_{\mathrm{k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
CU{+}DW & 0 & -I & 0 & DD_{\mathrm{k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
VA_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & -(1{-}\lambda)V & 0 & VE_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}} & D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} & D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & 0 & -{\rho_2}^{-1}I & 0 & D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & E_{\mathrm{d}}V & 0 & -\rho_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
E_2W & 0 & 0 & 0 & E_2D_{\mathrm{k}} & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
E_{\mathrm{k}}U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^{-1}\rho_1 I & 0 & 0 & 0 & 0\\
E_1U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0\\
U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -{R_1}^{-1} & 0 & 0\\
U & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -V & 0\\
{B_1}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I
\end{bmatrix}<0.\tag{11}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
\Delta_3=\ &AU+BW+(AU+BW)^{\mathrm{T}}+\\
&\varepsilon_1 D_1{D_1}^{\mathrm{T}}+\varepsilon_2 D_2{D_2}^{\mathrm{T}}+\rho_2 D_{\mathrm{d}}{D_{\mathrm{d}}}^{\mathrm{T}}.
\end{aligned}
$$

控制律$u(t)=WU^{-1}x(t)$是系统的一个二次非脆弱H_∞保性能控制律, 保性能上界J^*由式(9)给出.

证　首先将式(10)中的不确定项ΔK, ΔA_{d}分解出来, 通过简单的计算, 式(10)等价于:

$$
Y_1+\Sigma_1+\Sigma_1^{\mathrm{T}}+\Sigma_2+\Sigma_2^{\mathrm{T}}<0.\tag{12}
$$

$$
\Sigma_1=\begin{bmatrix} PBD_{\mathrm{k}}\\ D_{\mathrm{k}}\\ DD_{\mathrm{k}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F_{\mathrm{k}}[E_{\mathrm{k}}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0],
$$

$$
\Sigma_2=\begin{bmatrix} PD_{\mathrm{d}}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F_{\mathrm{d}}[0\ \ 0\ \ 0\ \ E_{\mathrm{d}}\ \ 0].
$$

$$Y_1=\begin{bmatrix} R_1+Q+P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P & K^{\mathrm{T}} & (C+DK)^{\mathrm{T}} & PA_{\mathrm{d}} & PB_1\\ K & -R_2^{-1} & 0 & 0 & 0\\ C+DK & 0 & -I & 0 & 0\\ A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -(1-\lambda)Q & 0\\ B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},\tag{13}$$

由引理1, 式(12)对于所有不确定性满足

$$F_{\mathrm{k}}(t)F_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}(t)<\delta I, F_{\mathrm{d}}F_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}}\leqslant I_{n^2},$$

当且仅当存在标量$\rho_1>0,\rho_2>0$, 使得

$$Y_1+\rho_1\begin{bmatrix}PBD_{\mathrm{k}}\\ D_{\mathrm{k}}\\ DD_{\mathrm{k}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PBD_{\mathrm{k}}\\ D_{\mathrm{k}}\\ DD_{\mathrm{k}}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\delta\rho_1^{-1}[E_{\mathrm{k}}\ 0\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}[E_{\mathrm{k}}\ 0\ 0\ 0\ 0]+\rho_2\begin{bmatrix}PD_{\mathrm{d}}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}PD_{\mathrm{d}}\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}+\rho_2^{-1}[0\ 0\ 0\ E_{\mathrm{d}}\ 0]^{\mathrm{T}}[0\ 0\ 0\ E_{\mathrm{d}}\ 0]<0\tag{14}$$

成立. 应用Schur补性质, 式(13)等价于:

$$\begin{bmatrix} \Delta_2 & K^{\mathrm{T}} & (C+DK)^{\mathrm{T}} & PA_{\mathrm{d}} & PBD_{\mathrm{k}} & 0 & PB_1\\ K & -R_2^{-1} & 0 & 0 & D_{\mathrm{k}} & 0 & 0\\ C+DK & 0 & -I & 0 & DD_{\mathrm{k}} & 0 & 0\\ A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -(1-\lambda)Q & 0 & E_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & 0\\ (PBD_{\mathrm{k}})^{\mathrm{T}} & D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} & (DD_{\mathrm{k}})^{\mathrm{T}} & 0 & -\rho_1^{-1}I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_{\mathrm{d}} & 0 & -\rho_2 I & 0\\ B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}<0,$$

$$\Delta_2=R_1+Q+P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P+\delta\rho_1^{-1}E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}E_{\mathrm{k}}+\rho_2(PD_{\mathrm{d}}D_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}}P).$$

其次将式(10)中不确定项$\Delta A,\Delta B$分离出来, 适当变形, 上述不等式等价于

$$Y_2+\varXi_1+\varXi_1^{\mathrm{T}}+\varXi_2+\varXi_2^{\mathrm{T}}<0,\tag{15}$$

$$Y_2=\begin{bmatrix} \Delta_2 & K^{\mathrm{T}} & (C+DK)^{\mathrm{T}} & PA_{\mathrm{d}} & PBD_{\mathrm{k}} & 0 & PB_1\\ K & -R_2^{-1} & 0 & 0 & D_{\mathrm{k}} & 0 & 0\\ C+DK & 0 & -I & 0 & DD_{\mathrm{k}} & 0 & 0\\ A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -(1-\lambda)Q & 0 & E_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}} & 0\\ (PBD_{\mathrm{k}})^{\mathrm{T}} & D_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} & (DD_{\mathrm{k}})^{\mathrm{T}} & 0 & -\rho_1^{-1}I & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & E_{\mathrm{d}} & 0 & -\rho_2 I & 0\\ B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix},$$

$$\Delta_2=R_1+Q+P(A+BK)+(A+BK)^{\mathrm{T}}P+\delta\rho_1^{-1}E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}}E_{\mathrm{k}}+\rho_2(PD_{\mathrm{d}}D_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}}P),$$

$$\varXi_1=\begin{bmatrix}PD_1\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F_1[E_1\,0\,0\,0\,0\,0],\varXi_2=\begin{bmatrix}PD_2\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}F_2[E_2K\,0\,0\,0\,E_2D_K\,0].$$

由引理1, 当且仅当存在标量$\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$使得下列不等式成立:

$$Y_2 + \varepsilon_1 \begin{bmatrix} PD_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PD_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} +$$

$$\varepsilon_1^{-1}[E_1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}[E_1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]+$$

$$\varepsilon_2 \begin{bmatrix} PD_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} PD_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} +$$

$$\varepsilon_2^{-1}[E_2K\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ E_2D_{\mathrm{k}}\ \ 0]^{\mathrm{T}} \cdot [E_2K\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ E_2D_{\mathrm{k}}\ \ 0] < 0.$$

应用Schur补性质, 等价于下列不等式:

$$\begin{bmatrix}
\Delta_3 & K^{\mathrm{T}} & (C+DK)^{\mathrm{T}} & PA_{\mathrm{d}} & PBD_{\mathrm{k}} & 0 & K^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & E_{\mathrm{k}}^{\mathrm{T}} & E_1^{\mathrm{T}} & I & I & PB_1 \\
K & -R_2{}^{-1} & 0 & 0 & D_{\mathrm{k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
C+DK & 0 & -I & 0 & DD_{\mathrm{k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
A_{\mathrm{d}}^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & -(1-\lambda)Q & 0 & E_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
D_{\mathrm{k}}{}^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}P & D_{\mathrm{k}}{}^{\mathrm{T}} & D_{\mathrm{k}}{}^{\mathrm{T}}D^{\mathrm{T}} & 0 & -\rho_1{}^{-1}I & 0 & D_2^{\mathrm{T}}E_2^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & E_{\mathrm{d}} & 0 & -\rho_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E_2K & 0 & 0 & 0 & E_2D_{\mathrm{k}} & 0 & -\varepsilon_2 I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E_{\mathrm{k}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\delta^{-1}\rho_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\
E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\varepsilon_1 I & 0 & 0 & 0 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_1{}^{-1} & 0 & 0 \\
I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Q^{-1} & 0 \\
B_1^{\mathrm{T}}P & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma^2 I
\end{bmatrix} < 0.$$

其中

$$\Delta_3 = P(A+BK) + (A+BK)^{\mathrm{T}}P + P(\varepsilon_1 D_1 D_1{}^{\mathrm{T}} + \varepsilon_2 D_2 D_2{}^{\mathrm{T}} + \rho_2 D_{\mathrm{d}} D_{\mathrm{d}}{}^{\mathrm{T}})P.$$

分别左乘和右乘矩阵$\mathrm{diag}\{P^{-1}\ \ I\ \ Q^{-1}\ \ \cdots\ \ I\}$, 定义$U = P^{-1}, W = KP^{-1}, V = Q^{-1}$, 上述不等式等价于(11), 性能指标上界为(9).

注 1　式(11)是关于变量$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \rho_1, \rho_2, U, V, W$的LMI, 利用MATLAB中LMI工具箱的feasp函数求解这个LMI的可行性问题[22], 具体求解过程:

1) 输入系统矩阵.

2) setlmis([]); %初始化LMI系统.

3) X=lmivar(type, struct); %定义矩阵变量到LMI系统中.

4) lmiterm(termID, A, B, flag); %确定LMI中各项的内容. 式(11)LMI对角块矩阵只需定义上三角或下三角块中各项的内容.

5) lmisys=getlmis; %返回这个LMI系统的内部描述lmisys, 直接传递到LMI求解工具.

6) [tmin, xfeasp]=feasp(lmisys, options, target); %求解LMI系统定义的LMI约束条件的可行性问题, feasp解决凸优化问题$\min t$ s.t.$A(x) - B(x) \leqslant tI$, 如果tmin<0, 则系统是可行的, 此时xfeasp给出一个可行解, 进而用dec2mat得到系统lmisys矩阵变量的一个可行解, 得到控制律及性能指标.

下面通过求解一个凸优化问题, 给出系统鲁棒性能指标上界最小化的最优保性能控制律.

定理 4　对于给定的常数$\gamma > 0$, 系统(1)和保性能指标(5), 如果以下优化问题:

$$\min_{\varepsilon,\rho,r,U,V,W,Y} r + \mathrm{tr}(Y),$$

$$\text{s.t i) 式(11),}$$

$$\text{ii)} \begin{bmatrix} -Y & M^{\mathrm{T}} \\ M & -V \end{bmatrix} < 0,$$

$$\text{iii)} \begin{bmatrix} -r & x_0^{\mathrm{T}} \\ x_0 & -U \end{bmatrix} < 0$$

有解$\bar{\varepsilon}, \bar{\rho}, \bar{r}, \bar{U}, \bar{V}, \bar{W}, \bar{Y}$, 控制律$u(t) = WU^{-1}x(t)$是使性能指标上界(9)最小化的最优保性能控制律, 利用LMI工具箱的mincx函数求解此优化问题,

这里$\int_{-\tau_M}^{0}\varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t = MM^{\mathrm{T}}$.

4 在水雷运动系统中的应用(Application to mine motion)

水雷上浮攻击水面目标, 时间短、操稳定性要求高. 一般地, 操舵机构惯性滞后产生舵面时延, 引起的附加流体动力和力矩近似为$\dot\alpha$的函数, 实际上应是$\alpha(t)-\alpha(t-\tau(t))$的函数, 其中$\tau(t)$是舵面时延, 如果不做这样的近似, 水雷运动系统应是变时滞区间系统. 考虑水雷在速度20 m/s和深度300 m下, 变时滞区间系统(1):

$$A_0=\begin{bmatrix} -0.6736 & 1.1448 & 0 & -1.1448 & 0\\ -0.0124 & -3.1762 & 0.2163 & 8.3454\times10^{-4} & 0\\ 0.0539 & 52.3465 & 5.7163 & 0.0258 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -20 & 0 & 20 & 0\end{bmatrix},$$

$$A_{\mathrm{d}0}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -0.0124 & -3.1762 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 52.3465 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$B_0=\begin{bmatrix} 0\\ -0.5481\\ -17.5204\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, B_1=\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$M=\begin{bmatrix} 0.21 & 0.33 & 0 & 0.33 & 0\\ 0.003 & 0.96 & 0.006 & 2\times10^{-4} & 0\\ 0.003 & 15 & 1.8 & 0.003 & 0\\ 0 & 0 & 0.3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$M_{\mathrm{d}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0.003 & 0.96 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \tag{16}$$

$$N=[0\ \ 1.5\ \ 5\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, D_{\mathrm{k}}=[0.01\ \ 0\ \ 0.01\ \ 0\ \ 0.1],$$
$$E_{\mathrm{k}}=I_5, \delta=0.4, \gamma=1.$$

变时滞初始函数

$$\varphi(t)=[\mathrm{e}^{t+1}\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}, t\in[-1.1,0],$$
$$\int_{-1.1}^{0}\varphi(t)\varphi^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t=MM^{\mathrm{T}},$$
$$M=[1.8125\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\mathrm{T}}.$$

取性能指标(5)的加权矩阵$R_2=I_1, R_1=I_5$, 求解定理3和4, 得可行解

$$U=\begin{bmatrix} 0.1183 & 0.0006 & 0.0267 & 0.0069 & -0.0813\\ 0.0006 & 0.0340 & 0.0401 & 0.0210 & -0.0985\\ 0.0267 & 0.0401 & 2.5227 & -0.1452 & -0.1359\\ 0.0069 & 0.0210 & -0.1452 & 0.0662 & -0.2461\\ -0.0813 & -0.0985 & -0.1359 & -0.2461 & 1.1686\end{bmatrix},$$

$$W=[0.0433\ \ 0.1460\ \ 4.6748\ \ 0.0757\ \ -0.6268]^{\mathrm{T}},$$
$$\varepsilon_1=3, \varepsilon_2=4, \rho_1=5, \rho_2=6,$$

最优保性能指标$J^*=26.8027$, 相应的最优状态反馈控制律

$$K=[1.3280\ \ -5.6769\ \ 2.6808\ \ 23.0114\ \ 3.7360].$$

取3组数据$F_1=F_{\mathrm{d}}=\sin(5.00\pi t), F_2=-\cos(2.00\pi t), F_{\mathrm{k}}=0.5916\sin(10.00\pi t)$(虚线), $F_1=F_{\mathrm{d}}=F_2=Fk=1$(实线)和$F_1=F_{\mathrm{d}}=F_2=Fk=-1$(点划线). 根据条件(2)和实际时滞要求, 取有威慑性的变时滞函数$\tau(t)=1+0.1\sin\ t$, $0.9\leqslant\tau(t)\leqslant1.1$, 动态响应结果如图1～图5.

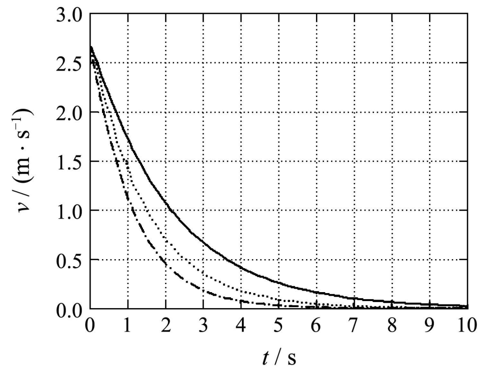

图 1 3种速度

Fig. 1 Three class of velocity

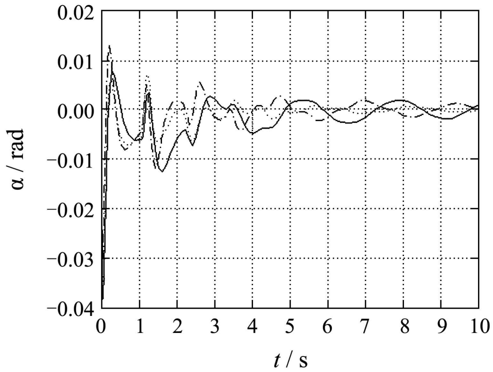

图 2 3种攻角

Fig. 2 Three class of attack angle

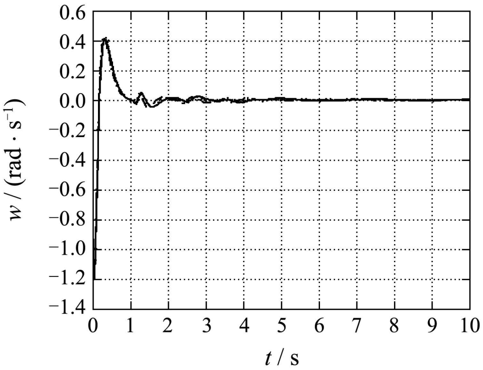

图 3　3种俯仰角速度

Fig. 3　Three class of pitching angular velocity

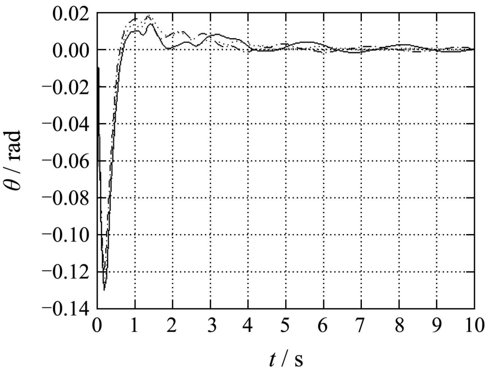

图 4　3种俯仰角

Fig. 4　Three class of pitching angle

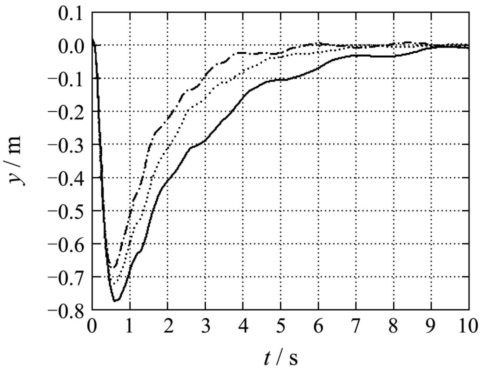

图 5　3种纵倾深度

Fig. 5　Three class of trim depth

由图1~图5可见, 干扰衰减γ的非脆弱最优保性能H_∞控制器鲁棒稳定, 对介于最大和最小界之间不确定性和时变时滞, 有良好的响应性能.

所受的干扰是随机干扰, 为了简化篇幅, 取图1~图5中介于最大和最小界之间不确定的动态响应轨迹数据$F_1 = F_{\rm d} = \sin(5.00\pi t), F_2 = -\cos(2.00\pi t), F_{\rm k} = 0.5916\sin(10.00\pi t)$和变时滞函数, 做抗干扰动态响应, 系统输出结果如图6, 图7.

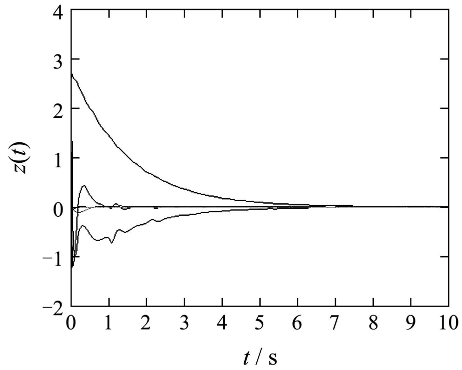

图 6　无外界干扰的控制输出轨迹

Fig. 6　Output trajectory $z(t)$ without stochastic disturbance

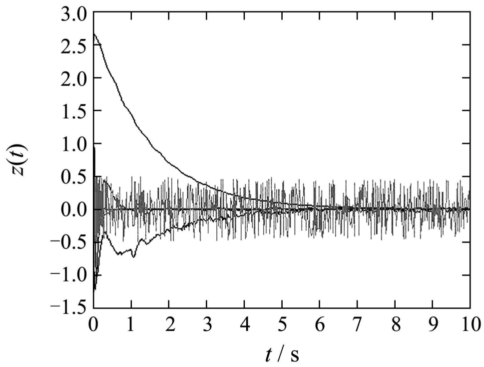

图 7　有外界干扰和控制输出轨迹

Fig. 7　Output trajectory $z(t)$ with stochastic disturbance

由定理3和4可求得最小H_∞性能指标$\min\gamma$ (*号点)和相应的保性能指标上界J^*如图8和表1:

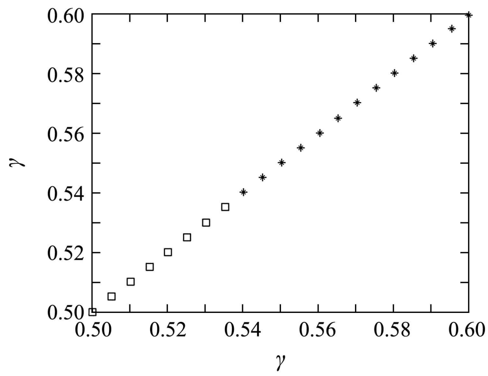

图 8　最小干扰衰减度γ

Fig. 8　Minimum values of the disturbance attenuation

表 1　γ和相应的性能指标上界变化

Table 1　γ and corresponding changes in the upper bound of cost function

γ	2	1	0.9	0.545 $\min\gamma$
J^*	20.8529	21.5691	25.2605	57.6099

图6、图7表明控制器具有较强的抗干扰能力, 干扰引起的扰动振幅小, 鲁棒性强.

总之,响应结果保证了系统渐近稳定和保性能指标J^*和干扰衰减度γ, $\|z(t)\|_2 < 0.545\|w(t)\|_2$. 在本例中, 矩阵$M, M_{\rm d}, N$参数摄动范围达到30%, 说明本文方法是有效的, 实际应用中D_1, D_2, E_1, E_2的选择灵活性更大, 减少了文献[9]中常规区间矩阵求二次平方根的保守性, 也比文献[10]计算方法简单.

5 结论(Conclusion)

本文根据水雷运动控制试验中模型误差较大, 综合误差难以确定的问题, 分析了水雷动力学模型, 给出了水雷纵向运动变时滞区间系统描述. 在实际中可通过一系列试验和水动力学参数辨识方法得到该模型. 为了简化设计和计算, 所设计的非脆弱$\rm H_\infty$最优保性能控制器, 可以利用内点法得到全局最优解, 容易求解. 本文方法可应用于水雷、空间航行器运动控制试验, 避免其他方法不一定收敛和保守性较大的缺陷, 降低控制器设计复杂度, 提高命中精度.

参考文献(References):

[1] FRYXELL D, OLIVEIRA P, PASCOAL A, et al. Navigation, guidance and control of auvs: an application to the marius vehicle[J]. *Control Engineering Practice*, 1996, 4(3): 401 – 409.

[2] FENG Z, ALLEN R. Reduced order control of an autonomous underwater vehicle[J]. *Control Engineering Practice*, 2004, 12(12): 1511 – 1520.

[3] SILVESTRE C, PASCOAL A. Control of the INFANTE AUV using gain scheduled static output feedback[J]. *Control Engineering Practice*, 2004, 12(12): 1501 – 1509.

[4] SILVESTRE C, PASCOAL A. Depth control of the INFANTE AUV using gain-scheduled reduced order output feedback[J]. *Control Engineering Practice*, 2007, 15(7): 883 – 895.

[5] BIALAS S A. Necessary and sufficient condition for stability of interval matrices[J]. *International Journal of Control*, 1983, 38(4): 717 – 722.

[6] SEZER M E, SILJAK D D. On stability of interval matrices[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39 (2): 368 – 371.

[7] WANG K N, ANTHONY N. MICHEL, et al. Necessary and sufficient conditions for the Hurwitz and Schur stability of interval matrices[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1994, 39(6): 1251 – 1255.

[8] LIU P L. Robust stability of interval dynamic systems with multiple time-delays[J]. *Electronics Letters*, 2007, 37(20): 1269 – 1270.

[9] 吴方向, 史忠科, 戴冠中. 区间系统的$\rm H_\infty$控制[J]. 自动化学报, 1999, 12(5): 264 – 268.
(WU Fangxiang, SHI Zhongke, DAI Guanzhong. $\rm H_\infty$ control for internal systems[J]. *Acta Automatica Sinca*, 1999, 12(5): 264 – 268.)

[10] 毛维杰, 刘征宇. 动态区间系统的最优保性能控制—LMI方法[J]. 控制理论与应用, 2005, 22(2): 177 – 181.
(MAO Weijie, LIU Zhengyu. Optimal guaranteed cost control of dynamic interval systems: an LMI approach[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 2(22): 177 – 188.)

[11] 彭瑞, 岳继光. 区间分析及其在控制理论中的应用[J]. 控制与决策, 2006, 11(21): 1201 – 1207.
(PENG Rui, YUE Jiguang. A review on interval analysis and its applications to control problem[J]. *Control and Decision,* 2006, 11(21): 1201 – 1207.)

[12] LIN C, LAM J, WANG J L, et al. Analysis on robust stability for interval descriptor systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2001, 42(4): 267 – 278.

[13] CHEN S J, LIN J L. Robust D-stability of discrete and continuous time interval systems[J]. *Journal of the Franklin Institute,* 2004, 341(6): 505 – 517.

[14] KEEL L H, BHATTACHARYYA S P. Robust, fragile or optimal[J]. *IEEE Transactions Automatic Control*, 1997, 42(8): 1098 – 1105.

[15] YANG G H, WANG J L, LIN C. $\rm H_\infty$ control for linear systems with additive gain variations[J]. *International Journal of Control,* 2000, 73(16): 1500 – 1506.

[16] YANG G H, WANG J L. Non-fragile $\rm H_\infty$ control for linear systems with multiplicative controller gain variations[J]. *Automatica*, 2001, 37(5): 727 – 737.

[17] YU L, CHU J. An LMI approach to guaranteed cost control of linear uncertain time-delay systems[J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1155 – 1159.

[18] FISCHMAN A, DION J M, DUGARD L, et al. A linear matrix inequality approach for guaranteed cost control[C] //*Proceedings of the 13rd IFAC World Congress*. San Francisco, USA: Int Federation of Automatic Control, 1996, H: 197 – 202.

[19] QIN CHANGTAO, DUAN GUANGREN. Optimal robust guaranteed cost control of uncertain linear continuous time systems via dynamical output feedback[C] //*Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Dalian, China: IEEE Press, 2006: 21 – 23.

[20] 张宇文. 鱼雷弹道与弹道设计[M]. 西安: 西北工业大学出版社, 1999: 42 – 96.
(ZHANG Yuwen. *Torpedo Trajectory and Design*[M]. Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press, 1999: 42 – 96.)

[21] KHARGONEKAR P P, PETERSEN I R, ZHOU K. Robust stabilization of uncertain linear systems: quadratic stabilization and $\rm H_\infty$ control theory[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(2): 356 – 361.

[22] 俞立. 鲁棒控制–线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 241 – 255.
(YU Li. *Robust Control: An LMI Approach*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002: 241 – 255.)

作者简介:

肖 敏 (1967—), 女, 副教授, 博士研究生, 从事空间飞行器鲁棒控制和应用研究, E-mail: xiaomin2013@163.com;

史忠科 (1956—), 男, 教授, 博士生导师, 从事控制理论与工程、系统工程等研究, E-mail: zkeshi@nwpu.edu.cn.