

有限时间死区修正迭代学习控制器的设计

谢华英, 孙明轩

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310032)

摘要: 在任意初始定位条件下, 讨论具有有限时间死区修正的迭代学习控制器设计方法. 针对一类高阶不确定非线性时变系统, 通过将其不确定性项线性参数化表达, 进行迭代学习控制器设计; 并考虑不确定项界函数参数化情形下的鲁棒迭代学习控制方法. 通过引入有限时间死区, 设计的控制器可使得所定义的误差函数在有限时间内收敛至零; 进而依据能控格莱姆矩阵构造的初始修正项可使得系统在预先指定的时间区间上实现完全跟踪. 理论分析及数值仿真结果表明, 在保证误差函数始终围于所设计的有限时间死区内的同时, 闭环系统中所有信号均有界.

关键词: 迭代学习控制; 初始修正吸引子; 有限时间死区; 格莱姆矩阵

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Design of iterative learning controllers with finite-time dead-zone modification

XIE Hua-ying, SUN Ming-xuan

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310032, China)

Abstract: Iterative learning control with finite-time dead-zone modification is presented for a class of higher order nonlinear time-varying systems in the presence of initial condition errors. The Lyapunov-like approach is applied to design the iterative learning controller for dealing with parametric time-varying uncertainties, while a robust method is given to cope with norm-bounded uncertainties. With the introduction of finite-time dead-zone, the developed controllers ensure the specified error function to approach to zero over a pre-specified time-interval. A Gramian-based initial rectifying action is used to realize the complete tracking over another pre-specified time-interval. It is shown in the theoretical analysis and numerical simulation that the system states completely follow the desired trajectories after a pre-specified time, and the error function is always confined to stay within the region defined by the finite-time dead-zone. All the signals in the closed-loop system are proved to be bounded.

Key words: iterative learning control; initial rectified attractors; finite-time dead-zone; Gramian

1 引言(Introduction)

迭代学习控制适合于有限时间上完成重复控制的受控对象, 利用系统先前的控制经验和输出误差修正当前的控制作用, 它能使系统输出收敛于期望值, 实现完全跟踪^[1]. 因其控制器设计简单, 跟踪精度高, 自1984年提出以来, 已越来越多地受到人们的关注.

迭代学习控制在每次迭代时需进行初始定位操作. 早期的学习算法要求系统满足准确的初始定位条件, 即每次迭代中系统的初始状态都与期望跟踪轨迹的初始状态相等. 在实际工程应用中, 准确的初始定位难以实现. 理论分析表明, 跟踪误差仅能收敛于半径大小与初始误差成正比的一个邻域内, 由此

造成系统跟踪性能的降低^[2]. 关于迭代学习控制初值问题的研究是十分有意义的课题. 在固定初始误差下, 引入初始脉冲作用可实现系统完全跟踪性能, 但脉冲作用在实际中无法实现^[3]. 文献[4]引入的初始修正作用是可实现的有限作用, 这种有限作用使得系统从一预指定的时刻起实现完全跟踪, 起始段的轨迹也是预先设定的. 采用PD型学习算法也是克服固定初始误差影响的有效方法, 它可保证跟踪误差沿时间轴渐近收敛至零^[5].

近年来兴起的类Lyapunov方法, 在任意初始误差下讨论迭代学习控制系统的跟踪性能. 通过修正系统的期望轨迹, 使期望轨迹的一初始段与相应的实际轨迹相同, 初始误差变为零. 由于这类方法允许非

一致期望轨迹, 所设计的学习控制器可改善系统的跟踪性能^[6,7]. 但系统的设计方法值得进一步研究. 文献[8]引入时变边界层, 依据边界层的渐近收敛特性, 设计的迭代学习控制器可使系统轨迹沿时间轴渐近收敛于期望轨迹. 不需要迭代, 通常的反馈控制技术也可实现渐近跟踪性能. 因此, 在放宽初始定位条件的同时, 又能够实现完全跟踪是更有意义的. 为了实现完全跟踪, 可设计在一预先指定时刻截止的死区; 通过迭代学习, 系统跟踪误差被完全囿于设定的死区内, 从预先指定的时刻起被强制为零. 有限时间吸引子^[9]及系统的可控性概念^[10]涉及有限时间控制器设计, 给出的有限时间收敛的轨迹可用作上述死区. 具体的针对1阶系统的应用结果见文献[11,12].

本文将有限时间死区迭代学习控制方法推广至一类高阶非线性系统. 针对系统中的时变不确定项, 通过将其线性参数化表达, 或考虑不确定项界函数参数化, 给出迭代学习控制器的设计方法. 在系统存在初始状态误差的情形下, 引入有限时间死区, 可使所得设计的误差函数在一预先指定的时间内收敛至零. 在此基础上, 依据能控格莱姆矩阵设计初始修正项, 使得系统的状态在随后的另一个预指定时间内完全跟踪上期望状态, 最终实现系统在预先确定的时间区间上的完全跟踪.

2 问题的提出(Problem formulation)

考虑下述不确定非线性时变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{i,k}(t) = x_{i+1,k}(t), & i = 1, 2, \dots, n-1. \\ \dot{x}_{n,k}(t) = g(t)(f(x_k, t) + u_k(t)), \\ y_k(t) = x_{1,k}(t). \end{cases} \quad (1)$$

式中: $t \in [0, T]$, $k = 0, 1, 2, \dots$ 为重复作业次数, $x_k(t) = [x_{1,k}(t), x_{2,k}(t), \dots, x_{n,k}(t)]^T \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态, $u_k(t), y_k(t) \in \mathbb{R}$ 分别为控制输入和系统输出, $f(x_k, t)$ 表示系统的时变不确定特性, $g(t)$ 是一未知时变函数. 给定期望轨迹 $x_d(t) = [x_{1,d}(t), x_{2,d}(t), \dots, x_{n,d}(t)]^T$, 记跟踪误差为 $e_{i,k} = x_{i,d} - x_{i,k}$, 状态误差为

$$E_k(t) = x_k(t) - x_d(t) = [e_{1,k}, e_{2,k}, \dots, e_{n,k}]^T = [e_k, \dot{e}_k, \dots, e_k^{(n-1)}]^T.$$

假设1 在每次迭代时, 系统初态满足 $\|E_k(0)\| \leq \kappa_0, \forall k$. 这里要求 $\kappa_0 > 0$ 已知, 但不要求足够小.

假设2 不失一般性, 设 $g(t) > 0$.

本文的控制任务是, 在以上假设条件下, 设计合适的迭代学习控制器, 使得当 $k \rightarrow \infty$ 时, 在给定区间 $[\Delta, T]$ 上, $x_k(t) \rightarrow x_d(t)$, 其中 $\Delta \in (0, T)$ 是可预

先指定的.

为控制器设计需要, 引入以下两个函数^[12]:

定义1 含死区的符号函数 $\varsigma_\varepsilon(e)$ 定义为

$$\varsigma_\varepsilon(e) = \begin{cases} \operatorname{sgn} e, & |e| \geq \varepsilon, \\ 0, & |e| < \varepsilon. \end{cases} \quad (2)$$

定义2 区间示性函数 $\iota_\varepsilon(e)$ 定义为

$$\iota_\varepsilon(e) = \begin{cases} 1, & |e| \geq \varepsilon, \\ 0, & |e| < \varepsilon. \end{cases} \quad (3)$$

以上定义的两函数具有性质:

- 1) $\iota_\varepsilon(e)\varsigma_\varepsilon(e) = \varsigma_\varepsilon(e)$; 2) $\varsigma_\varepsilon(e)\varsigma_\varepsilon(e) = \iota_\varepsilon(e)$;
- 3) $\iota_\varepsilon(e)\iota_\varepsilon(e) = \iota_\varepsilon(e)$; 4) $\iota_\varepsilon(e)(|e| - \varepsilon)^2 \in C^1$.

3 数学准备(Mathematical preliminaries)

对于线性系统

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon, \quad \varepsilon(t_0) = \varepsilon_0, \quad (4)$$

式中: $\varepsilon \in \mathbb{R}, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 其解可表示为

$$\varepsilon(t) = e^{A(t-t_0)}\varepsilon(t_0), \quad t > t_0. \quad (5)$$

当 A 是 Hurwitz 的, 系统有唯一的吸引子 $\varepsilon = 0$. 显然, 对于非零 ε_0 , 这是一个无穷时间吸引子, 当时间趋于无穷大时, $\varepsilon(t)$ 收敛于该吸引子, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$. 为设计迭代学习控制器, 我们更感兴趣的是有限时间吸引子.

3.1 有限时间收敛性(Finite time convergence)

对于有限时间吸引子, $\varepsilon(t) = 0, t > t_1$. 其中 $t_1 < \infty$.

定义3^[11] 称 $\varepsilon = 0$ 为初始修正吸引子, 若

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + r, \quad r(t) = -\zeta(t-t_0)e^{A(t-t_0)}\varepsilon(t_0), \quad (6)$$

式中: $\varepsilon, r \in \mathbb{R}^n, \zeta(t)$ 满足

$$\begin{cases} \zeta(t) = 0, & t \leq t_0, t \geq t_1, \\ \int_{t_0}^{t_1} \zeta(s)ds = 1. \end{cases}$$

求解式(6), 可得 $\varepsilon(t) = 0, t \geq t_1$, 并且

$$\varepsilon(t) = (1 - \int_{t_0}^{t_1} \zeta(\tau - t_0)d\tau)e^{A(t-t_0)}\varepsilon(t_0), \quad t_0 \leq t < t_1. \quad (7)$$

进一步,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}(t) &= (1 - \int_{t_0}^{t_1} \zeta(\tau - t_0)d\tau)e^{A(t-t_0)}A\varepsilon(t_0) - \\ &\quad \zeta(t-t_0)e^{A(t-t_0)}\varepsilon(t_0). \end{aligned}$$

易知, $\dot{\varepsilon}(t)$ 在 t_1 时刻的连续性, 即在 t_1 时的光滑对接, 取决于 ζ -函数的连续性. 若 ζ -函数在 t_1 处连续, 则可保证 ε 在 t_1 处光滑对接.

利用能控格莱姆矩阵, 也可以设计初始修正吸引子. 考虑下述线性系统^[10]:

$$\dot{\varepsilon} = A\varepsilon + Br, \quad (8)$$

其中: $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}$. 取

$$r(t) = \begin{cases} -B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(t_0, t_1) e^{A^T(t_1-t_0)} \varepsilon(t_0), & t \in [t_0, t_1], \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases} \quad (9)$$

并且

$$W_c(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau. \quad (10)$$

当系统 $[A, B]$ 能控时, $W_c(t_0, t_1)$ 非奇异. 将 $r(t)$ 代入式(8), 可解得 $\varepsilon(t) = 0$, $t \geq t_1$.

值得说明的是, 利用能控格莱姆矩阵设计的控制量 $r(t)$ 在 $t = t_0$ 以及 $t = t_1$ 时是不连续的, 不满足本文中的可导性要求. 因此, 按下述方式给出 $r(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon} = A\varepsilon + Br, \\ \dot{r} = \beta\varepsilon + \alpha r + u_r. \end{cases} \quad (11)$$

其中: $\beta \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_r \in \mathbb{R}$.

令 $\bar{\varepsilon} = [\varepsilon \ r]^T$, 并记

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & B \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \bar{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

式(11)可表示成

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = \bar{A}\bar{\varepsilon} + \bar{B}u_r. \quad (12)$$

设置合适的 α, β 可使得该系统满足可控性条件. 为保证 $\bar{\varepsilon}(t) = 0$, $t \geq t_1$, 选取

$$u_r(t) = \begin{cases} -\bar{B}^T e^{\bar{A}^T(t_1-t)} \bar{W}_c^{-1}(t_1, t_0) e^{\bar{A}^T(t_1-t_0)} \bar{\varepsilon}(t_0), & t \in [t_0, t_1], \\ 0, & t \geq t_1, \end{cases} \quad (13)$$

$$\bar{W}_c(t_1, t_0) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\bar{A}(t_1-\tau)} \bar{B} \bar{B}^T e^{\bar{A}^T(t_1-\tau)} d\tau.$$

将 $u_r(t)$ 代入式(12)可求得 $r(t)$. 特别地, 当 $\beta = 0$ 时, $r(t)$ 可由式(11)中的第2式直接求得.

注 1 式(11)不仅保证了 r 在 $t = t_0$ 以及 $t = t_1$ 的连续性, 也自然地使其满足本文中的可导性要求.

3.2 有限时间死区的设计(Design of finite time dead-zone)

引入误差函数

$$s_{r,k}(t) = \lambda_1 e_{1,k}(t) + \lambda_2 e_{2,k}(t) + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1,k}(t) + e_{n,k}(t) + r_k(t). \quad (14)$$

其中 λ_i 为Hurwitz多项式 $\Delta(D) = D^{n-1} + \lambda_{n-1}D^{n-1} + \cdots + \lambda_1$ 的系数. 由假设1知

$$|s_{r,k}(0)| = |\lambda_1 e_{1,k}(0) + \lambda_2 e_{2,k}(0) + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n-1,k}(0) + e_{n,k}(0) + r_k(0)| \leq (\|A\| + 1)\kappa_0 + |r(0)|,$$

其中 $A = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{n-1}, 1\}$.

选取 $[0, T]$ 上可导的 $\varepsilon(t)$ 函数, 使其满足以下条件:

- 1) $\varepsilon_0 \geq (\|A\| + 1)\kappa_0 + |r(0)|$;
- 2) $\varepsilon(t) = 0$, $t \in [T_1, T]$. 这里 $T_1 > 0$.

死区函数 $\varepsilon(t)$ 界定了一有限时间死区, 它在很大程度上决定了系统的跟踪特性. 笔者期望系统实现有限时间完全跟踪, 故设计死区在一个预先指定的时刻上截止. 在依此设计的控制器作用下, 误差函数 $s_{r,k}$ 将囿于由 ε 所确定的范围内. 依据死区函数的有限时间截止要求, 给出以下两种 ε 函数以供选用:

$$\varepsilon_1(t) = (10 \frac{(t_1-t)^3}{(t_1-t_0)^3} - 15 \frac{(t_1-t)^4}{(t_1-t_0)^4} + 6 \frac{(t_1-t)^5}{(t_1-t_0)^5}) \varepsilon_0, \quad t_0 \leq t < t_1, \quad (15)$$

$$\varepsilon_2(t) = (1 - \int_{t_0}^t \zeta(s-t_0) ds) e^{a(t-t_0)} \varepsilon_0, \quad t_0 \leq t < t_1. \quad (16)$$

式中: $a < 0$, ζ -函数由定义3给出. 文献[9]中给出了3种具体的 ζ -函数: $\zeta_1 - \zeta_3$. 在此, 给出另一种 ζ -函数:

$$\zeta_4(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0, \\ \frac{4}{3(t_1-t_0)}, & t \in [t_0, (t_1+t_0)/2), \\ \frac{8(t_1-t)}{3(t_1-t_0)^2}, & t \in [(t_1+t_0)/2, t_1), \\ 0, & t \geq t_1. \end{cases}$$

4 迭代学习控制(Iterative learning control)

针对非零初始误差情形, 笔者在设计的过程中引入的有限时间死区 $\varepsilon(t)$, 使得误差函数 $s_{r,k}$ 自第1个预指定时刻起收敛至零. 而 $s_{r,k}$ 中设计的初始修正项 $r_k(t)$, 则可使得系统自第2个预指定时刻起实现完全跟踪.

在实际问题中, 系统(1)的不确定项 $f(x_k, t)$ 存在着可线性参数化的情形.

假设 3 存在一时变参数向量 $\theta(t)$, 可将 $f(x_k, t)$

t) 表达为

$$f(x_k, t) = \varphi^T(x_k, t)\theta(t), \quad (17)$$

其中 $\varphi \in \mathbb{R}^n$ 是已知的向量值非线性函数.

对式(14)两边求导, 得

$$\begin{aligned} \dot{s}_{r,k}(t) = & \lambda_1 e_{2,k}(t) + \lambda_2 e_{3,k}(t) + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n,k}(t) + \\ & \dot{r}_k(t) + \dot{x}_{n,d}(t) - \dot{x}_{n,k}(t) = \\ & v_k(t) - g(t)(f(x_k, t) + u_k(t)). \end{aligned} \quad (18)$$

式中

$$v_k(t) = \lambda_1 e_{2,k}(t) + \lambda_2 e_{3,k}(t) + \cdots + \lambda_{n-1} e_{n,k}(t) + \dot{x}_d(t) + \dot{r}_k(t).$$

设计如下迭代学习控制器:

$$u_k(t) = c(|s_{r,k}| - \varepsilon)\varsigma_\varepsilon(s_{r,k}) - \psi_k^T \hat{p}_k. \quad (19)$$

参数更新律为

$$\begin{cases} \hat{p}_k(t) = \text{sat}(\hat{p}_{k-1}(t)) - \gamma(|s_{r,k}| - \varepsilon)\psi_k \varsigma_\varepsilon(s_{r,k}), \\ \hat{p}_{-1}(t) = 0. \end{cases} \quad (20)$$

式中:

$$\begin{aligned} c, \gamma > 0, p &= [\frac{1}{g}, \frac{\dot{g}}{2g^2}, \theta(t)]^T, \\ \psi(x_k(t), t) &= \\ &[\dot{\varepsilon}\varsigma_\varepsilon(s_{r,k}) - v_k(t), (|s_{r,k}| - \varepsilon)\varsigma_\varepsilon(s_{r,k}), \varphi(x_k(t), t)]^T. \end{aligned}$$

饱和函数 sat 定义为

$$\text{sat}(p_k) = \begin{cases} \bar{p}^1, & p_k > \bar{p}^1, \\ p_k, & \bar{p}^2 \leq p_k \leq \bar{p}^1, \\ \bar{p}^2, & p_k < \bar{p}^2, \end{cases}$$

$\bar{p}^1, \bar{p}^2$ 分别为限幅上限和下限. 这里, 假设 p 处在限幅范围内. 记 $\tilde{p}_k(t) = p(t) - \hat{p}_k(t)$, $\hat{p}_k$ 为时变参数 p 的估计.

为分析闭环系统的稳定性与收敛性, 选取非负函数

$$L_k(t) = V_k(t) + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t \tilde{p}_k^T \tilde{p}_k ds, \quad (21)$$

$$V_k(t) = \frac{1}{2g} (|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}). \quad (22)$$

引理 1 在假设1~3下, 若系统(1)采用控制律(19)和参数更新律(20), 则构成的闭环系统使得下式成立:

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq \\ -V_{k-1}(t) - \int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{2} \int_0^t (|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) \psi_k^T \psi_k ds. \quad (23)$$

证 应用控制律(19), V_k 的导数可写成

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) = & -c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) - \\ & \psi_k^T \tilde{p}_k (|s_{r,k}| - \varepsilon) \varsigma_\varepsilon(s_{r,k}). \end{aligned} \quad (24)$$

依据假设1以及死区函数的设计, 易知 $|s_{r,k}(0)| < \varepsilon(0)$, 因而 $V_k(0) = 0$. 对式(24)两边积分:

$$\begin{aligned} V_k(t) = & - \int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - \\ & \int_0^t \psi_k^T \tilde{p}_k (|s_{r,k}| - \varepsilon) \varsigma_\varepsilon(s_{r,k}) ds. \end{aligned} \quad (25)$$

计算 $L_k(t)$ 的差分, 并将式(25)代入得

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) = & \\ & - \int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - \\ & \int_0^t \psi_k^T \tilde{p}_k (|s_{r,k}| - \varepsilon) \varsigma_\varepsilon(s_{r,k}) ds - V_{k-1}(t) + \\ & \frac{1}{2\gamma} \int_0^t (\tilde{p}_k^T \tilde{p}_k - \tilde{p}_{k-1}^T \tilde{p}_{k-1}) ds. \end{aligned} \quad (26)$$

由于

$$(a-b)^T(a-b) \geq (a - \text{sat}(b))^T(a - \text{sat}(b)), \quad (27)$$

其中 $a = \text{sat}(a)$, 且

$$\begin{aligned} \tilde{p}_k^T \tilde{p}_k - [p - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]^T [p - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})] = \\ -2\tilde{p}_k^T(t) [\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})] - \\ [\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]^T [\hat{p}_k - \text{sat}(\hat{p}_{k-1})]. \end{aligned} \quad (28)$$

利用不等式(27)(28), 并将更新律(20)代入(26), 可得

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq \\ & - \int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - V_{k-1}(t) - \\ & \frac{\gamma}{2} \int_0^t (|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) \psi_k^T \psi_k ds. \end{aligned} \quad (29)$$

证毕.

定理 1 对于满足假设1~3的系统(1), 在控制律(19)和参数更新律(20)的作用下, 闭环系统的所有信号均有界, 且当 $k \rightarrow \infty$, $s_{r,k}(t)$ 在 $[0, T]$ 上收敛于 $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

证 有界性证明. 鉴于 $L_0(t)$ 在时间轴上的连续性, 在有限时间区间 $[0, T]$ 内, $L_0(t)$ 有界. 由式(23)可得, $L_k(t)$ 有界. $L_k(t)$ 的有界性意味着 $s_{r,k}(t)$, $\hat{p}_k(t)$ 有界. 进一步地, 由式(19)可知 $u_k(t)$ 有界.

收敛性证明. 由式(23)得

$$V_{k-1}(t) \leq L_{k-1}(t) - L_k(t).$$

给定非负整数 K , 从 $k = 0$ 到 K 求和得

$$\sum_{k=0}^K V_k(t) \leq L_0(t) - L_K(t).$$

$L_0(t), L_K(t)$ 有界, 意味着 $\lim_{k \rightarrow \infty} V_k(t) = 0$. 因为 $g(t) > 0$, 因此,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) = 0.$$

证毕.

注 2 由死区函数 ε 的定义知, $\varepsilon(t) = 0, t \in [T_1, T]$. 因此, $s_{r,k}(t)$ 在 $[0, T]$ 上收敛于 $[-\varepsilon, \varepsilon]$, 意味着 $s_{r,k}(t) = 0, t \in [T_1, T]$, 且 $s_{r,k}(t)$ 在 $t \in [0, T_1]$ 上也囿于 ε 的有限时间死区内. 进一步地, 误差函数中引入的依据能控格莱姆矩阵设计的初始修正项 $r_k(t)$ 可使得系统在 $[T_2, T]$ 上实现完全跟踪, 其中 $T_1 < T_2 < T$.

5 鲁棒迭代学习控制(Robust iterative learning control)

在一些实际场合, 有时仅能获得系统(1)中不确定性项的参数化界函数.

假设 4 存在一个非负时变参数向量 $\theta(t)$, 满足

$$|f(x_k, t)| \leq \varphi^T(x_k, t)\theta(t), \quad (30)$$

其中 $\varphi \in \mathbb{R}^n$ 是已知的非负向量值非线性函数.

设计如下鲁棒迭代学习控制器:

$$u_k(t) = c(|s_{r,k}| - \varepsilon)\varsigma_\varepsilon(s_{r,k}) - \psi_k^T \hat{p}_k. \quad (31)$$

其中参数更新律为

$$\begin{cases} \hat{p}_k(t) = \text{sat}(\hat{p}_{k-1}(t)) - \gamma ||s_{r,k}| - \varepsilon| \psi_k \iota_\varepsilon(s_{r,k}), \\ \hat{p}_{-1}(t) = 0. \end{cases} \quad (32)$$

式中:

$$\begin{aligned} c, \gamma > 0, p &= [\frac{1}{g}, \frac{\dot{g}}{2g^2}, \theta(t)]^T, \\ \psi(x_k(t), t) &= \\ &[\dot{\varepsilon}\varsigma_\varepsilon(s_{r,k}) - v_k(t), (|s_{r,k}| - \varepsilon)\varsigma_\varepsilon(s_{r,k}), \\ &-\varphi(x_k(t), t)]^T. \end{aligned}$$

记 $\tilde{p}_k(t) = p(t) - \hat{p}_k(t)$, $\hat{p}$ 为时变参数 p 的估计. sat 函数定义同前. 这里需要指出的是, 对于 p 中的第 3 项 $\theta(t)$, 因为 $\theta(t)$ 非负, 所以, 相应的限幅下限应大于零. 为分析闭环系统的稳定性与收敛性, 选取与第 4 节同样的非负函数 $L_k(t)$.

引理 2 在假设 1, 2 及假设 4 下, 若系统(1)采用控制律(31)和参数更新律(32), 则构成的闭环系统使得下式成立:

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq \\ -V_{k-1}(t) - \int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - \end{aligned}$$

$$\frac{\gamma}{2} \int_0^t (|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) \psi_k^T \psi_k ds. \quad (33)$$

证 应用式(31), V_k 的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V}_k(t) \leq &-c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) - \\ &\psi_k^T \tilde{p}_k ||s_{r,k}| - \varepsilon| \iota_\varepsilon(s_{r,k}). \end{aligned} \quad (34)$$

基于假设 1 以及死区函数的设计, 易知 $V_k(0) = 0$. 对式(34)两边积分:

$$\begin{aligned} V_k \leq &-\int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - \\ &\int_0^t \psi_k^T \tilde{p}_k ||s_{r,k}| - \varepsilon| \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds. \end{aligned} \quad (35)$$

计算 $L_k(t)$ 的差分, 并将式(35)代入得

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq &-\int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - \\ &\int_0^t \psi_k^T \tilde{p}_k ||s_{r,k}| - \varepsilon| \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - V_{k-1}(t) + \\ &\frac{1}{2\gamma} \int_0^t (\tilde{p}_k^T \tilde{p}_k - \tilde{p}_{k-1}^T \tilde{p}_{k-1}) ds. \end{aligned} \quad (36)$$

利用不等式(27)(28), 并将权值更新律(32)代入式(36):

$$\begin{aligned} L_k(t) - L_{k-1}(t) \leq &-\int_0^t c(|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) ds - V_{k-1}(t) - \\ &\frac{\gamma}{2} \int_0^t (|s_{r,k}| - \varepsilon)^2 \iota_\varepsilon(s_{r,k}) \psi_k^T \psi_k ds. \end{aligned} \quad (37)$$

证毕.

据式(33), 依照定理 1 同样的证明步骤, 得到下述定理:

定理 2 对于满足假设 1, 2 及假设 4 的系统(1), 在控制律(31)和参数更新律(32)的作用下, 闭环系统的所有信号均有界, 并且, 当 $k \rightarrow \infty$, $s_{r,k}(t)$ 在 $[0, T]$ 上收敛于 $[-\varepsilon, \varepsilon]$.

注 3 定理 2 表明, 由于设计的有限时间死区的限制, 鲁棒学习同样可以保证 $s_{r,k}(t) = 0, t \in [T_1, T]$, 进一步地, $s_{r,k}$ 中引入的初始修正项 $r_k(t)$ 可使得 $e_k = 0, t \in [T_2, T]$. 可以看出, 在本文提出的控制算法中, 时变死区对于实现指定区间上的完全跟踪起了关键作用, 它的设计是多种多样的.

6 数值仿真(Numerical simulation)

被控对象为下述 2 阶系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \\ \quad -(1 + \cos t)x_1^2(t)\cos(x_1(t)) + u(t), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (38)$$

在数值仿真中, 系统的作业区间为 $[T_0, T] = [0, 10]$. 期望轨迹 $x_d(t) = \sin^3 t, t \in [0, 10]$. 在每

次迭代开始时, 设置初始状态 $x_{i,k}(0) = \text{rand}/2$, 其中rand是区间 $[0, 1]$ 上均匀分布的随机数. 分别采用所设计的学习控制器, 并分两步验证下述结论:

- 1) 引入的有限时间死区使得误差函数自第1个预指定时刻 $T_1 = 1$ 起收敛至零, 由于误差函数中未引入初始修正项时, 系统的跟踪误差将渐近收敛至零;
- 2) 在引入依据能控格莱姆矩阵设计的初始修正项之后, 系统则能自第2个预指定时刻 $T_2 = 1.5$ 起实现完全跟踪.

6.1 迭代学习(Iterative learning)

将式(38)中的非线性时变函数线性参数化表达为

$$\theta(t) = 1 + \cos t, \varphi(x) = -x_1^2(t)\cos(x_1(t)).$$

控制律(19)和参数更新律(20)中的参数取为 $c = 3, \gamma = 10, \lambda = 2, \alpha = -10, \kappa_0 = 0.5, \varepsilon_0 = 1.6$. 有限时间死区函数取为 $\varepsilon_1(t)$.

1) 令 $r_k(t) = 0$, 即在 $s_{r,k}(t)$ 于有限时间 T_1 内收敛至零后, 跟踪误差 $e_{1,k}(t), e_{2,k}(t)$ 渐近收敛至零. 迭代至 $k = 200$ 的仿真结果见图1. 图中表明, 在 T_1 之后, 系统的跟踪误差渐近收敛至零.

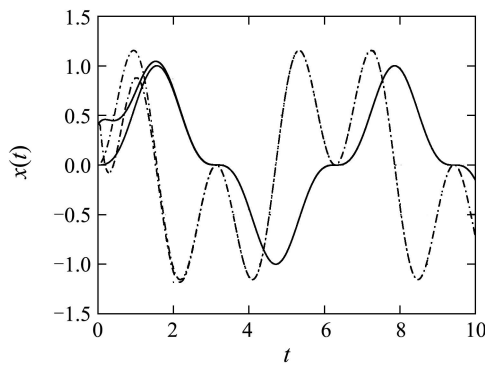


图1 $k = 200$ 时控制律(19)作用下的系统轨迹, 其中 $r_k = 0$

Fig. 1 System trajectories $x_1(t)$ (solid line) and $x_2(t)$ (dot line) at the cycle $k = 200$ when applying control law (19) with $r_k = 0$

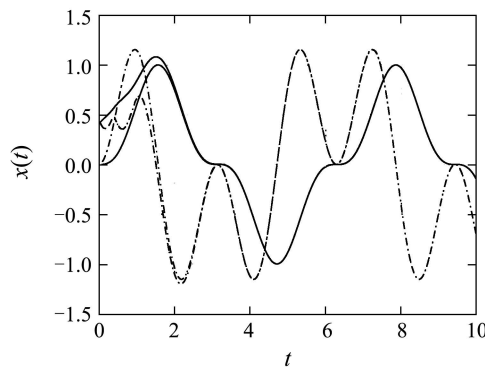


图2 $k = 200$ 时控制律(19)作用下的系统轨迹
Fig. 2 System trajectories $x_1(t)$ (solid line) and $x_2(t)$ (dot line) at the cycle $k = 200$ when applying control law (19) with initial rectified action

2) 在误差函数中引入由式(11)给出的初始修正作用 $r_k(t)$. 迭代至 $k = 200$ 的仿真结果见图2. 图中表明自 T_2 起, 系统跟踪误差收敛至零. 它说明文中提出的迭代学习算法对系统时变不确定项线性参数化情形下实现了状态的完全跟踪.

6.2 鲁棒迭代学习(Robust iterative learning)

将式(38)中的非线性时变函数的界函数参数化表达为

$$\theta(t) = 1 + \cos t, \varphi(x) = x_1^2(t).$$

控制律(31)和参数更新律(32)中的参数同迭代学习控制中取值相同. 此处, 取另一依据初始修正吸引子设计的有限时间死区函数 $\varepsilon_2(t)$, 其中 $a = -3$.

1) 令 $r_k(t) = 0$, 即在 $s_{r,k}(t)$ 于有限时间 T_1 内收敛至零后, 跟踪误差 $e_{1,k}(t), e_{2,k}(t)$ 渐近收敛至零. 迭代至 $k = 200$ 的仿真结果见图3. 可以看出, 在 T_1 之后, 系统的跟踪误差渐近收敛至零.

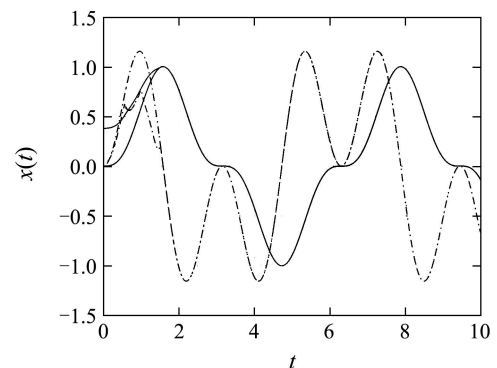


图3 $k = 200$ 时控制律(31)作用下的系统轨迹, 其中 $r_k = 0$

Fig. 3 System trajectories $x_1(t)$ (solid line) and $x_2(t)$ (dot line) at the cycle $k = 200$ when applying control law (31) with $r_k = 0$

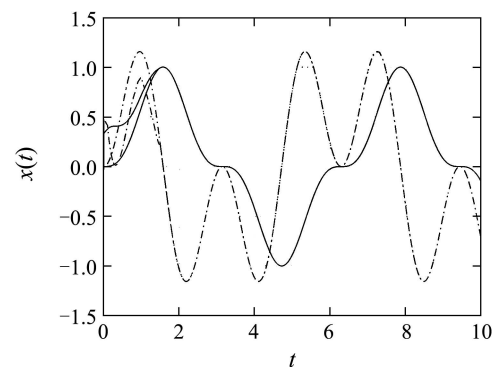


图4 $k = 200$ 时控制律(31)作用下的系统轨迹
Fig. 4 System trajectories $x_1(t)$ (solid line) and $x_2(t)$ (dot line) at the cycle $k = 200$ when applying control law (31) with initial rectified action

2) 在误差函数中引入了初始修正项 $r_k(t)$, $r_k(t)$ 的设计同前. 迭代至 $k = 200$ 的仿真结果见图4. 从图中可以看出, 自 T_2 起, 系统跟踪误差收敛至

零. 它表明文中提出的鲁棒迭代学习算法在系统时变不确定项的界函数参数化情形下实现了状态的完全跟踪.

7 结论(Conclusion)

本文讨论了一类高阶非线性系统在任意初始定位下的迭代学习控制问题. 针对系统中的非线性时变不确定函数, 给出了非线性不确定函数线性参数化下以及不确定项界函数参数化时的迭代学习控制器设计方法. 在存在初始定位误差的情形下, 由于引入的有限时间死区, 误差函数可以在有限时间内收敛至零. 在此基础上, 依据能控格莱姆矩阵设计初始修正项, 实现了系统在预定时间区间上的完全跟踪. 文中分析了算法的收敛性以及闭环系统中所有信号的有界性. 数值仿真结果表明, 所设计的采用有限时间死区的迭代学习控制器可实现预先指定时间区间上的完全跟踪.

参考文献(References):

- [1] ARIMOTO S, KAWAMURA S, MIYAZAKI F. Better operation of robotics by learning[J]. *Journal of Robotics Systems*, 1984, 2(1): 123 – 140.
- [2] HEINZINGER G, FENWICK D, PADEN B, et al. Robust learning control[C] // *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*. Tampa, FL, USA: IEEE, 1989, 12: 2640 – 2645.
- [3] POTER B, MOHAMED S S. Iterative learning control of partially irregular multivariable plants with initial impulsive action[J]. *International Journal of Systems Science*, 1991, 22(3): 447 – 454.
- [4] SUN M X, WANG D W. Iterative learning control with initial rectifying action[J]. *Automatica*, 2002, 38(7): 1177 – 1182.
- [5] LEE H S, BIEN Z. Study on robustness of iterative learning control with nonzero initial error[J]. *International Journal of Control*, 1996, 64(3): 345 – 359.
- [6] XU J X, XU J. On iterative learning from different tracking tasks in presence of time-varying uncertainties[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2005, 34(1): 589 – 597.
- [7] XU J X, YAN R. On initial conditions in iterative learning control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005, 50(9): 1349 – 1354.
- [8] CHIEN C J, HSU C T, YAU C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state error[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [9] SUN M X, HE X X, YU L. Initial rectified attractors for perfect synchronization of chaotic systems[J]. *Physics Letters A*, 2005, 348(1/2): 28 – 36.
- [10] KAILATH T. *Linear Systems*[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, Inc, 1980.
- [11] 孙明轩, 何熊熊, 俞立. 迭代学习控制器设计: 一种有限时间死区方法[J]. *控制理论与应用*, 2005, 24(3): 349 – 355.
(SUN Mingxuan, HE Xiongxiang, YU Li. Iterative learning controller designs: a finite time dead-zone approach[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 24(3): 349 – 355.)
- [12] SUN M X, HE X X, YU L. A deadzone modification for learning control of time-varying uncertain systems[C] // *Proceedings of the 6th World Congress on Intelligent Control and Automation*. Dalian, China: IEEE, 2006, 6: 3752 – 3756.

作者简介:

谢华英 (1986—), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为学习控制,
E-mail: xhy198606@126.com.cn;

孙明轩 (1961—), 男, 教授, 博士, 博士生导师, 目前研究方向为学习控制, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.