第 26 卷第 11 期
2009 年 11 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 11
Nov. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)11−1185−07

一种推广的组合非线性输出反馈控制

彭文东, 苏剑波

(上海交通大学 自动化系, 上海 200240)

摘要: 针对多变量饱和线性系统的时变参考输入跟踪问题, 研究了一种组合非线性输出反馈控制器的设计方法. 基于原始的组合非线性反馈理论, 构造了全阶和降阶输出反馈控制器. 控制器由线性输出反馈项和非线性反馈项组成, 使得闭环系统在包含于吸引域的不变集内渐近稳定. 除了能够跟踪时变参考输入外, 系统还具有良好的动态性能. 仿真结果说明了所开发控制器的有效性.

关键词: 执行器饱和; 组合非线性输出反馈; 稳定性; 时变参考输入; 动态性能

中图分类号: TP13　　　**文献标识码**: A

Extended composite nonlinear output feedback control

PENG Wen-dong, SU Jian-bo

(Department of Automation, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: A new composite nonlinear output feedback controller is proposed to track the time-varying reference inputs for multivariable linear systems with input saturation. Based on the original composite nonlinear feedback theory, we respectively developed the full-order and the reduced-order output feedback controllers. Both controllers consist of linear output feedback and nonlinear feedback, resulting in a closed-loop system with asymptotic stability in the invariant set inside the domain of attraction. Besides the guaranteed ability of tracking time-varying reference inputs, the systems have an excellent transient performance. Simulation results demonstrate the feasibility of the proposed controller.

Key words: actuator saturation; composite nonlinear output feedback; stability; time-varying reference input; transient performance

1 引言(Introduction)

每个控制执行器都有物理限制, 当输入超过这一限制时, 执行器发生饱和. 导致系统性能弱化, 严重的情况下甚至丧失稳定性. 一个典型的例子是积分抖动[1], 当含有积分环节的控制信号使执行器达到极限位置时, 误差持续积分. 这时, 控制信号的增加不仅对系统输出无任何影响, 反而会引起超调量增加, 调节时间变长, 控制品质严重弱化.

为避免饱和的不利影响, 充分利用执行器的控制能力并增强系统的动态性能, Lin和Saberi提出了一类高低增益反馈技术[2], 它由低增益线性反馈项和高增益线性反馈项组合而成. 低增益反馈确保平衡点渐近稳定及通过调整参数扩大包含预先给定有界集的吸引域; 高增益反馈使执行器饱和, 增强控制能力. 虽然这类方法能够加快系统的响应速度并抑制干扰, 但高增益项无法改变闭环系统的阻尼系数使动态过程尽可能地平滑.

当高增益项为依赖于系统状态的非线性函数时, 产生了最初的组合非线性反馈控制[3](composite nonlinear feedback, CNF). 它由线性反馈控制和非线性反馈控制组合而成, 是一种非线性设计方法. 线性反馈控制的目的是设计较小的阻尼率, 确保响应快速, 而非线性反馈控制的目的是当系统响应输出逼近参考输入时, 调整依赖于系统状态的非线性反馈项, 增大阻尼系数避免超调. 最初的CNF律解决了2阶系统的状态反馈控制问题. 在现实中, 由于系统本身的物理特性和量测手段的限制, 系统内部状态不可能全部测量, 状态反馈的物理实现几乎不可能. 因此, Chen等人将其拓展至输出反馈控制[4], 由观测器重构系统状态实现反馈控制, 而后又推广到高阶多变量饱和线性系统[5]. 但是, 上述控制策略[3~5]只能跟踪定常参考输入, 不具备跟踪时变输入的能力. 为此, 文献[6]引入辅助信号发生器, 来解决SISO系统的时变输入跟踪控制, 但对于高阶多变

收稿日期: 2008−08−11; 收修改稿日期: 2009−01−13.
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60675041); 教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET–06–0398).

量系统还未有合理的解决方案. 主要问题在于系统的状态无法全部测量时, 控制律的设计及如何在执行器饱和时确保系统的稳定性.

本文针对高阶多变量饱和线性系统中时变参考输入的跟踪控制问题, 研究CNF输出反馈控制器的设计. 给出低增益线性输出反馈和高增益非线性反馈的设计方法, 构造CNF输出反馈控制器, 并完成在吸引域内的稳定分析.

2 问题描述(Problem description)

考虑多变量饱和线性系统

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B\mathrm{sat}(u),\ x(0) = x_0, \\ z = C_1 x, \\ y = C_2 x, \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$为系统状态, $u \in \mathbb{R}^m$为控制输入, $z \in \mathbb{R}^p$为控制输出, $y \in \mathbb{R}^q$为测量输出, A, B, C_1和C_2为相应维数的定常矩阵. 假设(A,B)可镇定, (A,C_2)可检测. 饱和函数$\mathrm{sat}(u):\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$具有如下形式:

$$\mathrm{sat}(u) = \begin{bmatrix} \mathrm{sat}(u_1) \\ \mathrm{sat}(u_2) \\ \vdots \\ \mathrm{sat}(u_n) \end{bmatrix}, \tag{2}$$

其中:

$$\mathrm{sat}(u_i) = \mathrm{sgn}\min\{u_{i,\max}, |u_i|\},$$

$u_{i,\max}$为每个执行器所能提供的最大输入幅值.

基于观测器的动态输出反馈控制为

$$\begin{cases} \dot{x}_\mathrm{c} = A_\mathrm{c} x_\mathrm{c} + B_\mathrm{c} y, \\ u = f(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d}, y), \end{cases} \tag{3}$$

其中: $x_\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{n_\mathrm{c}}$为控制器状态, A_c和B_c为相应维数的矩阵, 控制信号u为x_c, x_d和y的非线性函数; n_c为控制器维数, s为可测状态的维数. 当$n_\mathrm{c} = n$时, 控制器为全阶; 当$n_\mathrm{c} = n - s$时, 控制器为降阶.

控制目标为设计具有非线性增益的CNF输出反馈控制, 使系统控制输出$z(t)$渐近跟踪参考输入$r(t)$:

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = r(t), \tag{4}$$

其中: $r(t) = C_1 x_\mathrm{d}(t)$, $x_\mathrm{d}(t)$为期望状态向量, 1阶导数$\dot{x}_\mathrm{d}(t) \in \mathbb{R}^n$连续有界. 要求跟踪过程尽可能地快速和平滑(尽可能小的超调), 没有执行器饱和的不利影响.

3 组合非线性输出反馈控制器设计(Composite nonlinear output feedback controller design)

3.1 全阶输出反馈控制器设计(Full order output feedback controller design)

最初的CNF控制律[3]由线性反馈u_L和非线性反馈u_N组合而成, 即

$$u = u_\mathrm{L} + u_\mathrm{N}. \tag{5}$$

线性反馈u_L实现对参考输入的渐近跟踪并确保响应快速, 非线性反馈u_N帮助避免超调. 因此, 结合观测器的CNF输出反馈控制器的设计过程也分为3个步骤: 首先设计线性输出反馈, 然后设计非线性反馈, 最后将两者组合, 形成所谓的CNF输出反馈控制器.

Step 1 设计线性输出反馈律:

$$\begin{cases} \dot{x}_\mathrm{c} = (A + LC_2)x_\mathrm{c} - Ly + B\mathrm{sat}(u_\mathrm{L}), \\ u_\mathrm{L} = Fx_\mathrm{c} - Fx_\mathrm{d} + H\dot{x}_\mathrm{d}. \end{cases} \tag{6}$$

选择增益矩阵F和L使$(A+BF)$和$A+LC_2$ Hurwitz稳定, 闭环系统的主导极点具有较小的阻尼率以至具有快速的响应速度.

Step 2 构造非线性反馈律.

给定正定矩阵$Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, P为下述Lyapunov方程的解:

$$(A+BF)^\mathrm{T}P + P(A+BF) = -Q. \tag{7}$$

由于$A+BF$Hurwitz稳定, P必定存在. 构造的非线性反馈律为

$$u_\mathrm{N} = -\rho(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d})B^\mathrm{T}P(x_\mathrm{c} - x_\mathrm{d}), \tag{8}$$

其中: $\rho(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d}) = \mathrm{diag}\{\rho_1(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d}), \rho_2(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d}), \cdots, \rho_m(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d})\}$, $\rho_i(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d})$为非负定函数且在$x_\mathrm{c}$和$x_\mathrm{d}$满足局部Lipschitz属性, 典型的非线性函数$\rho_i(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d})$的选取可参考文献[3].

Step 3 全阶组合非线性输出反馈控制器.

将线性输出反馈和非线性反馈组合, 形成如下的CNF反馈控制器:

$$\begin{cases} \dot{x}_\mathrm{c} = (A + LC_2)x_\mathrm{c} - Ly + B\mathrm{sat}(u), \\ u = Fx_\mathrm{c} - Fx_\mathrm{d} + H\dot{x}_\mathrm{d} - \\ \quad\ \rho(x_\mathrm{c}, x_\mathrm{d})B^\mathrm{T}P(x_\mathrm{c} - x_\mathrm{d}). \end{cases} \tag{9}$$

为进一步推导, 给定正定矩阵$Q_\mathrm{c} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, 满足

$$Q_\mathrm{c} > F^\mathrm{T}B^\mathrm{T}PQ^{-1}PBF. \tag{10}$$

为保证闭环系统的稳定性, 该条件[5]是非常必要的. P_c为下列Lyapunov方程的解:

$$(A+LC_2)^\mathrm{T}P_\mathrm{c} + P_\mathrm{c}(A+LC_2) = -Q_\mathrm{c}. \tag{11}$$

由于$A+LC_2$渐近稳定, $P_{\rm c}$必定存在.

基于定常参考输入的 CNF 输出反馈跟踪理论[4,5], 给出如下结果:

定理 1　对于饱和线性系统(1)和全阶CNF输出反馈控制器(9), 如果下述条件成立:

1) 存在$c>0$和$\varDelta\in(0,1)$, 使

$$\begin{bmatrix}x\\x_{\rm c}\end{bmatrix}\in L_V(c):=\left\{\begin{bmatrix}x\\x_{\rm c}\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}x\\x_{\rm c}\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}P&0\\0&P_{\rm c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\x_{\rm c}\end{bmatrix}\leqslant c\right\}\Rightarrow\left\{\begin{bmatrix}x\\x_{\rm c}\end{bmatrix}:|F_i(x+x_{\rm c})|\leqslant(1-\varDelta)u_{i,\max},\ i=1,2,\cdots,m\right\}.\tag{12}$$

2) 各初始状态及期望状态的1阶导数$\dot{x}_{\rm d}$满足

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}x(0)-x_{\rm d}(0)\\x_{\rm c}(0)-x(0)\end{bmatrix}\in L_V(c),\\|H_i\dot{x}_{\rm d}|\leqslant\varDelta u_{i,\max},\ i=1,2,\cdots,m.\end{cases}\tag{13}$$

3) 期望状态$x_{\rm d}$和它的1阶导数$\dot{x}_{\rm d}$满足

$$Ax_{\rm d}+(BH-I)\dot{x}_{\rm d}=0.\tag{14}$$

则必定存在$\rho^*>0$, 对于所有的i, 有$|\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})|\leqslant\rho^*(i=1,2,\cdots,m)$, CNF输出反馈控制器(9)能够驱动系统控制输出$z(t)$渐近跟踪参考输入$r(t)$.

证　合并CNF输出反馈控制器(9)和系统(1), 定义跟踪误差$\tilde{x}=x-x_{\rm d}$和观测误差$\tilde{x}_{\rm c}=x_{\rm c}-x$为新的状态变量, 由条件3), 产生的误差动力学为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}\\\dot{\tilde{x}}_{\rm c}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BF&BF\\0&A+LC_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B\\0\end{bmatrix}\{{\rm sat}(F(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c})+H\dot{x}_{\rm d}-\rho(x_{\rm c},x_{\rm d})B^{\rm T}P(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c}))-F(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c})-H\dot{x}_{\rm d}\}.\tag{15}$$

定义Lyapunov函数

$$V=\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}P&0\\0&P_{\rm c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}.\tag{16}$$

V沿闭环系统(15)的导数为

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}-Q&PBF\\F^{\rm T}B^{\rm T}P&-Q_{\rm c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}+2\tilde{x}^{\rm T}PB\{{\rm sat}(F(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c})+H\dot{x}_{\rm d}-\rho(x_{\rm c},x_{\rm d})B^{\rm T}P(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c}))-F(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c})-H\dot{x}_{\rm d}\}=\\&\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}-Q&PBF\\F^{\rm T}B^{\rm T}P&-Q_{\rm c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}+2\sum_{i=1}^{n}(B^{\rm T}P\tilde{x})_i[{\rm sat}\big(k_i-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i\big)-k_i].\end{aligned}\tag{17}$$

其中: v_i是$B^{\rm T}P(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c})$的第$i$个元素, $k_i=F_i(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c})+H_i\dot{x}_{\rm d}$. 那么, 对于所有的$\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}\in L_V(c)$, 由条件1)和2), 存在

$$|k_i|\leqslant|F_i(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c})|+|H_i\dot{x}_{\rm d}|\leqslant u_{i,\max}.\tag{18}$$

因此, ${\rm sat}\big(k_i-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i\big)-k_i$值的范围是

$$\begin{cases}0<{\rm sat}(k_i-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i)-k_i<-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i,\\u_i>u_{i,\max};\\{\rm sat}(k_i-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i)-k_i=-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i,\\|u_i|\leqslant u_{i,\max};\\-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i<{\rm sat}(k_i-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i)-k_i<0,\\u_i<-u_{i,\max}.\end{cases}\tag{19}$$

显然, 一定存在$0\leqslant r_i\leqslant 1(i=1,2,\cdots,m)$, 使得上述3种情况用如下函数描述:

$${\rm sat}(k_i-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i)-k_i=-r_i\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i,\tag{20}$$

那么

$$\begin{aligned}\dot{V}=&\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}-Q&PBF\\F^{\rm T}B^{\rm T}P&-Q_{\rm c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}+2\sum_{i=1}^{m}(B^{\rm T}P\tilde{x})_i[{\rm sat}(k_i-\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})v_i)-k_i]=\\&\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix}-Q&PBF\\F^{\rm T}B^{\rm T}P&-Q_{\rm c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\\tilde{x}_{\rm c}\end{bmatrix}+2\tilde{x}^{\rm T}PBr\rho(x_{\rm c},x_{\rm d})B^{\rm T}P(\tilde{x}+\tilde{x}_{\rm c}).\end{aligned}\tag{21}$$

其中$r={\rm diag}\{r_1,r_2,\cdots,r_m\}$.

对于式(21), 由文献[5], 必定存在$\rho^*>0$, 使得$|\rho_i(x_{\rm c},x_{\rm d})|\leqslant\rho^*(i=1,2,\cdots,m)$, 从而有$\dot{V}<0$. 因此, $L_V(c)$是闭环系统(15)的不变水平集并且包含在吸引域里, 所有起始于$L_V(c)$内的轨迹最终渐近收敛到原点, 即

$$\begin{cases}\lim\limits_{t\to\infty}x_{\rm c}(t)=x(t),\ \lim\limits_{t\to\infty}x(t)=x_{\rm d}(t),\\\lim\limits_{t\to\infty}z(t)=C_1\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=C_1x_{\rm d}(t)=r(t).\end{cases}\tag{22}$$

证毕.

当$\rho(x_c,x_d)=0$, CNF输出反馈控制(9)等同于线性输出反馈控制(6), 误差动力学(15)可以降为

$$\begin{bmatrix}\dot{\tilde{x}}\\ \dot{\tilde{x}}_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A+BF & BF\\ 0 & A+LC_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{x}_c\end{bmatrix}.$$

这说明CNF输出反馈控制与线性输出反馈控制能够跟踪相同的时变参考输入, 加入的非线性项不会破坏系统的稳定性, 也不会降低系统跟踪高幅值参考输入的能力. 因此, 建议的控制器除了具有与原始的CNF控制器相同的性质外, 还具备跟踪时变参考输入的能力.

线性输出反馈使控制输出无稳态误差地跟踪时变参考输入, 且具有较小的阻尼率以确保响应快速. 但是响应速度过快, 必然会引起较大的超调. 这时, 通过非线性项改变系统阻尼, 抑制由线性反馈引起的超调. 因此, 扩展的CNF输出反馈控制能够利用小阻尼系数的线性反馈来加快响应速度, 又能利用非线性反馈的变阻尼特性抑制超调, 提高系统的动态响应性能.

3.2 降阶输出反馈控制器设计(Reduced order output feedback controller design)

对于动力学输出反馈控制(3), 当$n_c=n-s$时, 系统有s个状态是可测的, 只需利用测量信息重构未知状态, 不必重构全部状态, 这样的控制器为降阶输出反馈控制, 其阶数小于被控对象的阶数. 当测量输出矩阵C_2不具有标准形式$[I_s\quad 0]$时, 由文献[7], 对系统状态引入线性非奇异变换, 其中: $\bar{x}=Rx$, $R=\begin{bmatrix}C_2\\ R_2\end{bmatrix}$, $R_2\in\mathbb{R}^{(n-s)\times n}$. 令$R^{-1}=[Q_1,Q_2]$, $Q_1\in\mathbb{R}^{n\times s}$, $Q_2\in\mathbb{R}^{n\times(n-s)}$. 由变换矩阵, 测量输出方程为

$$y=C_2x=C_2R^{-1}\bar{x}=[C_2Q_1,C_2Q_2]\bar{x}=[I_s\quad 0]\bar{x}. \tag{23}$$

因此, 通过上述变换并采用相同的状态x来简化描述, 系统(1)均可转化为如下标准形式:

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}\mathrm{sat}(u),\\ x(0)=\begin{bmatrix}x_1(0)\\ x_2(0)\end{bmatrix},\\ z=C_1x,\ y=[I_s\quad 0]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},\end{cases} \tag{24}$$

其中: x_1为s维分状态, 且$y=x_1$, x_2为$n-s$维分状态.

降阶输出反馈控制器的设计依然分3步:

Step 1 设计降阶线性输出反馈律为

$$\begin{cases}\dot{x}_c=(A_{22}+L_RA_{12})x_c+(B_2+L_RB_1)\mathrm{sat}(u_L)+\\ \qquad [A_{21}+L_RA_{11}-(A_{22}+L_RA_{12})L_R]y,\\ u_L=F[\begin{pmatrix}y\\ x_c-L_Ry\end{pmatrix}-x_d]+H\dot{x}_d.\end{cases} \tag{25}$$

选择增益矩阵F和L_R使$A+BF$和$A_{22}+L_RA_{12}$渐近稳定且使闭环系统的主导极点具有较小的阻尼率. 为了便于推导, 划分反馈矩阵$F=[F_1\quad F_2]$与系统状态x_1和x_2相对应, 其中: $F_2=[F_{2,1}\ F_{2,2}\ \cdots\ F_{2,m}]^{\mathrm{T}}$.

Step 2 构造非线性反馈律的形式为

$$u_N=-\rho(y,x_c,x_d)B^{\mathrm{T}}P[\begin{pmatrix}y\\ x_c-L_Ry\end{pmatrix}-x_d], \tag{26}$$

其中: $\rho(y,x_c,x_d)=\mathrm{diag}\{\rho_1(y,x_c,x_d),\rho_2(y,x_c,x_d),\cdots,\rho_m(y,x_c,x_d)\}$, $\rho_i(y,x_c,x_d)$为非负定函数且在y,x_c和x_d满足局部Lipschitz属性.

Step 3 将线性输出反馈和非线性反馈组合到一起, 形成如下的降阶CNF输出反馈控制器:

$$\begin{cases}\dot{x}_c=(A_{22}+L_RA_{12})x_c+(B_2+L_RB_1)\mathrm{sat}(u)+\\ \qquad [A_{21}+L_RA_{11}-(A_{22}+L_RA_{12})L_R]y,\\ u=F[\begin{pmatrix}y\\ x_c-L_Ry\end{pmatrix}-x_d]+H\dot{x}_d-\\ \qquad \rho(y,x_c,x_d)B^{\mathrm{T}}P[\begin{pmatrix}y\\ x_c-L_Ry\end{pmatrix}-x_d].\end{cases} \tag{27}$$

同全阶CNF输出反馈控制一致, 给定正定矩阵$Q_R\in\mathbb{R}^{(n-s)\times(n-s)}$, 满足

$$Q_R>F_2^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}PQ^{-1}PBF_2, \tag{28}$$

则P_R为下述Lyapunov方程的解:

$$(A_{22}+L_RA_{12})^{\mathrm{T}}P_R+P_R(A_{22}+L_RA_{12})=-Q_R. \tag{29}$$

由于$A_{22}+L_RA_{12}$渐近稳定, P_R必定存在.

下面将完成系统的稳定性分析.

定理 2 对于饱和线性系统(24)和降阶CNF输出反馈控制器(27), 如果下面条件成立:

1) 存在$c>0$和$\varDelta\in(0,1)$, 使

$$\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}\in L_V(c):=$$

$$\{\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}:\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}P & 0\\ 0 & P_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ x_c\end{bmatrix}\leqslant c\}\Rightarrow$$

$$\{\begin{bmatrix} x \\ x_{\rm c} \end{bmatrix} : |[F_i \ \ F_{2i}]\begin{bmatrix} x \\ x_{\rm c} \end{bmatrix}| \leqslant (1-\varDelta)u_{i,\max},\ i=1,2,\cdots,m\}. \tag{30}$$

2) 各初始状态及期望状态的1阶导数$\dot{x}_{\rm d}$满足

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x(0)-x_{\rm d}(0) \\ x_{\rm c}(0)-x_2(0)-L_{\rm R}x_1(0) \end{bmatrix} \in L_V(c), \\ |H_i\dot{x}_{\rm d}| \leqslant \varDelta u_{i,\max},\ i=1,2,\cdots,m. \end{cases} \tag{31}$$

3) 期望状态$x_{\rm d}$和它的1阶导数$\dot{x}_{\rm d}$满足

$$Ax_{\rm d}+(BH-I)\dot{x}_{\rm d}=0. \tag{32}$$

则必定存在$\rho^*>0$, 对于所有的i, 有$|\rho_i(y,x_{\rm c},x_{\rm d})|\leqslant \rho^*(i=1,2,\cdots,m)$, 降阶CNF输出反馈控制器(27)能够驱动系统(24)的控制输出$z(t)$渐近跟踪参考输入$r(t)$.

证 合并CNF控制器(27)和动力学系统(24), 定义跟踪误差$\tilde{x}=x-x_{\rm d}$和观测误差$\tilde{x}_{\rm c}=x_{\rm c}-x_2-L_{\rm R}y$为新的状态, 由条件3), 产生的误差动力学为

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \dot{\tilde{x}}_{\rm c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A+BF & BF_2 \\ 0 & A_{22}+L_{\rm R}A_{12} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}\{{\rm sat}([F \quad F_2]\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix}+H\dot{x}_{\rm d} - \rho(y,x_{\rm c},x_{\rm d})B^{\rm T}P[\tilde{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{pmatrix}]) - [F \ \ F_2]\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix} - H\dot{x}_{\rm d}\}. \tag{33}$$

定义Lyapunov函数

$$V=\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & P_{\rm R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix}. \tag{34}$$

V沿闭环系统(33)的导数为

$$\begin{aligned} \dot{V} = {} & \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix} -Q & PBF_2 \\ F_2^{\rm T}B^{\rm T}P & -Q_{\rm R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix} + 2\tilde{x}^{\rm T}PB\{{\rm sat}([F \quad F_2]\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix}+H\dot{x}_{\rm d} - \rho(y,x_{\rm c},x_{\rm d})B^{\rm T}P[\tilde{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{pmatrix}]) - [F \ \ F_2]\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix} - H\dot{x}_{\rm d}\} = \\ & \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix}^{\rm T}\begin{bmatrix} -Q & PBF_2 \\ F_2^{\rm T}B^{\rm T}P & -Q_{\rm R} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{bmatrix} + 2\sum_{i=1}^{m}(B^{\rm T}P\tilde{x})_i[{\rm sat}(k_i-\rho_i(y,x_{\rm c},x_{\rm d})v_i)-k_i]. \end{aligned} \tag{35}$$

其中: v_i是$B^{\rm T}P(\tilde{x}+\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_{\rm c} \end{pmatrix})$的第$i$个元素, $k_i=[F_i \quad F_{2i}]\begin{bmatrix} x \\ x_{\rm c} \end{bmatrix}+H_i\dot{x}_{\rm d}$.

其余证明可参考定理1, 可以得出结论, 必定存在$\rho^*>0$, 对于所有的i, 存在$|\rho_i(y,x_{\rm c},x_{\rm d})|\leqslant\rho^*(i=1,2,\cdots,m)$, 从而有$\dot{V}<0$. 在降阶CNF输出反馈控制作用下, 跟踪误差的动力学(33)在包含于吸引域的不变水平集$L_V(c)$内稳定, 渐近收敛到原点, 即

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to\infty}\big(x_{\rm c}(t)-x_2(t)-L_{\rm R}y\big)=0, \\ \lim\limits_{t\to\infty}\big(x(t)-x_{\rm d}(t)\big)=0, \\ \lim\limits_{t\to\infty}z(t)= C_1\lim\limits_{t\to\infty}x(t)=C_1x_{\rm d}(t)=r(t). \end{cases} \tag{36}$$

证毕.

4 仿真算例(Simulation example)

下面通过两输入两输出的饱和线性系统进行仿真分析, 被控对象的系数矩阵为

$$\begin{cases} A=\begin{bmatrix} 0&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \\ 0&0&0&0 \\ 0&0&0&0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 0&0 \\ 0&0 \\ 1&0 \\ 0&1 \end{bmatrix}, \\ C_1=\begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 0&1&0&0 \end{bmatrix},\ C_2=\begin{bmatrix} 1&0&1&0 \\ 0&1&0&1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{37}$$

初始状态$x(0)=[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0]^{\rm T}$, 期望参考输入为

$$r(t)=C_1x_{\rm d}(t)=\begin{bmatrix} 1+0.2\sin(0.5\pi t) \\ 1+0.2\cos(0.5\pi t) \end{bmatrix}. \tag{38}$$

其中: $x_{\rm d}(t)=\begin{bmatrix} 1+0.2\sin(0.5\pi t) \\ 1+0.2\cos(0.5\pi t) \\ 0.1\pi\cos(0.5\pi t) \\ -0.1\pi\sin(0.5\pi t) \end{bmatrix}$, 各个通道执行器的最大幅值为

$$u_{\max}=\begin{bmatrix} u_{1,\max} \\ u_{2,\max} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 20 \\ 20 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

控制目标为控制输出$z(t)$尽可能快速地跟踪参考输入$r(t)$, 没有超调.

1) 全阶CNF输出反馈控制器.

为验证控制器性能, 这里与线性输出反馈$u_{\rm L}$相比较, 全阶CNF输出反馈控制器(9)的初始观测状

态$x_{\mathrm{c}}(0) = [0\ 0\ 0\ 0]^{\mathrm{T}}$, 各增益矩阵选取为

$$\begin{cases} F = \begin{bmatrix} -8 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \\ H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{40}$$

非线性项$\rho(x_{\mathrm{c}}, x_{\mathrm{d}})$为

$$\rho(x_{\mathrm{c}}, x_{\mathrm{d}}) = \begin{bmatrix} 620\mathrm{e}^{-60|x_{c1}-x_{d1}|} & 0 \\ 0 & 580\mathrm{e}^{-50|x_{c2}-x_{d2}|} \end{bmatrix}. \tag{41}$$

令$Q = I$, 解Lyapunov方程, 则有

$$P = \begin{bmatrix} 2.3750 & 0 & 0.0625 & 0 \\ 0 & 2.3750 & 0 & 0.0625 \\ 0.0625 & 0 & 0.2812 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0.2812 \end{bmatrix}, \tag{42}$$

那么

$$B^{\mathrm{T}}P = \begin{bmatrix} 0.0625 & 0 & 0.2812 & 0 \\ 0 & 0.0625 & 0 & 0.2812 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

2) 降阶CNF输出反馈控制器.

为简化计算并说明问题, 直接选取

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

被控对象具有式(24)的标准形式. 降阶CNF输出反馈控制器(27)的初始状态$x_{\mathrm{c}}(0) = [0\quad 0]^{\mathrm{T}}$, 选取增益矩阵$L_{\mathrm{R}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$, F, H和非线性项与全阶输出反馈一致.

图1为线性输出反馈控制的结果. 如图1(a)所示, 尽管跟踪误差的动态响应快速, 但导致很大超调. 图1(b)为控制输入, 表明在执行器的限制范围之内. 图1(c)为控制输出的相轨迹, 从初始状态收敛到期望轨迹的设定圆时, 出现较大超调及偏移, 与图1(a)所反映的结果一致. 图2为全阶CNF输出反馈控制的结果, 如图2(a)所示, 响应快速并且没有超调. 这是因为引入的非线性项抑制了线性反馈所引起的超调. 图2(b)为控制输入, 执行器已进入饱和区域运行, 执行器的控制能力能够得到充分利用, 且没有饱和的不利影响. 图2(c)为控制输出$z(t)$的相轨迹, 从初始状态收敛到期望轨迹的设定圆时, 没有任何超调, 显著优越于线性输出反馈的控制结果. 图3为降阶CNF输出反馈的控制结果, 闭环系统的动态响应快速、平滑且没有超调, 执行器在饱和状态下依然稳定运行, 也取得了比较满意的性能.

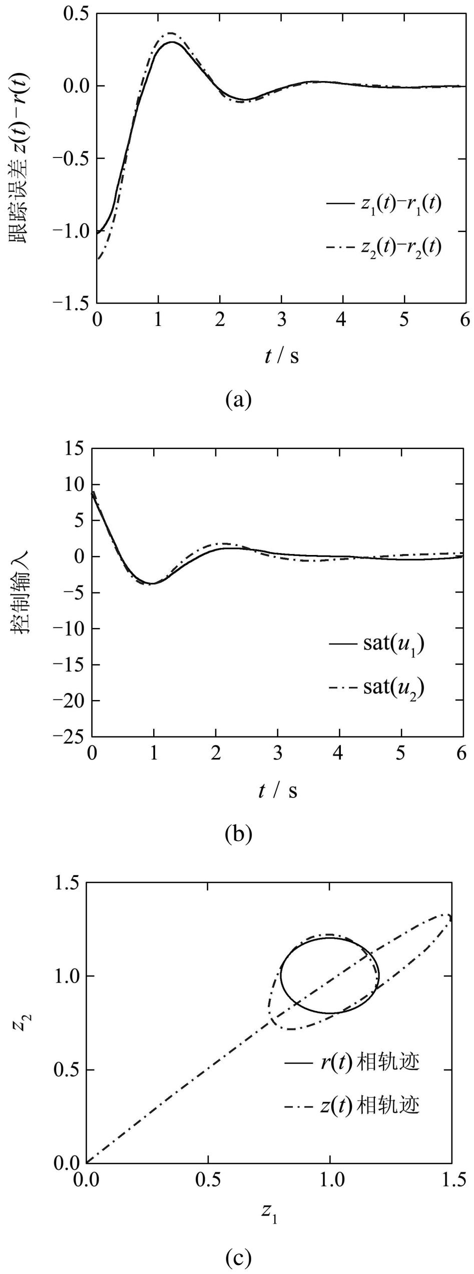
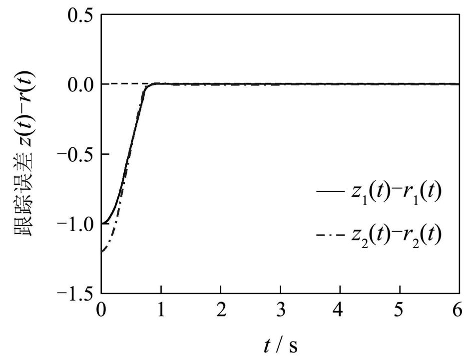
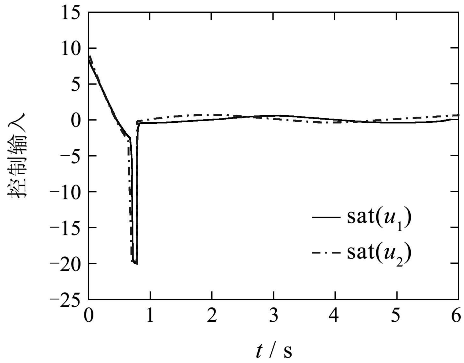


图 1 线性输出反馈控制

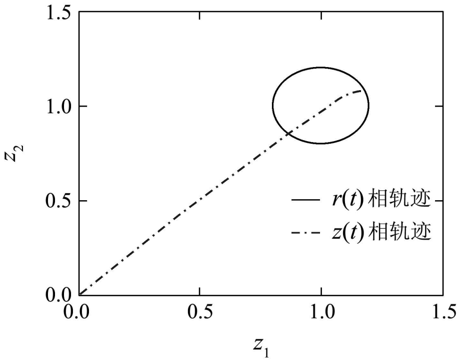
Fig. 1 Linear output feedback control



(a)

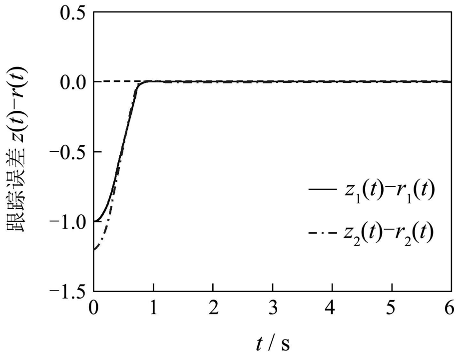


(b)

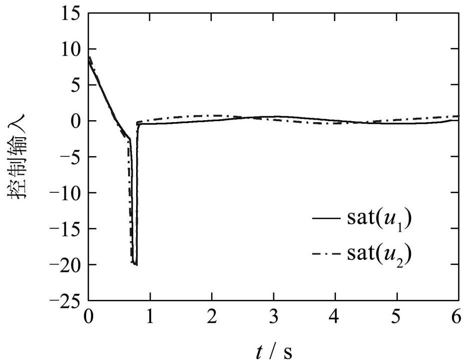


(c)

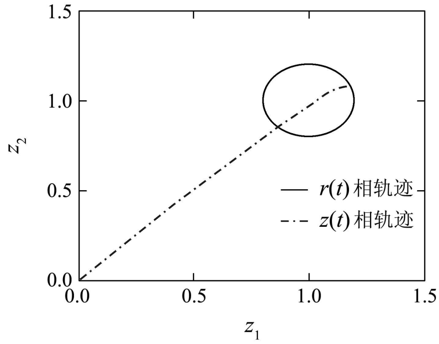
图 2　全阶组合非线性输出反馈控制
Fig. 2　Full order composite nonlinear output feedback control



(a)



(b)



(c)

图 3　降阶组合非线性输出反馈控制
Fig. 3　Reduced order composite nonlinear output feedback control

5　结论(Conclusion)

本文研究了结合观测器的高阶多变量饱和线性系统CNF控制器的设计问题, 分别从全阶输出反馈和降价输出反馈两个方面, 推广到时变参考输入的跟踪控制. 控制器由线性动态输出反馈和非线性反馈组合而成, 当执行器出现饱和时, 给出了在吸引域内的稳定性分析. 由于利用了CNF的变阻尼特性, 系统的动态响应快速, 没有超调, 而且能够避免饱和的不利影响.

参考文献(References):

[1] BONH C, THERTON D P. An analysis package comparing PID anti-windup strategies[J]. *IEEE Transactions on Control Systems*, 1995, 15(2): 34 – 40.

[2] LIN Z, SABERI A. Low-and-high gain design technique for linear systems subject to input saturation-a direct method[J]. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 1997, 7(12): 1071 – 1101.

[3] LIN Z, PACHTER M, BANDA S. Toward improvement of tracking performance-nonlinear feedback for linear system[J]. *International Journal of Control*, 1998, 70(1): 1 – 11.

[4] CHEN B M, LEE T H, PENG K, et al. Composite nonlinear feedback control for linear systems with input saturation: theory and an application[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(3): 427 – 439.

[5] HE Y J, CHEN B M, WU C. Composite nonlinear control with state and measurement feedback for general multivariable systems with input saturation[J]. *Systems & Control Letters*, 2005, 54(5): 455 – 469.

[6] CHENG G, PENG K, CHEN B M, et al. Improving transient performance in tracking general references using composite nonlinear feedback control and its application to high-speed XY-table positioning mechanism[J]. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, 2007, 54(2): 1039 – 1051.

[7] 郑大钟. 线性系统理论[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002.
(ZHENG Dazhong. *Linear System Theory*[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)

作者简介:

彭文东　(1976—), 男, 博士研究生, 从事非线性系统控制、机器人控制研究, E-mail: pengwendong@sjtu.edu.cn;

苏剑波　(1969—), 男, 教授, 博士生导师, 从事仿人机器人、网络机器人、非线性系统控制等研究, E-mail: jbsu@sjtu.edu.cn.