文章编号: 1000−8152(2009)08−0821−06

非线性采样系统指数稳定的新条件

金辉宇, 殷保群

(中国科学技术大学 自动化系, 安徽 合肥 230027)

摘要: 研究了非线性采样系统的稳定性问题. 对以采样周期为参数的离散时间系统族, 证明了全局指数稳定的Lyapunov定理和逆定理. 分别基于系统的一般近似模型和Euler近似模型, 给出了闭环系统全局指数稳定的新条件. 与现有结果相比, 取消了Lyapunov函数全局Lipschitz连续的假设, 减弱了闭环系统全局指数稳定的充分条件.

关键词: 非线性; 采样系统; 指数稳定; 近似模型; Lyapunov函数

中图分类号: TP273 **文献标识码**: A

New conditions for the exponential stability of nonlinear sampled-data systems

JIN Hui-yu, YIN Bao-qun

(Department of Automation, University of Science and Technology of China, Hefei Anhui 230027, China)

Abstract: Stability problem of nonlinear sampled-data systems is investigated. The Lyapunov theorem and its converse theorem of globally exponential stability for the discrete-time systems family in which the sampling period is a parameter are proved. New sufficient conditions that guarantee globally exponential stability of the closed-loop sampled-data systems are presented respectively for the general approximation model and the Euler approximation model. Compared with earlier results, new conditions ignore the assumption that Lyapunov functions are globally Lipschitz, and hence weaken the sufficient conditions to warrant globally exponential stability of the closed-loop systems.

Key words: nonlinear; sampled-data systems; exponential stability; approximate model; Lyapunov function

1 引言(Introduction)

采样系统(sampled-data systems)是计算机控制的数学模型. 采样系统的控制器设计方法可分为连续时间设计(continuous-time design, CTD)、离散时间设计(discrete-time design, DTD)和采样数据设计(sampled-data design, SDD)[1] . CTD先依据连续时间模型设计控制器, 再将控制器离散化. DTD先建立系统的离散时间模型, 再依据该模型设计控制器. SDD则通过分析采样间特性, 建立系统的采样数据模型并设计控制器[2]. 线性系统常使用DTD[3]. 非线性系统一般无法得到闭合形式的离散时间模型, 使用DTD存在本质性困难.

为避免上述困难, 部分学者转而研究近似DTD, 即先建立系统的近似离散时间模型, 再基于近似模型设计控制器. 近似DTD最初用于自适应控制[4~6], 后被拓展到预测控制[7,8]、最优控制[9,10]、采样观测器[11]和backstepping[12]等. 文[12]中, 基于Euler近似模型设计的控制器, 与CTD得到的控制器相比, 采样周期相同时吸引区明显更大.

但是, 基于近似模型设计控制器可能导致系统闭环不稳定, 所以必须研究闭环系统稳定的条件. 文[13]率先进行了这方面的工作, 给出了闭环系统关于采样周期实用稳定的充分条件. 文[14]将结果推广到用微分包含(differential inclusions)描述的系统. 文[15]改进了文[13]的结果, 给出闭环系统全局指数稳定的充分条件. 国内研究这一课题的有文[16].

本文在文[15]的基础上进行研究. 先对以采样周期为参数的离散时间系统族, 证明了指数稳定的Lyapunov定理和逆定理. 再分别基于系统的一般近似模型和Euler近似模型, 给出闭环全局指数稳定的新条件. 新条件不再假设Lyapunov函数全局Lipschitz连续, 降低了构造Lyapunov函数的难度, 减弱了闭环全局指数稳定的充分条件.

本文中, 向量x的转置和欧氏范数分别记为x'

收稿日期: 2008−07−14; 收修改稿日期: 2009−01−07.
基金项目: 中国科学技术大学青年基金资助项目(KA2100100002).

和$\|x\|$. 矩阵由向量导出的范数也记为$\|\cdot\|$. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$和$\mathbb{R}_+$分别表示非负整数、实数和非负实数. $\mathcal{K}$表示所有$\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$的连续严格递增且在零点等于零的函数, $\mathcal{K}_\infty$表示$\mathcal{K}$中所有的无界函数. 采样均指等速率采样, 采样周期为T. x的采样值$x(kT)$简写为$x[k]$.

2 问题描述(Problem statement)

设有连续时间非线性系统

$$\dot{x}=f(x,u), \tag{1}$$

其中: $x\in\mathbb{R}^n$是系统状态, $u\in\mathbb{R}^m$是控制输入, $f(x,u)$对x全局Lipschitz连续且分段可微, 并满足$f(0,0)=0$. 使用零阶保持器, 控制量在相邻两个采样时刻间不变,

$$u(t)=u[k],t\in[kT,kT+T). \tag{2}$$

假定控制器采用状态反馈

$$u[k]=u_{\mathrm{T}}(x[k]). \tag{3}$$

用$\phi(t,x_0,u)$表示系统(1)初始状态为x_0、控制量恒为u的解, 即满足方程

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t,x_0,u)=f(\phi(t,x_0,u),u),\ \ \phi(0,x_0,u)=x_0, \tag{4}$$

记$F_{\mathrm{T}}^{ex}(x,u)=\phi(T,x,u)$, 则式(1)有精确离散时间模型

$$x[k+1]=F_{\mathrm{T}}^{ex}(x[k],u[k]). \tag{5}$$

由于非线性, 一般无法得到$F_{\mathrm{T}}^{ex}(\cdot,\cdot)$的闭合形式, 不能依据式(5)设计控制器. 近似DTD用某个函数$F_{\mathrm{T}}^{ap}(\cdot,\cdot)$代替$F_{\mathrm{T}}^{ex}(\cdot,\cdot)$, 建立式(1)的近似离散时间模型

$$x[k+1]=F_{\mathrm{T}}^{ap}(x[k],u[k]), \tag{6}$$

再基于(6)设计控制器(3). 而近似DTD稳定性问题要研究, 怎样的条件可以保证闭环精确离散时间模型

$$x[k+1]=F_{\mathrm{T}}^{ex}(x[k],u_{\mathrm{T}}(x[k])) \tag{7}$$

稳定.

近似DTD中, $F_{\mathrm{T}}^{ap}(\cdot,\cdot)$通常是一个近似计算$F_{\mathrm{T}}^{ex}(\cdot,\cdot)$的数值方法, 其中最简单、最常用的是Euler近似

$$F_{\mathrm{T}}^{Eu}(x,u)\triangleq x+Tf(x,u).$$

注 1 $f(x,u)$对x全局Lipschitz连续保证了对任意$T>0$和任意$x\in\mathbb{R}^n,u\in\mathbb{R}^m$, $F_{\mathrm{T}}^{ex}(x,u)$都有意义.

3 以采样周期为参数的离散时间系统族(Discrete-time systems family in which the sampling period is a parameter)

从形式上看式(5)(6)(7)都是以采样周期为参数的离散时间系统族. 本节给出这类系统全局指数稳定的Lyapunov定理和逆定理.

定义 1 考虑以T为参数的离散时间系统族

$$x[k+1]=F_{\mathrm{T}}^{*}(x[k]), \tag{8}$$

其中$*\in\{ex,ap,Eu\}$. 称系统(8)是全局指数稳定的, 如果存在常数$T^*,\lambda>0$和$\alpha\geqslant 1$, 当$T\in(0,T^*)$时, 对于任意$x[0]\in\mathbb{R}^n$, 系统(8)的解满足

$$\|x[k]\|\leqslant\alpha\mathrm{e}^{-\lambda kT}\|x[0]\|.$$

定理 1 如果存在Lyapunov函数$V_{\mathrm{T}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, 以及常数$T^*,\beta,c_1,c_2,c_3>0$, 当$T\in(0,T^*)$时, 对任意$x\in\mathbb{R}^n$, 有

$$c_1\|x\|^\beta\leqslant V_{\mathrm{T}}(x)\leqslant c_2\|x\|^\beta, \tag{9}$$

$$V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^*(x))-V_{\mathrm{T}}(x)\leqslant -c_3T\|x\|^\beta, \tag{10}$$

那么系统(8)是全局指数稳定的.

证 由式(10)可知, 对任意$j\in\mathbb{N}$, 有

$$V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^*(x[j]))\leqslant(1-\frac{c_3}{c_2}T)V_{\mathrm{T}}(x[j])\leqslant V_{\mathrm{T}}(x[j])\mathrm{e}^{-\frac{c_3}{c_2}T},$$

反复应用并令$\alpha=(\frac{c_2}{c_1})^{\frac{1}{\beta}}$, $\lambda=\frac{c_3}{c_2\beta}$即得证.

定理 2 如果系统(8)全局指数稳定, 且存在常数$T_0^*,L>0$, 当$T\in(0,T_0^*)$时, 对于任意$x,y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$\|F_{\mathrm{T}}^*(x)-F_{\mathrm{T}}^*(y)-(x-y)\|\leqslant LT\|x-y\|, \tag{11}$$

那么存在Lyapunov函数$V_{\mathrm{T}}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}_+$, 常数$T^*,c_1,c_2,c_3,c_4>0$, 当$T\in(0,T^*)$时, 对任意$x,y\in\mathbb{R}^n$, 有

$$c_1\|x\|^2\leqslant V_{\mathrm{T}}(x)\leqslant c_2\|x\|^2, \tag{12}$$

$$V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^*(x))-V_{\mathrm{T}}(x)\leqslant -c_3T\|x\|^2, \tag{13}$$

$$|V_{\mathrm{T}}(x)-V_{\mathrm{T}}(y)|\leqslant c_4(\|x\|+\|y\|)\|x-y\|. \tag{14}$$

证 记$\varphi(k,x)$是(8)的解, 即满足方程

$$\varphi(k+1,x)=F_{\mathrm{T}}^*(\varphi(k,x)),\varphi(0,x)=x.$$

由假设, 存在$T_1^*,\lambda>0$和$\alpha\geqslant 1$, 当$T\in(0,T_1^*)$时,

$$\|\varphi(k,x)\|\leqslant\alpha\mathrm{e}^{-\lambda kT}\|x\|.$$

取$T_2^*=\frac{\ln 2}{2\lambda}$, 则当$T\in(0,T_2^*)$时必存在$N\in\mathbb{N}$且满足

$$\frac{1}{4} \leqslant \alpha^2 \mathrm{e}^{-2N\lambda T} \leqslant \frac{1}{2}. \tag{15}$$

取$T_3^* = \dfrac{1}{L}$, $T_4^* > 0$且满足方程

$$\frac{T_4^*}{1-\mathrm{e}^{-2\lambda T_4^*}} = \frac{1}{\lambda}. \tag{16}$$

若$\lambda \leqslant L$取$T_5^* = 1$, 否则取$T_5^* > 0$且满足方程

$$\frac{T_5^*}{1-\mathrm{e}^{-(\lambda-L)T_5^*}} = \frac{2}{\lambda - L}. \tag{17}$$

令$T^* = \min\{1, T_0^*, T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*, T_5^*\}$. 当$T \in (0, T^*)$时, 记$N^*$是满足关系式(15)的最小正整数. 定义Lyapunov函数

$$V_{\mathrm{T}}(x) = T\sum_{k=0}^{N^*-1}\varphi'(k,x)\varphi(k,x).$$

首先, 在式(11)中取$y=0$, 有

$$(1-LT)\|\varphi(k,x)\| \leqslant \|\varphi(k+1,x)\| \leqslant (1+LT)\|\varphi(k,x)\|.$$

利用$1-LT < \mathrm{e}^{-LT}$和式(15), 有

$$V_{\mathrm{T}}(x) \geqslant T\sum_{k=0}^{N^*-1}(1-LT)^{2k}\|x\|^2 > T\frac{1-(\mathrm{e}^{-2N^*LT})}{2LT-L^2T^2}\|x\|^2 > \frac{1-(\mathrm{e}^{-2N^*\lambda T})^{\frac{L}{\lambda}}}{2L}\|x\|^2 \geqslant \frac{1-(\frac{1}{2\alpha^2})^{\frac{L}{\lambda}}}{2L}\|x\|^2.$$

另一方面, 考虑到式(16), 又有

$$V_{\mathrm{T}}(x) \leqslant T\sum_{k=0}^{N^*-1}\alpha^2\|x\|^2\mathrm{e}^{-2k\lambda T} = \alpha^2(T\frac{1-\mathrm{e}^{-2N^*\lambda T}}{1-\mathrm{e}^{-2\lambda T}})\|x\|^2 < \alpha^2\frac{T}{1-\mathrm{e}^{-2\lambda T}}\|x\|^2 < \frac{\alpha^2}{\lambda}\|x\|^2,$$

令$c_1 = \dfrac{1-(\frac{1}{2\alpha^2})^{\frac{L}{\lambda}}}{2L}$, $c_2 = \dfrac{\alpha^2}{\lambda}$, 式(12)成立.

其次, 由式(15)有

$$V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^*(x)) - V_{\mathrm{T}}(x) \leqslant T(\alpha^2\mathrm{e}^{-2N^*\lambda T}-1)\|x\|^2 \leqslant -\frac{1}{2}T\|x\|^2,$$

令$c_3 = \dfrac{1}{2}$, 式(13)成立.

最后, 由式(11)可知

$$\|\varphi(k+1,x) - \varphi(k+1,y)\| \leqslant (1+LT)\|\varphi(k,x)-\varphi(k,y)\|,$$

于是, 利用$1+LT \leqslant \mathrm{e}^{LT}$有

$$\begin{aligned}
&|V_{\mathrm{T}}(x) - V_{\mathrm{T}}(y)| = \\
&T|\sum_{k=0}^{N^*-1}\big(\varphi'(k,x)(\varphi(k,x)-\varphi(k,y)) + \\
&\varphi'(k,y)(\varphi(k,x)-\varphi(k,y))\big)| \leqslant \\
&T\sum_{k=0}^{N^*-1}(\|\varphi(k,x)\| + \|\varphi(k,y)\|)\cdot\|\varphi(k,x)-\varphi(k,y)\| \leqslant \\
&T\sum_{k=0}^{N^*-1}(\alpha\mathrm{e}^{-\lambda kT}\|x\| + \alpha\mathrm{e}^{-\lambda kT}\|y\|)\cdot\mathrm{e}^{kLT}\|x-y\| = \\
&\alpha T(\sum_{k=0}^{N^*-1}\mathrm{e}^{-(\lambda-L)kT})(\|x\|+\|y\|)\|x-y\|.
\end{aligned}$$

若$\lambda > L$, 考虑到式(17), 有

$$\alpha T(\sum_{k=0}^{N^*-1}\mathrm{e}^{-(\lambda-L)kT}) < \frac{\alpha T}{1-\mathrm{e}^{-(\lambda-L)T}} \leqslant \frac{2\alpha}{\lambda - L},$$

即$c_4 = \dfrac{2\alpha}{\lambda - L}$时, 式(14)成立. 若$\lambda = L$, 则由式(15)有

$$\alpha T(\sum_{k=0}^{N^*-1}\mathrm{e}^{-(\lambda-L)kT}) = \alpha TN^* \leqslant \frac{\alpha\ln(2\alpha)}{\lambda},$$

即$c_4 = \dfrac{\alpha\ln(2\alpha)}{\lambda}$时, 式(14)成立. 若$\lambda < L$, 利用$T \in (0,1)$时$\dfrac{T}{\mathrm{e}^{-(\lambda-L)T}-1} \leqslant \dfrac{1}{L-\lambda}$和式(15), 有

$$\alpha T(\sum_{k=0}^{N^*-1}\mathrm{e}^{-(\lambda-L)kT}) \leqslant \frac{\alpha}{L-\lambda}(\mathrm{e}^{N^*(L-\lambda)T}-1) \leqslant \frac{\alpha}{L-\lambda}((2\alpha)^{\frac{L-\lambda}{\lambda}}-1),$$

即$c_4 = \dfrac{\alpha}{L-\lambda}((2\alpha)^{\frac{L-\lambda}{\lambda}}-1)$时, 式(14)成立. 综合3种情况, 式(14)总成立, 定理2得证.

4 全局指数稳定的新条件(New conditions for globally exponential stability)

定理 3 假定依据近似模型(6)设计了采样控制器(3). 如果:

1) 闭环近似模型.

$$x[k+1] = F_{\mathrm{T}}^{ap}(x[k], u_{\mathrm{T}}(x[k])), \tag{18}$$

全局指数稳定;

2) 存在常数$T_1^*, L > 0$, 当$T \in (0, T_1^*)$时, 对于任意$x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|F_{\mathrm{T}}^{ap}(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - F_{\mathrm{T}}^{ap}(y, u_{\mathrm{T}}(y)) - (x-y)\| \leqslant LT\|x-y\|;$$

3) 存在函数$\rho \in \mathcal{K}_\infty$和常数$T_2^* > 0$, 当$T \in (0,$

T_2^*)时, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 近似模型的误差满足

$$\|F_{\mathrm{T}}^{ex}(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - F_{\mathrm{T}}^{ap}(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant T\rho(T)\|x\|;$$

那么, 闭环精确模型(7)全局指数稳定.

证 由1) 2)和定理2, 可知存在 Lyapunov 函数$V_{\mathrm{T}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, 常数$T_3^*, c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$, 当$T \in (0, T_3^*)$时, 对任意$x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$c_1\|x\|^2 \leqslant V_{\mathrm{T}}(x) \leqslant c_2\|x\|^2, \tag{19}$$

$$V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^{ap}(x)) - V_{\mathrm{T}}(x) \leqslant -c_3T\|x\|^2, \tag{20}$$

$$|V_{\mathrm{T}}(x) - V_{\mathrm{T}}(y)| \leqslant c_4(\|x\| + \|y\|)\|x - y\|. \tag{21}$$

由式(19)和式(20)有

$$\|F_{\mathrm{T}}^{ap}(x)\| \leqslant \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x\|.$$

令$T_4^* > 0$且满足方程

$$\rho(T_4^*)\left(2\sqrt{\frac{c_2}{c_1}} + T_4^*\rho(T_4^*)\right) = \frac{c_3}{2c_4}, \tag{22}$$

再令$T^* = \min\{1, T_0^*, T_1^*, T_2^*, T_3^*, T_4^*\}$. 当$T \in (0, T^*)$时, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 利用3)和式(22)有

$$\begin{aligned}
&V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^{ex}(x, u_{\mathrm{T}}(x))) - V_{\mathrm{T}}(x) = \\
&V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^{ap}(x, u_{\mathrm{T}}(x))) - V_{\mathrm{T}}(x) + \\
&V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^{ex}(x, u_{\mathrm{T}}(x))) - V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^{ap}(x, u_{\mathrm{T}}(x))) \leqslant \\
&-c_3T\|x\|^2 + c_4\|F_{\mathrm{T}}^{ex}(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - F_{\mathrm{T}}^{ap}(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| \cdot \\
&(2\|F_{\mathrm{T}}^{ap}(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| + \\
&\|F_{\mathrm{T}}^{ex}(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - F_{\mathrm{T}}^{ap}(x, u_{\mathrm{T}}(x))\|) \leqslant \\
&-c_3T\|x\|^2 + c_4T\rho(T)\|x\|(2\sqrt{\frac{c_2}{c_1}}\|x\| + T\rho(T)\|x\|) \leqslant \\
&-\frac{1}{2}c_3T\|x\|^2.
\end{aligned}$$

由定理1, 闭环精确模型(7)全局指数稳定.

如果采用Euler近似模型, 那么有下面的定理.

定理 4 如果闭环Euler近似模型

$$x[k+1] = F_{\mathrm{T}}^{Eu}(x[k], u_{\mathrm{T}}(x[k])), \tag{23}$$

全局指数稳定, 并且存在常数$T_1^*, L_1 > 0$, 当$T \in (0, T_1^*)$时, 对于任意$x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|f(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - f(y, u_{\mathrm{T}}(y))\| \leqslant L_1\|x - y\|, \tag{24}$$

那么闭环精确模型(7)全局指数稳定.

证 首先, 易证定理3假设1) 2)均成立.

其次, 设$f(x, u)$关于x的Lipschitz常数为L_2, 则对于任意$x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|f(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - f(y, u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant L_2\|x - y\|. \tag{25}$$

设$\phi(t)$是系统(1)在初始状态x和恒定输入$u_{\mathrm{T}}(x)$下的状态, 则$\phi(t)$满足方程

$$\dot{\phi}(t) = f(\phi(t), u_{\mathrm{T}}(x)), \ \ \phi(0) = x.$$

简单计算可知, 对于向量$\phi(t) - x$, 总有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi(t) - x\| \leqslant \|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi(t) - x)\| = \|f(\phi(t), u_{\mathrm{T}}(x))\|,$$

在式(24)中取$y = 0$, 有

$$\|f(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant L_1\|x\|. \tag{26}$$

利用范数三角不等式和式(25)(26), 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\phi(t) - x\| \leqslant \\
&\|f(\phi(t), u_{\mathrm{T}}(x)) - f(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| + \|f(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant \\
&L_2\|\phi(t) - x\| + L_1\|x\|.
\end{aligned}$$

由常微分方程比较引理[17], 有

$$\|\phi(t) - x\| \leqslant \frac{L_1}{L_2}\|x\|(\mathrm{e}^{L_2t} - 1). \tag{27}$$

将式(27)代入式(25), 得到

$$\|f(\phi(t), u_{\mathrm{T}}(x)) - f(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant L_1\|x\|(\mathrm{e}^{L_2t} - 1).$$

再次利用范数三角不等式和式(26),

$$\begin{aligned}
&\|f(\phi(t), u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant \\
&\|f(\phi(t), u_{\mathrm{T}}(x)) - f(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| + \|f(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant \\
&L_1\|x\|\mathrm{e}^{L_2t}.
\end{aligned}$$

分段积分并利用式 (25) 和 Peano 核定理(文[18]中A.2.2.6),

$$\begin{aligned}
&\|F_{\mathrm{T}}^{ex}(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - F_{\mathrm{T}}^{Eu}(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| = \\
&\|\int_0^T (T - \xi)[\frac{\partial f}{\partial x}](\phi(\xi), u_{\mathrm{T}}(x))f(\phi(\xi), u_{\mathrm{T}}(x))\mathrm{d}\xi\| \leqslant \\
&L_1L_2\|x\|\int_0^T (T - \xi)\mathrm{e}^{L_2\xi}\mathrm{d}\xi = \\
&L_1L_2\|x\|\frac{\mathrm{e}^{L_2T} - L_2T - 1}{L_2^2} = \\
&\frac{L_1}{L_2}\frac{\mathrm{e}^{L_2T} - L_2T - 1}{T^2}T^2\|x\|.
\end{aligned}$$

考虑到当$T \in (0, 1]$时$\dfrac{\mathrm{e}^{L_2T} - L_2T - 1}{T^2}$是增函数, 令$\gamma = \dfrac{L_1}{L_2}(\mathrm{e}^{L_2} - L_2 - 1)$, $T_2^* = \min\{1, T_1^*\}$, 则当$T \in (0, T_2^*)$时, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|F_{\mathrm{T}}^{ex}(x, u_{\mathrm{T}}(x)) - F_{\mathrm{T}}^{Eu}(x, u_{\mathrm{T}}(x))\| \leqslant \gamma T^2\|x\|. \tag{28}$$

令$\rho(T) = \gamma T$, 假设3)也成立. 于是, 由定理3, 闭环精确模型(7)全局指数稳定.

注 2 定理4成立, 则存在常数$T^*, \lambda > 0$和$\alpha_1 \geqslant 1$, 当$T \in (0, T^*)$时, 对于任意$x[0] \in \mathbb{R}^n$, 模型(7)的解满足

$$\|x[k]\| \leqslant \alpha_1 \mathrm{e}^{-\lambda kT}\|x[0]\|.$$

令$\alpha = \alpha_1(\frac{L_1}{L_2}(\mathrm{e}^{L_2T^*}-1)+1)\mathrm{e}^{\lambda T^*}$, 由式(27)可知, 当$t \in [kT, KT+T)$时, 由式(1) (2)和式(3)组成的闭环系统, 状态满足

$$\|x(t)\| \leqslant \alpha \mathrm{e}^{-\lambda t}\|x(0)\|.$$

也就是说, 对于上述闭环系统, $x=0$是指数稳定的平衡点.

5 比较与讨论(Comparisons and discussions)

文[15]的命题1.3曾给出闭环系统(7)全局指数稳定的一组条件. 现将本文结果与其作一比较.

① 定理3与文[15]的相同之处在于, 都假设3)成立. 3)保证了T充分小时闭环近似模型的误差上限正比于$\|x\|$, 并且当T趋于0时误差以更快的速度趋于0. 文[13,14]的例子表明, 缺少假设3), 闭环近似模型(18)稳定时, 精确模型(7)可能不稳定.

② 两者的相似之处在于, 文[15]假设, 存在Lyapunov函数$V_{\mathrm{T}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$和常数$T^*, \beta, c_1, c_2, c_3 > 0$, 当$T \in (0, T^*)$时, 对任意$x \in \mathbb{R}^n$, 有

$$c_1\|x\|^\beta \leqslant V_{\mathrm{T}}(x) \leqslant c_2\|x\|^\beta,$$
$$V_{\mathrm{T}}(F_{\mathrm{T}}^{ap}(x)) - V_{\mathrm{T}}(x) \leqslant -c_3T\|x\|^\beta.$$

而定理3代之以1). 由定理1, 上述假设蕴涵了1).

③ 两者的不同之处在于, 文[15]不要求2)成立, 而是假设Lyapunov函数V_{T}满足全局Lipschitz条件: 存在常数$L>0$, 当$T \in (0, T^*)$时, 对任意$x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$|V_{\mathrm{T}}(x) - V_{\mathrm{T}}(y)| \leqslant L\|x-y\|.$$

这一假设过于严格, x的二次型函数等常用候选Lyapunov函数均不满足. 定理3代之以更容易满足的2), 降低了构造Lyapunov函数的难度, 减弱了全局指数稳定的充分条件.

④ 两者共同的不足在于, 3)是否成立难以直接判定.定理4指出, 对于Euler近似模型, 不等式(24)可以同时保证2) 3)成立, 减少一个假设.

⑤ 与文[15]一样, 定理3、定理4证明中的不等式过于保守, 不适于估算T^*的大小. 如何得到一个不保守的T^*, 仍是一个待解决的问题.

6 仿真(Simulation)

考虑非线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ g(x_1)+u \end{pmatrix}, \tag{29}$$

其中函数

$$g(z) = \begin{cases} \pi^2/4 + z\cos\ z, z > \pi/2, \\ z^2, \qquad\qquad z \leqslant \pi/2. \end{cases} \tag{30}$$

式(29)的Euler近似模型为

$$\begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1[k] \\ x_2[k] \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2[k] \\ g(x_1[k]) + u[k] \end{pmatrix}. \tag{31}$$

基于式(31)设计采样控制器

$$u[k] = u_{\mathrm{T}}(x[k]) = -6x_1[k] - 5x_2[k] - g(x_1[k]). \tag{32}$$

容易验证式(31)和式(32)满足定理4的假设, 于是由式(29)和式(32)组成的闭环系统全局指数稳定.

用MATLAB7进行仿真, 用ODE45数值求解式(29)作为系统的真实状态, 取$T=0.2$, $(x_1[0], x_2[0])' = (2,1)'$, 结果如图1, 闭环系统确实指数稳定.

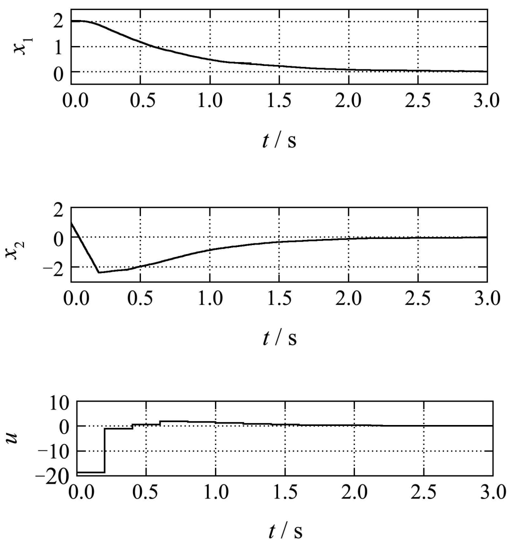

图 1　由式(29)和式(32)组成的闭环系统指数稳定

Fig. 1　The closed-loop system made up of (29) and (32) is exponentially stable

7 结论(Conclusion)

基于非线性采样系统的一般近似离散时间模型和Euler近似模型, 给出了闭环系统全局指数稳定的新条件. 取消了Lyapunov函数全局Lipschitz连续的假设, 减弱了闭环系统全局指数稳定的充分条件. 为用近似DTD方法设计采样控制器实现全局指数稳定提供了保证. 基于上述结果研究具体的近似DTD设计方法, 是下一步的工作.

参考文献(References):

[1] MONACO S, NORMAND-CYROT D. Issues on nonlinear digital control[J]. *European Journal of Control*, 2001, 7(2/3): 160 – 177.

[2] CHEN T, FRANCIS B A. *Optimal Sampled-Data Control Systems*[M]. London: Springer, 1995.

[3] ÅSTRÖM K J, WITTENMARK B. 计算机控制系统—原理与设计[M]. 第3版. 北京: 电子工业出版社, 2001.

(ÅSTRÖM K J, WITTENMARK B. *Compute Controlled Systems-theory and Design*[M]. 3rd Edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2001.)

[4] GOODWIN G C, MCINNIS B, LONG R S. Adaptive control algorithm for waste water treatment and pH neutralization[J]. *Optimal Control Applications & Methods*, 1982, 3(4): 443 – 459.

[5] DOCHAIN D, BASTIN G. Adaptive identification and control algorithms for nonlinear bacterial growth systems[J]. *Automatica*, 1984, 20(5): 621 – 634.

[6] MAREELS I M Y, PENFOLD H B, EVANS R J. Controlling nonlinear time-varying systems via Euler approximations[J]. *Automatica*, 1992, 28(4): 681 – 686.

[7] LU P. Approximate nonlinear receding-horizon control laws in closed form[J]. *International Journal of Control*, 1998, 71(1): 19 – 34.

[8] GYURKOVICS É, ELAIW A M. Stabilization of sampled-data nonlinear systems by receding horizon control via discrete-time approximations[J]. *Automatica*, 2004, 40(12): 2017 – 2028.

[9] DONTCHEV A L, HAGER W W. The Euler approximation in state constrained optimal control[J]. *Mathematics of Computation*, 2001, 70(233): 173 – 203.

[10] GRÜNE L, NEŠIĆ D. Stabilization of sampled-data nonlinear systems via their approximate models: an optimization based approach[C] //*Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*. Las Vegas: IEEE, 2002: 1934 – 1939.

[11] ARCAK M, NEŠIĆ D. A framework for nonlinear sampled-data observer design via approximate discrete-time models and emulation[J]. *Automatica*, 2004, 40(11): 1931 – 1938.

[12] NEŠIĆ D, TEEL A R. stabilization of sampled-data nonlinear systems via backstepping on their Euler approximate model[J]. *Automatica*, 2006, 42(10): 1801 – 1808.

[13] NEŠIĆ D, TEEL A R, KOKOTOVIĆ P V. Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximation[J]. *Systems & Control Letters*, 1999, 38(4/5): 259 – 270.

[14] NEŠIĆ D, TEEL A R. A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models[J]. *IEEE Transaction on Automatic Control*, 2004, 49(7): 1103 – 1122.

[15] LAILA D S, NEŠIĆ D, ASTOLFI A. Sampled-data control of nonlinear systems[M] //LORÍA A, LAMNABHI-LAGARRIGUE F, PANTELEY E, eds. *Advanced Topics in Control Systems Theory: Lecture Notes from FAP 2005, Vol. 328 of Lecture Notes in Control and Information Sciences*. Berlin: Springer, 2006: 91 – 137.

[16] 汪志鸣. 连续时间非线性控制系统的采样镇定控制器的设计–基于近似离散化模型上的方法[D]. 上海: 华东师范大学, 2003.
(WANG Zhiming. *Sampled-data stabilization controller design of continuous-time nonlinear control systems: an approach based on their approximate discrete-time models*[D]. Shanghai: East China Normal University, 2003.)

[17] KHALIL H K. 非线性系统[M]. 第3版. 北京: 电子工业出版社, 2005.
(KHALIL H K. *Nonlinear Systems*[M]. 3rd edition. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2005.)

[18] ISERLES A. 微分方程数值分析基础教程[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005.
(ISERLES A. *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2005.)

作者简介:

金辉宇 (1975—), 男, 中国科学技术大学讲师, 博士, 主要从事非线性系统计算机控制的研究, E-mail: jinhy@ustc.edu.cn;

殷保群 (1962—), 男, 中国科学技术大学教授, 博士生导师, 主要从事随机DEDS、排队系统、信息网络及其应用等方面的研究工作, E-mail: bqyin@ustc.edu.cn.