第 26 卷第 12 期
2009 年 12 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 12
Dec. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)12−1325−06

基于增广泛函的混合时滞区间神经网络的鲁棒稳定性

刘振伟, 张化光

(东北大学 流程工业综合自动化教育部重点实验室, 辽宁 沈阳 110004; 东北大学 信息科学与工程学院, 辽宁 沈阳 110004)

摘要: 本文针对一类带有混合时变时滞(离散和分布时滞)的区间递归神经网络进行了全局鲁棒稳定性研究. 与之前的处理方法不同, 在本文中通过使用一种新型的增广Lyapunov-Krasovskii泛函, 从而得到了一类新颖的关于区间递归神经网络的时滞依赖全局鲁棒稳定性判据. 在新的增广泛函中, 由于首次使用了带有激活函数的积分项, 系统状态和激活函数之间的关系将被更好地表示出来. 因此, 本文提出的判据具有更小的保守性. 同时, 在本文提出的判据中, 放松了时变时滞变化率必须小于1的限制. 仿真结果进一步证明了本文结果的有效性.

关键词: 区间递归神经网络; 全局鲁棒稳定; 混合时滞; 时滞依赖; 增广Lyapunov-Krasovskii泛函; 线性矩阵不等式
中图分类号: TP18　　**文献标识码**: A

Robust stability of interval neural networks with mixed time-delays via augmented functional

LIU Zhen-wei, ZHANG Hua-guang

(Key Laboratory of Integrated Automation for the Process Industry, Ministry of Education, Shenyang Liaoning 110004, China;
College of Information Science and Engineering, Northeastern University, Shenyang Liaoning 110004, China)

Abstract: Global robust stability of interval recurrent neural networks with mixed time-varying delays (discrete time-varying delay and distributed time-varying delay) is investigated. Being different from existing reports, the novel delay-dependent robust stability criteria for interval recurrent neural networks with mixed time-varying delays employ a new augmented Lyapunov-Krasovskii functional. In the new augmented functional, we introduce an integral term to the activation function, which gives a preferable representation of the relation between states of the system and the activation function. Because of the new functional, the criteria proposed in this paper are less conservative than the currently existing ones. Moreover, the employment of the Jensen's inequality in proving the criteria relaxes the restriction on the time derivative of the time-varying delay in the proposed criteria. The simulation is provided to verify the effectiveness of the proposed results.

Key words: interval recurrent neural networks; global robust stability; mixed time-delays; delay-dependent; augmented Lyapunov-Krasovskii functional; linear matrix inequality

1 引言(Introduction)

近年来, 由于递归神经网络(recurrent neural networks, RNNs)在信号处理、模式识别、图像处理、联想记忆和混合优化等方面的广泛应用, 因此对于其动态特性的研究引起了学者们的极大关注. 然而在神经网络的实现过程中, 时滞是必然存在且不可避免的. 而且事实上, 由于各种并行通道的存在, 时滞应该是离散时滞与分布时滞的混合体, 即, 混合时滞. 同时, 由于存在建模误差、外部干扰和参数漂移等原因, 神经网络的权参数不可避免地存在不确定性, 而这些不确定因素的存在将会导致网络具有复杂的动力学行为. 因此, RNNs的稳定性问题[1,2]和鲁棒稳定性问题[3,4]就显得格外重要.

通常情况, 如果不确定性是由参数漂移或摄动引起的, 且这些漂移或摄动是有界的, 则可称这类网络是区间递归神经网络(interval recurrent neural networks, IRNNs). 目前, 对这类网络的鲁棒稳定性分析, 有M–矩阵[5]、线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)[4,6,7]和代数不等式[8~10]等方法. 最近, 文献[11]针对IRNNs提出了一种基于LMI的时滞依赖鲁棒指数稳定性判据. 由于一般情况下, 时滞依赖的判据比时滞独立的判据具有更小的保守性, 因此如何进一步得到具有更小保守性的时滞依赖鲁棒指数稳定性结果, 就成了目前研究的重点.

收稿日期: 2008−07−07; 收修改稿日期: 2009−03−06.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60774048,60728307);高校博士点基金资助项目(20070145015); 高等学校学科创新引智计划资助项目(B08015).

本文研究了一类带有混合时变时滞的IRNNs的全局鲁棒稳定性问题. 一种新型的增广L-K (Lyapunov-Krasovskii)泛函被应用在判据的证明过程中. 通过使用Lyapunov稳定理论及LMI技术, 可以得到一种新颖的具有更小保守性的时滞依赖的全局鲁棒稳定性判据. 与之前的LMI判据相比, 由于使用了Jensen不等式[12], 离散时滞变化率$\dot{d}(t) < 1$的限制将被克服. 仿真结果证明了本文中判据的有效性.

2 系统描述(System description)

考虑如下一类带有混合时变时滞的区间递归神经网络

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{z}}(t) = -D\boldsymbol{z}(t) + A\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}(t)) + B\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}(t-d(t))) + \\ \qquad C\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}(s))\mathrm{d}s + \boldsymbol{U}, \\ \boldsymbol{z}(t) = \boldsymbol{\phi}(t),\ \forall\, t \in [-\max(h,\rho), 0]. \end{cases} \tag{1}$$

其中: $\boldsymbol{z}(t) = [z_1(t)\ \ z_2(t)\ \ \cdots\ \ z_n(t)]^{\mathrm{T}}$表示在系统的状态, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{z}(t)) = [f_1(z_1(t))\ \ f_2(z_2(t))\ \ \cdots\ \ f_n(z_n(t))]^{\mathrm{T}}$表示神经网络的激活函数, $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$表示一个正定对角矩阵, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$和$C = (c_{ij})$分别表示连接权、离散时滞连接权和分布时滞连接权矩阵, $i, j = 1, 2, \cdots, n$, $\boldsymbol{U} = [u_1\ \ u_2\ \ \cdots\ \ u_n]^{\mathrm{T}}$表示神经元的偏置值, $\boldsymbol{\phi}(t) = [\phi_1(t)\ \ \phi_2(t)\ \ \cdots\ \ \phi_n(t)]^{\mathrm{T}}$表示一个连续可微的函数, 是神经网络(1)的初始条件, $d(t)$和$\tau(t)$分别表示时变离散时滞和时变分布时滞, 它们满足如下条件:

$$0 \leqslant d(t) \leqslant h,\ \ \dot{d}(t) \leqslant \mu, \tag{2}$$

$$0 \leqslant \tau(t) \leqslant \rho, \tag{3}$$

并且激活函数$f(\cdot)$满足如下假设:

假设 1 函数$f(\cdot)$有界, 且满足

$$0 \leqslant \frac{f_i(u) - f_i(v)}{u - v} \leqslant l_i,$$

其中$u \neq v$.

在神经网络的实现中, 由于存在参数的漂移或摄动, 而且这些漂移或摄动是有界的, 因此参数矩阵D, A, B和C可以被做如下的区间化处理:

$$\begin{cases} D_I = \{D = \mathrm{diag}\{d_i\} : \underline{D} \leqslant D \leqslant \overline{D}, \text{i.e.,} \\ \qquad \underline{d}_i \leqslant d_i \leqslant \overline{d}_i\}, \\ A_I = \{A = (a_{ij}) : \underline{A} \leqslant A \leqslant \overline{A}, \text{i.e.,} \\ \qquad \underline{a}_{ij} \leqslant a_{ij} \leqslant \overline{a}_{ij}\}, \\ B_I = \{B = (b_{ij}) : \underline{B} \leqslant B \leqslant \overline{B}, \text{i.e.,} \\ \qquad \underline{b}_{ij} \leqslant b_{ij} \leqslant \overline{b}_{ij}\}, \\ C_I = \{C = (c_{ij}) : \underline{C} \leqslant C \leqslant \overline{C}, \text{i.e.,} \\ \qquad \underline{c}_{ij} \leqslant c_{ij} \leqslant \overline{c}_{ij}\}. \end{cases} \tag{4}$$

由于激活函数$f(\cdot)$是有界的, 则神经网络(1)必然存在平衡点. 假设$\boldsymbol{z}^\star = [z_1^\star\ \ z_2^\star\ \ \cdots\ \ z_n^\star]^{\mathrm{T}}$是神经网络(1)的一个平衡点, 借助于坐标变换$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{z}(t) - \boldsymbol{z}^\star$, 则可以得将系统(1)转化为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = -D\boldsymbol{x}(t) + A\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)) + B\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t))) + \\ \qquad C\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s, \\ \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{\Phi}(t),\ \ \forall t \in [-\max(h,\rho), 0]. \end{cases} \tag{5}$$

其中: $\boldsymbol{x}(t) = [x_1(t)\ \ x_2(t)\ \ \cdots\ \ x_n(t)]^{\mathrm{T}}$表示系统(5)的状态, 初始条件$\boldsymbol{\Phi}(t) = \boldsymbol{\phi}(t) - \boldsymbol{z}^\star$. $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)) = [g_1(x_1(t))\ \ g_2(x_2(t))\ \ \cdots\ \ g_n(x_n(t))]^{\mathrm{T}}$, 且$g_i(x_i(t)) = f_i(x_i(t) + z_i^\star) - f_i(z_i^\star)$, $i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$. 因此, 当对系统(1)的平衡点进行鲁棒稳定性分析时, 可以转化为对系统(5)的原点进行鲁棒稳定性分析. 根据假设1函数$g_i(\cdot)$满足

$$0 \leqslant \frac{g_i(x_i)}{x_i} \leqslant l_i, \tag{6}$$

其中$g_i(0) = 0$.

为了便于分析系统的鲁棒性, 根据文献[4]和文献[11]的论述, 神经网络(5)等价于下面的模型

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = &-(D_0 + E_D G_D E_D)\boldsymbol{x}(t) + \\ &(A_0 + E_A G_A F_A)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t)) + \\ &(B_0 + E_B G_B F_B)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t))) + \\ &(C_0 + E_C G_C F_C)\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s. \end{aligned} \tag{7}$$

其中:

$$D_0 = 0.5(\overline{D} + \underline{D}),\ \ H_D = 0.5(\overline{D} - \underline{D}) = (h_i^{(D)}),$$
$$A_0 = 0.5(\overline{A} + \underline{A}),\ \ H_A = 0.5(\overline{A} - \underline{A}) = (h_{ij}^{(A)}),$$
$$B_0 = 0.5(\overline{B} + \underline{B}),\ \ H_B = 0.5(\overline{B} - \underline{B}) = (h_{ij}^{(B)}),$$
$$C_0 = 0.5(\overline{C} + \underline{C}),\ \ H_C = 0.5(\overline{C} - \underline{C}) = (h_{ij}^{(C)}),$$
$$E_D = \mathrm{diag}\{\sqrt{h_1^{(D)}}, \sqrt{h_2^{(D)}}, \cdots, \sqrt{h_n^{(D)}}\},$$
$$E_k = \Big[\sqrt{h_{11}^{(k)}}e_1\ \ \cdots\ \ \sqrt{h_{1n}^{(k)}}e_1\ \ \cdots\ \ \sqrt{h_{n1}^{(k)}}e_n\ \ \cdots\ \ \sqrt{h_{nn}^{(k)}}e_n\Big]_{n\times n^2},$$
$$F_k = \Big[\sqrt{h_{11}^{(k)}}e_1\ \ \cdots\ \ \sqrt{h_{1n}^{(k)}}e_n\ \ \cdots\ \ \sqrt{h_{n1}^{(k)}}e_1\ \ \cdots\ \ \sqrt{h_{nn}^{(k)}}e_n\Big]^{\mathrm{T}}_{n^2\times n},$$

其中e_i是$n \times n$维单位阵中的第i个列向量, $k = A, B, C$. 而且矩阵G_D, G_A, G_B和G_C满足如下条件:

$$G_m^{\mathrm{T}}G_m \leqslant I, m=D,A,B,C. \tag{8}$$

引理 1　若U, V和W是具有适当维数的矩阵, 且矩阵M满足$M=M^{\mathrm{T}}$, 则对于所有的$V^{\mathrm{T}}V\leqslant I$, 有

$$M+UVW+W^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}U^{\mathrm{T}}<0,$$

当且仅当存在一个正常数ε, 使得

$$M+\varepsilon^{-1}UU^{\mathrm{T}}+\varepsilon W^{\mathrm{T}}W<0$$

成立.

3　主要结论(Main results)

下面给出基于新型增广L-K泛函的鲁棒稳定性判据.

定理 1　对于具有离散时滞和分布时滞的区间递归神经网络(5), 如果存在矩阵

$$P=P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22}\end{bmatrix}>0,\ Q=Q^{\mathrm{T}}>0,$$

$$\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}>0,$$

$$Z=Z^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_{22}\end{bmatrix}>0,\ Y=Y^{\mathrm{T}}>0,$$

$$R=R^{\mathrm{T}}>0,\ S_1=S_1^{\mathrm{T}}>0,\ S_2=S_2^{\mathrm{T}}>0,$$

$$W_1=\mathrm{diag}\{w_{11},w_{12},\cdots,w_{1n}\}>0,$$

$$W_2=\mathrm{diag}\{w_{21},w_{22},\cdots,w_{2n}\}>0.$$

标量常数$\varepsilon_j>0$, $j=1,2,3,4$, 使下面的线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix}\varOmega_{11} & \varOmega_{12} & \varOmega_{13}\\ * & \varOmega_{22} & 0\\ * & * & \varOmega_{33}\end{bmatrix}<0. \tag{9}$$

其中:

$$\varOmega_{11}=\begin{bmatrix}\omega_{11} & Z_{22} & \omega_{13} & \omega_{14} & P_{11}C_0 & \omega_{16} & -hD_0Z_{22}\\ * & \omega_{22} & 0 & LW_2 & 0 & Z_{12}^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & \omega_{33} & \omega_{34} & \omega_{35} & \omega_{36} & hA_0^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & * & * & \omega_{44} & 0 & \omega_{46} & hB_0^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & * & * & * & \omega_{55} & C_0^{\mathrm{T}}P_{12} & hC_0^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & * & * & * & * & \omega_{66} & 0\\ * & * & * & * & * & * & -Z_{22}\end{bmatrix},$$

$$\varOmega_{12}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mu P_{12}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu P_{22} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\varOmega_{13}=[-\xi_D\ \ \xi_A\ \ \xi_B\ \ \xi_C],$$

$$\varOmega_{22}=\mathrm{diag}\{-\mu S_1,-\mu S_2\},$$

$$\varOmega_{33}=\mathrm{diag}\{-\varepsilon_1 I,-\varepsilon_2 I,-\varepsilon_3 I,-\varepsilon_4 I\},$$

$$\omega_{11}=-P_{11}D_0-D_0P_{11}+Q-Z_{22}+\varepsilon_1E_D^{\mathrm{T}}E_D,$$

$$\omega_{13}=P_{11}A_0+P_{12}-D_0\Lambda+LW_1-h^2D_0Z_{12},$$

$$\omega_{14}=P_{11}B_0-P_{12},$$

$$\omega_{16}=-D_0P_{12}-Z_{12}^{\mathrm{T}},$$

$$\omega_{22}=-(1-\mu)Q-Z_{22},$$

$$\omega_{33}=\Lambda A_0+A_0^{\mathrm{T}}\Lambda+R+h^2Z_{12}A_0+h^2A_0Z_{12}^{\mathrm{T}}+ h^2Z_{11}-2W_1+\rho^2Y+\varepsilon_2F_A^{\mathrm{T}}F_A,$$

$$\omega_{34}=\Lambda B_0+h^2Z_{12}B_0,$$

$$\omega_{35}=\Lambda C_0+h^2Z_{12}C_0,$$

$$\omega_{36}=A_0^{\mathrm{T}}P_{12}+P_{22},$$

$$\omega_{44}=-(1-\mu)R-2W_2+\mu S_1+\varepsilon_3F_B^{\mathrm{T}}F_B,$$

$$\omega_{46}=B_0^{\mathrm{T}}P_{12}-P_{22},$$

$$\omega_{55}=-Y+\varepsilon_4F_C^{\mathrm{T}}F_C,$$

$$\omega_{66}=-Z_{11}+\mu S_2,$$

$$\xi_m^{\mathrm{T}}=[(E_mE_m^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}P_{11}\ \ 0\ \ (E_mE_m^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}(\Lambda+h^2Z_{12}^{\mathrm{T}})\ \ 0\ \ 0\ \ (E_mE_m^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}P_{12}\ \ h(E_mE_m^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}Z_{22}].$$

I表示单位矩阵, $m=D,A,B,C$, $*$表示对称矩阵中的非对角对称项, 则系统(5)的平衡点是全局鲁棒稳定的.

证　构造如下的L-K泛函

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\sum_{i=1}^{6}V_i(\boldsymbol{x}(t)). \tag{10}$$

其中:

$$V_1(x(t))=\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)P\boldsymbol{\eta}_1(t),$$

$$V_2(x(t))=2\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\int_0^{x_i(t)}g_i(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_3(x(t))=\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(s)Q\boldsymbol{x}(s)\mathrm{d}s,$$

$$V_4(x(t))=\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))R\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s,$$

$$V_5(x(t))=h\int_{-h}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(s)Z\boldsymbol{\eta}_2(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta,$$

$$V_6(x(t))=\rho\int_{-\rho}^{0}\int_{t+\theta}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))Y\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\theta.$$

其中: $\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s]$, $\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\ \ \dot{\boldsymbol{x}}^{\mathrm{T}}(t)]$, $P=P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22}\end{bmatrix}>0$, $\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\}>0$, $Q=Q^{\mathrm{T}}>0$, $R=R^{\mathrm{T}}>0$, $Z=Z^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_{22}\end{bmatrix}>0$, $Y=Y^{\mathrm{T}}>0$.

沿着系统(5)的轨迹, 并且应用式(2)(3)以及Jensen不等式, 可以得到$V_i(\boldsymbol{x}(t))(i=1,2,\cdots,6)$对时间的导数,

$$\dot{V}_1(\boldsymbol{x}(t))=2\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}(t)P\dot{\boldsymbol{\eta}}_1(t)=$$

$$2\begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))-(1-\dot{d}(t))\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t))) \end{bmatrix}, \tag{11}$$

$$\dot{V}_2(\boldsymbol{x}(t))=-2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\Lambda D\boldsymbol{x}(t)+2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\Lambda A\times \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\Lambda B\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))+ 2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\Lambda C\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s, \tag{12}$$

$$\dot{V}_3(\boldsymbol{x}(t))\leqslant \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)Q\boldsymbol{x}(t)-(1-\mu)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))Q\times \boldsymbol{x}(t-d(t)), \tag{13}$$

$$\dot{V}_4(\boldsymbol{x}(t))\leqslant \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))R\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))-(1-\mu)\times \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))R\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t))), \tag{14}$$

$$\dot{V}_5(\boldsymbol{x}(t))\leqslant h^2\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}(t)Z\boldsymbol{\eta}_2(t)-\int_{t-d(t)}^{t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(s) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\mathrm{d}s\times \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_{22} \end{bmatrix}\int_{t-d(t)}^{t}\begin{bmatrix} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s)) \\ \dot{\boldsymbol{x}}(s) \end{bmatrix}\mathrm{d}s, \tag{15}$$

$$\dot{V}_6(\boldsymbol{x}(t))\leqslant \rho^2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))Y\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))- \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}sY\int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s. \tag{16}$$

又, 存在对称矩阵$S_1>0$和$S_2>0$, 有下列不等式成立:

$$2\dot{d}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P_{12}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))\leqslant \mu\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)P_{12}S_1^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}(t)+ \mu\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))S_1\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t))), \tag{17}$$

$$2\dot{d}(t)\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))P_{22}\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\leqslant \mu\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))P_{22}S_2^{-1}P_{22}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))+ \mu(\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s)^{\mathrm{T}}S_2\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s. \tag{18}$$

根据公式(6), 矩阵$W_1=\mathrm{diag}\{w_{11},w_{12},\cdots,w_{1n}\}>0$和$W_2=\mathrm{diag}\{w_{21},w_{22},\cdots,w_{2n}\}>0$, 有下列不等式成立:

$$0\leqslant -2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))W_1\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))W_1L\boldsymbol{x}(t)- 2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))W_2\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))+ 2\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))W_2L\boldsymbol{x}(t-d(t)), \tag{19}$$

其中$L=\mathrm{diag}\{l_i\}, i=1,2,\cdots,n$.

因此根据式(11)~(16), 并且结合式(17)~(19), 则$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))$可以被整理为如下结果

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}(t))\leqslant \boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)\left(\varOmega_0+h^2\bar{A}^{\mathrm{T}}Z_{22}\bar{A}\right)\boldsymbol{\zeta}(t). \tag{20}$$

其中:

$$\boldsymbol{\zeta}^{\mathrm{T}}(t)=[\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)\ \ \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t-d(t))\ \ \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t))\ \ \boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(t-d(t)))\ \ \int_{t-\tau(t)}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s\ \ \int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s],$$

$$\varOmega_0=\begin{bmatrix} \bar{\omega}_{11} & Z_{22} & \bar{\omega}_{13} & \bar{\omega}_{14} & P_{11}C & \bar{\omega}_{16} \\ * & \omega_{22} & 0 & LW_2 & 0 & Z_{12}^{\mathrm{T}} \\ * & * & \bar{\omega}_{33} & \bar{\omega}_{34} & \bar{\omega}_{35} & \bar{\omega}_{36} \\ * & * & * & \bar{\omega}_{44} & 0 & \bar{\omega}_{46} \\ * & * & * & * & -Y & C^{\mathrm{T}}P_{12} \\ * & * & * & * & * & \omega_{66} \end{bmatrix}.$$

其中:

$\bar{A}=[-D\ \ 0\ \ A\ \ B\ \ C\ \ 0]$,

$\bar{\omega}_{11}=-P_{11}D-DP_{11}+Q-Z_{22}+\mu P_{12}S_1^{-1}P_{12}^{\mathrm{T}}$,

$\bar{\omega}_{13}=P_{11}A+P_{12}-D\Lambda+LW_1-h^2DZ_{12}^{\mathrm{T}}$,

$\bar{\omega}_{14}=P_{11}B-P_{12}$,

$\bar{\omega}_{16}=-DP_{12}-Z_{12}^{\mathrm{T}}$,

$\bar{\omega}_{33}=\Lambda A+A^T\Lambda+R-2W_1+h^2Z_{11}+\rho^2Y+ h^2Z_{12}A+h^2A^{\mathrm{T}}Z_{12}^{\mathrm{T}}$,

$\bar{\omega}_{34}=\Lambda B+h^2Z_{12}B$,

$\bar{\omega}_{35}=\Lambda C+h^2Z_{12}C$,

$\bar{\omega}_{36}=A^{\mathrm{T}}P_{12}+P_{22}$,

$\bar{\omega}_{44}=-(1-\mu)R-2W_2+\mu S_1+\mu P_{22}S_2^{-1}P_{22}^{\mathrm{T}}$,

$\bar{\omega}_{46}=B^{\mathrm{T}}P_{12}-P_{22}$.

因此, 当$\varOmega_0+h^2\bar{A}^{\mathrm{T}}Z_{22}\bar{A}<0$时, 系统(5)是全局渐近稳定的.

又因为系统(7)与系统(5)等价, 因此将(7)中的权矩阵$D_0+E_DG_DE_D$, $A_0+E_AG_AF_A$, $B_0+E_BG_BF_B$和$C_0+E_CG_CF_C$代入$\varOmega_0+h^2\bar{A}^{\mathrm{T}}Z_{22}\bar{A}<0$中, 同时应用Schur补定理和引理1, 则可以得到判据(9). 因此, 当判据(9)成立时, 系统(7)是全局鲁棒稳定的, 即系统(5)的平衡点是全局鲁棒稳定的. 证毕.

注 1 定理1采用了增广L-K泛函(10)来处理混合时滞区间递归神经网络(5)的全局鲁棒稳定性问题. 与文献[13]和文献[14]中使用的增广泛函相比, 本文使用的泛函中应用了$\int_{t-d(t)}^{t}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(s))\mathrm{d}s$项, 这样就使神经网络的激活函数更好的融入到了判据当中, 更好的表示出了系统状态和激活函数之间的关系. 另外, 由于增广泛函(10)中存在更多的可调参数, 从而增加了所得判据的自由度, 因此定理1具有更小的保守性.

当连接权矩阵$C=0$时, 区间递归神经网络(5)转化为如下形式离散时变时滞区间递归神经网络

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t)=-D\boldsymbol{x}(t)+A\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t))+B\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t-d(t))),\tag{21}$$

其中参数定义与系统(5)相同.

因此, 针对带有离散时变时滞区间递归神经网络(21), 可以得到下面的判据.

推论 1　对于区间递归神经网络(21), 如果存在矩阵

$$P=P^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}P_{11} & P_{12}\\ P_{12}^{\mathrm{T}} & P_{22}\end{bmatrix}>0,\ \ Q=Q^{\mathrm{T}}>0,$$

$$\varLambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n\}>0,$$

$$Z=Z^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}Z_{11} & Z_{12}\\ Z_{12}^{\mathrm{T}} & Z_{22}\end{bmatrix}>0,\ R=R^{\mathrm{T}}>0,$$

$$S_1=S_1^{\mathrm{T}}>0,\ S_2=S_2^{\mathrm{T}}>0,$$

$$W_1=\mathrm{diag}\{w_{11},w_{12},\cdots,w_{1n}\}>0,$$

$$W_2=\mathrm{diag}\{w_{21},w_{22},\cdots,w_{2n}\}>0.$$

标量常数$\varepsilon_j>0, j=1,2,3$, 使下面的线性矩阵不等式成立

$$\begin{bmatrix}\varUpsilon_{11} & \varUpsilon_{12} & \varUpsilon_{13}\\ * & \varOmega_{22} & 0\\ * & * & \varUpsilon_{33}\end{bmatrix}<0.\tag{22}$$

其中:

$$\varUpsilon_{11}=\begin{bmatrix}\omega_{11} & Z_{22} & \omega_{13}y & \omega_{14} & \omega_{16} & -hD_0Z_{22}\\ *y & \omega_{22} & 0 & LW_2 & Z_{12}^{\mathrm{T}} & 0\\ * & * & \psi_{33}y & \omega_{34} & \omega_{36} & hA_0^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & * & * & \omega_{44} & \omega_{46} & hB_0^{\mathrm{T}}Z_{22}\\ * & * & * & * & \omega_{66} & 0\\ * & * & * & * & * & -Z_{22}\end{bmatrix},$$

$$\varUpsilon_{12}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\mu P_{12}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \mu P_{22} & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\varUpsilon_{13}=[-\bar{\xi}_D\ \ \bar{\xi}_A\ \ \bar{\xi}_B],$$

$$\varUpsilon_{33}=\mathrm{diag}\{-\varepsilon_1 I,-\varepsilon_2 I,-\varepsilon_3 I\},$$

$$\psi_{33}=\varLambda A_0+A_0^{\mathrm{T}}\varLambda+R+h^2Z_{12}A_0+h^2A_0Z_{12}^{\mathrm{T}}+h^2Z_{11}-2W_1+\varepsilon_2F_A^{\mathrm{T}}F_A,$$

$$\bar{\xi}_m^{\mathrm{T}}=[(E_mE_m^{T})^{\frac{1}{2}}P_{11}\ \ 0\ \ (E_mE_m^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}(\varLambda+h^2Z_{12}^{\mathrm{T}})\ \ 0\ \ (E_mE_m^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}P_{12}\ \ h(E_mE_m^{\mathrm{T}})^{\frac{1}{2}}Z_{22}].$$

$m=D,A,B$, 其他参数与定理1中的定义相同, 则系统(21)的平衡点是全局鲁棒稳定的.

证　选取增广L-K泛函

$$V(\boldsymbol{x}(t))=\sum_{i=1}^{5}V_i(\boldsymbol{x}(t)).$$

其中$V_i(\boldsymbol{x}(t))$与定理1中定义相同, $i=1,2,\cdots,5$. 相似于定理1的证明方法, 可得相应的判据.　　证毕.

注 2　在定理1和推论1中, 当离散时滞$d(t)$为快变时滞时, 即, $\mu\geqslant 1$, 通过设置矩阵$Q=0$和$R=0$, 则可以得到独立于时滞变化率的鲁棒稳定性结果.

4　数值例子(Numerical examples)

在本节中, 我们给出了两个例子以证明本文所提出的判据的有效性.

4.1　例1(Example 1)

考虑结构如(21)所示的带有离散时变时滞区间递归神经网络模型, 其参数如下:

$$\underline{D}=\begin{bmatrix}0.3 & 0\\ 0 & 1.7\end{bmatrix},\ \overline{D}=\begin{bmatrix}0.7 & 0\\ 0 & 2.3\end{bmatrix},$$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}-1.1 & -0.4\\ -0.2 & -5.2\end{bmatrix},\ \overline{A}=\begin{bmatrix}-0.9 & 0\\ -0.2 & -4.8\end{bmatrix},$$

$$\underline{B}=\begin{bmatrix}-2.1 & -1.1\\ 0.9 & -0.6\end{bmatrix},\ \overline{B}=\begin{bmatrix}-1.9 & -0.9\\ 1.1 & -0.4\end{bmatrix},$$

则可以计算出

$$D_0=\begin{bmatrix}0.5 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ -0.2 & -5\end{bmatrix},$$

$$B_0=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 1 & -0.5\end{bmatrix},$$

$$E_DE_D^{\mathrm{T}}=E_D^{\mathrm{T}}E_D=\mathrm{diag}\{0.2,0.3\},$$

$$E_AE_A^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}\{0.3,0.2\},\ F_A^{\mathrm{T}}F_A=\mathrm{diag}\{0.1,0.4\},$$

$$E_BE_B^{\mathrm{T}}=F_B^{\mathrm{T}}F_B=\mathrm{diag}\{0.2,0.2\},$$

选取满足条件$l_1=l_2=1$的激活函数. 应用推论1, 在不同μ值的情况下, 可以得到如表1所示的相应情况下的时滞上界.

对于本例, 文献[4,6,7]及文献[11]中的LMI判据均不成立, 即无法判断本例的鲁棒稳定性. 而文献[8~10]中的判据可简化表述为

$$2\frac{\min(\underline{a}_i)}{\max(l_i)}-1\geqslant(\|B_0\|_2+\|H_B\|_2)^2.$$

针对本例可得$2\times 0.3-1<0$, 即, 判据无法判断本例的鲁棒稳定性. 因此, 充分说明了本文所提出的全局鲁棒稳定性判据具有更小的保守性.

表 1　在例1中对于不同μ值所得到的h上界

Table 1　Allowable upper bound of h for different μ in example 1

	$\mu=0.1$	$\mu=0.5$	$\mu=0.9$	$\mu=1.0$	$\mu=2.0$
推论1	0.7287	0.5441	0.3877	0.3388	0.3388

4.2 例2(Example 2)

考虑如式(5)所示的区间递归神经网络模型, 其参数如下

$$\underline{D}=\begin{bmatrix}1.1&0\\0&0.8\end{bmatrix},\ \overline{D}=\begin{bmatrix}1.3&0\\0&1.1\end{bmatrix},$$
$$\underline{A}=\begin{bmatrix}0.1&0.1\\0&-0.2\end{bmatrix},\ \overline{A}=\begin{bmatrix}0.2&0.2\\0.1&-0.1\end{bmatrix},$$
$$\underline{B}=\begin{bmatrix}-0.3&-0.2\\0&0.1\end{bmatrix},\ \overline{B}=\begin{bmatrix}-0.2&-0.1\\0.1&0.2\end{bmatrix},$$
$$\underline{C}=\begin{bmatrix}0&0.1\\-0.3&0.2\end{bmatrix},\ \overline{C}=\begin{bmatrix}0.1&0.1\\-0.2&0.3\end{bmatrix},$$

则可以计算出

$$D_0=\begin{bmatrix}1.2&0\\0&0.95\end{bmatrix},\ A_0=\begin{bmatrix}0.15&0.15\\0.05&-0.15\end{bmatrix},$$
$$B_0=\begin{bmatrix}-0.25&-0.15\\0.05&0.15\end{bmatrix},\ C_0=\begin{bmatrix}0.05&0.1\\-0.25&0.25\end{bmatrix},$$
$$E_DE_D^{\mathrm{T}}=E_D^{\mathrm{T}}E_D=\mathrm{diag}\{0.1,0.15\},$$
$$E_AE_A^{\mathrm{T}}=E_BE_B^{\mathrm{T}}=E_CE_C^{\mathrm{T}}=\mathrm{diag}\{0.1,0.1\},$$
$$F_A^{\mathrm{T}}F_A=F_B^{\mathrm{T}}F_B=F_C^{\mathrm{T}}F_C=\mathrm{diag}\{0.1,0.1\},$$

选取满足条件$l_1=l_2=1$的激活函数. 当$d(t)=\tau(t)$, 即, $h=\rho$, 应用定理1, 在不同μ值的情况下, 可以得到如表2所示的结果.

表 2 在例2中对于不同μ值所得到的h上界

Table 2 Allowable upper bound of h for different μ in example 2

	$\mu=0.1$	$\mu=0.5$	$\mu=0.9$	$\mu=1.0$	$\mu=2.0$
定理1	1.6745	1.5187	1.4616	1.4596	1.4574

5 结论(Conclusion)

本文针对一类带有混合时变时滞的IRNNs进行了全局鲁棒稳定性的分析. 应用Lyapunov稳定性理论, 以LMI的形式, 给出了一类新颖的时滞依赖全局鲁棒稳定性判据. 与之前的处理方法不同, 一种新型的增广L-K泛函被用于判据的证明中, 从而降低了判据的保守性. 同时, 通过应用Jensen不等式, 放松了时变时滞变化率$\dot{d}(t)<1$的限制. 因此, 本文所得到时滞依赖鲁棒稳定性判据, 在理论和实际应用中都具有一定的参考价值和意义.

参考文献(References):

[1] ZHANG H G, WANG Y C. Stability analysis of Markovian jumping stochastic Cohen-Grossberg neural networks with mixed time delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, 19(2): 366 – 370.

[2] ZHANG H G, WANG Z S, LIU D R. Global asymptotic stability of recurrent neural networks with multiple time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, 19(5): 855 – 873.

[3] ZHANG H G, WANG Z S, LIU D R. Robust exponential stability of cellular neural networks with multiple time varying delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2007, 54(8): 730 – 734.

[4] WANG Z S, ZHANG H G, YU W. Robust exponential stability analysis of neural networks with multiple time delays[J]. *Neurocomputing*, 2007, 70(13/15): 2534 – 2543.

[5] ZHAO Z J. Global exponential robust periodicity and stability of interval neural networks with both variable and unbounded delays[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2008, 36(1): 91 – 97.

[6] LI C D, LIAO X F. Global robust stability criteria for interval delayed neural networks via an LMI approach[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2006, 53(9): 901 – 905.

[7] SHEN T, ZHANG Y. Improved global robust stability criteria for delayed neural networks[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, 2007, 54(8): 715 – 719.

[8] CAO J D, WANG J. Global asymptotic and robust stability of recurrent neural networks with time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2005, 52(2): 417 – 426.

[9] OZCAN N, ARIK S. Global robust stability analysis of neural networks with multiple time delays[J]. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, 2006, 53(1): 166 – 176.

[10] SINGH V. On global robust stability of interval Hopfield neural networks with delay[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 33(4): 1183 – 1188.

[11] 吴立刚, 王常虹, 曾庆双. 区间时变细胞神经网络的全局鲁棒指数稳定性[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(5): 724 – 729.
(WU Ligang, WANG Changhong, ZENG Qingshuang. Global robust exponential stability of interval cellular neural networks with time-varying delays[J]. *Control Theory & Applications*, 2006, 23(5): 724 – 729.

[12] GU K, KHARITONOV V, CHEN J. *Stability of Time-delay Systems*[M]. Cambridge, MA: Birkhauser, 2003.

[13] PENG C, TIAN Y C. Delay-dependent robust stability criteria for uncertain systems with interval time-varying delay[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2008, 214(2): 480 – 494.

[14] LI T, GUO L, SUN C Y, et al. Further result on delay-dependent stability criterion of neural networks with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 2008, 19(4): 726 – 730.

作者简介:

刘振伟 (1981—), 男, 博士研究生, 目前研究方向为神经网络控制及稳定性, E-mail: jzlzw@126.com;

张化光 (1959—), 男, 教授, 博士生导师, 教育部“长江学者”特聘教授, 现任东北大学电气自动化研究所所长, 主要研究方向为神经网络控制、非线性系统控制和模糊控制等, 在国内外发表学术论文350多篇.