

不确定时变系统的鲁棒学习控制算法

刘 利, 孙明轩

(浙江工业大学 信息工程学院, 浙江 杭州 310023)

摘要: 研究不确定性时变系统在有限时间区间上重复作业和在无限时间区间上周期作业的跟踪控制问题. 基于Lyapunov-like方法, 给出了形式简单的鲁棒迭代学习控制和鲁棒重复控制两种算法. 两种学习算法均可弥补单一控制算法的缺陷, 鲁棒控制部分被用来保证闭环系统中所有变量的有界性, 学习控制部分可有效消除系统跟踪误差, 改善系统的跟踪性能. 仿真结果验证了两种学习算法的有效性.

关键词: 迭代学习控制; 重复控制; 鲁棒控制; 收敛性

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Robust learning control algorithms for uncertain time-varying systems

LIU Li, SUN Ming-xuan

(College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou Zhejiang 310014, China)

Abstract: The trajectory tracking problem of uncertain time-varying systems is addressed, where the same tasks are performed repeatedly within a finite duration of time, or periodic references are followed over an infinite interval. Through the Lyapunov-like synthesis, two robust learning control algorithms are developed based on the control tasks, and their stability and convergence results are established. Both algorithms can compensate for the shortcoming when either one is applied separately. The robust control component guarantees all the variables in the closed-loop to be bounded, while the learning control component ensures that the tracking error converges to zero. Numerical results are presented to demonstrate effectiveness of the proposed learning algorithms.

Key words: iterative learning control; repetitive control; robust control; convergence

1 引言(Introduction)

在实际场合, 由于很难获取精确的受控系统的动力学特性, 在控制系统设计与实现时需考虑其动态特性中存在的不确定性. 鲁棒控制技术可有效处理系统特性中存在的不确定性, 在系统不确定性界函数已知的情况下, 设计合适的鲁棒控制律可保证系统稳定性, 实现系统有界跟踪. 但鲁棒控制无法实现系统零误差跟踪性能, 否则, 会导致系统出现颤振现象^[1~3].

迭代学习控制技术^[4]适于在有限区间上完成重复作业任务的系统, 利用前一次的控制经验修正控制输入, 通过不断尝试, 以实现系统完全跟踪. 重复控制技术^[5]适于周期运行的被控对象. 两者均要求系统动力学特性的可重复性, 都可实现关于重复性干扰的完全抑制. 但当系统中存在不可重复的动态特性或外部干扰时, 仅仅利用学习控制技术, 系统跟踪性能将会降低, 甚至会导致系统不稳定.

近年来, 学习控制系统的类Lyapunov分析与设

计方法引起了重视^[6~10]. 特别是, 结合鲁棒控制和学习控制两种控制技术, 可实现不确定性动态系统的高精度跟踪控制, 从而克服单一控制方式的缺陷^[7,8]. 针对含局部Lipschitz连续不确定特性的动态系统, 文献[7,8]应用类Lyapunov方法, 提出了鲁棒迭代学习控制方案. 算法中的鲁棒控制部分利用了系统不确定特性的界函数, 可保证系统所有变量有界; 学习控制部分可有效消除系统跟踪误差, 改善系统跟踪性能.

本文针对不确定性时变系统, 研究其在有限时间区间上重复作业和在无限时间区间上周期作业的跟踪控制问题. 在系统不确定特性的界函数已知的情形下, 分别讨论了鲁棒控制策略、鲁棒迭代学习控制和鲁棒重复控制算法. 本文给出的两种学习控制算法在形式上较文献[7,8]更为简单. 文中分析了闭环系统稳定性和收敛性, 并通过仿真验证了两种学习控制算法的有效性.

2 问题提出(Problem formulation)

考虑下述SISO不确定时变系统:

$$\dot{x}(t) = \Delta f(x, t) + b(t)u(t). \quad (1)$$

其中: $x(t)$ 是系统状态, $u(t)$ 是控制输入, $\Delta f(x, t)$ 表示系统不确定性, $b(t)$ 是未知时变函数.

对于给定的期望轨迹 $x_d(t)$, 系统的控制任务是寻找理想的控制输入 $u_d(t)$, 使系统状态 $x(t)$ 在该控制输入作用下, 尽可能地跟踪上 $x_d(t)$. 这里, $x_d(t)$ 连续可导, $u_d(t)$ 满足 $\sup |u_d(t)| \leq u^*$, u^* 已知.

定义跟踪误差 $e(t) = x_d(t) - x(t)$. 对 $e(t)$ 求导, 并将式(1)代入, 可得

$$\dot{e}(t) = \dot{x}_d(t) - \Delta f(x, t) - b(t)u(t). \quad (2)$$

假设 1 不失一般性, 文中假设 $b(t) > 0$, 且存在常数 $b^*, b_{\max}$, 使 $0 < b^* \leq b(t) \leq b_{\max}$ 成立. b^* 已知.

假设 2 非线性函数 $\Delta f(x, t)$ 满足

$$|\Delta f(x, t)| \leq \rho(x, t). \quad (3)$$

这里: $\rho(x, t)$ 为一已知的连续函数. 与此同时假设 $\Delta f(x, t)$ 关于 x 满足局部一致Lipschitz条件, 即存在常数 $l_{\Delta f} > 0$, 使得

$$|\Delta f(x, t) - \Delta f(x_d, t)| \leq l_{\Delta f} |x - x_d|. \quad (4)$$

考虑如下鲁棒控制律:

$$u(t) = (\beta(x, t)\zeta(x, t) + 1)\frac{1}{b^*}e(t), \quad (5)$$

$$\beta(x, t) = |\dot{x}_d(t)| + \rho(x, t), \quad (6)$$

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{|e(t)|}. \quad (7)$$

取正定函数 $V(t) = \frac{1}{2}e^2(t)$, 对 $V(t)$ 求导, 并将式(2)及控制律(5)代入, 可得

$$\dot{V} \leq -e^2 + |e|(|\dot{x}_d| + \rho)(1 - \zeta|e|) \leq -e^2. \quad (8)$$

由此可见, 系统跟踪误差会收敛到原点. 式(5)中的项 $\zeta(x, t)e(t)$ 可写成

$$\zeta(x, t)e(t) = \text{sgn } e(t). \quad (9)$$

通常, 控制器中采用 $\text{sgn } e(t)$ 会引起系统出现颤振现象, 给工程实现带来困难. 采取连续化措施, 将式(7)改写为

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{|e(t)| + \varepsilon}, \quad (10)$$

其中 $\varepsilon > 0$ 为一可调参数. 这时, 将式(10)代入到式(8)中,

$$\dot{V} \leq -e^2 + (|\dot{x}_d| + \rho)\varepsilon. \quad (11)$$

因为 ρ 与 x 有关, 在未证得 x 有界之前, 无法推知 ρ 有界. 进一步地, 将 $\zeta(x, t)$ 函数换成

$$\zeta(x, t) = \frac{2}{|e(t)| + \varepsilon}, \quad \varepsilon > 0, \quad (12)$$

并将其代入式(8), 可得

$$\dot{V} \leq |e|(|\dot{x}_d| + \rho)\frac{\varepsilon - |e|}{|e| + \varepsilon} - e^2. \quad (13)$$

当 $|e| \geq \varepsilon$ 时, $\dot{V} \leq -e^2$. 故 e 有界, 因而 x 有界. 根据假设2可推知 ρ 有界. 当 ε 取值足够小时, 可以保证系统跟踪精度, 但此时式(5)中的项 $\zeta(x, t)e(t)$ 变为

$$\zeta(x, t)e(t) = \frac{2e(t)}{|e(t)| + \varepsilon} \approx 2\text{sgn } e(t).$$

同样, $2\text{sgn } e(t)$ 项会引起系统出现颤振现象, 造成系统实现困难; 反之, 当 ε 取值过大时, 系统跟踪精度难以保证.

3 鲁棒迭代学习控制(Robust iterative learning control)

考虑系统(1)在有限时间区间 $[0, T]$ 上重复作业, 这里, $T > 0$ 已知. 给定的期望轨迹 $x_d(t)$ 满足

$$\dot{x}_d(t) = \Delta f(x_d, t) + b(t)u_d(t), \quad t \in [0, T]. \quad (14)$$

由第2节知, 系统(1)采用鲁棒控制律可有效地处理系统动力学中的不确定性, 保证跟踪误差有界收敛, 但仅仅利用鲁棒控制律不能完全消除跟踪误差. 特别是, 当 ε 足够小时, 会导致系统出现颤振现象. 迭代学习控制作为一种前馈控制技术, 适于有限区间上重复作业的受控对象. 采用这种学习控制技术可实现完全跟踪, 重复作业时不随迭代次数变化的确定性干扰也可得到完全补偿. 因此, 采用迭代学习控制与鲁棒控制相结合的方法, 在保证系统稳定性的同时, 利用前者的学习能力, 以实现指定区间上零误差跟踪性能.

为此, 提出如下鲁棒迭代学习控制律

$$u_k(t) = \text{sat}(u_{k-1}(t)) + u_{r,k}(t), \quad (15)$$

$$u_{r,k}(t) = (\beta(x_k, t)\zeta(x_k, t) + 1)\frac{1}{b^*}e_k(t), \quad (16)$$

$$\beta(x_k, t) = |\dot{x}_d(t)| + \rho(x_k, t), \quad (17)$$

$$\zeta(x_k, t) = \frac{2}{|e_k(t)| + \varepsilon}. \quad (18)$$

式中: k 表示迭代次数. $\varepsilon > 0$ 为一可调参数. $u_k(t)$ 表示第 k 次控制输入; $u_{r,k}(t)$ 表示鲁棒控制部分; 式(15)中 $\text{sat}(u_{k-1}(t))$ 表示对 $u_{k-1}(t)$ 进行限幅, 幅值为 u^* , 其定义为

$$\text{sat}(u) = \begin{cases} u, & |u| \leq u^*, \\ \text{sgn } uu^*, & |u| > u^*. \end{cases} \quad (19)$$

这里需指出的是, 式(18)不同于式(10), 具体说明详见注3.1. 文中记 $\beta_k(t) = \beta(x_k, t)$, $\zeta_k(t) = \zeta(x_k, t)$, $\rho_k(t) = \rho(x_k, t)$. 另外, 在 $[0, T]$ 上的函数序列的一致有界性是指, 对于 $f_k(t)$, $t \in [0, T]$, $k = 0, 1, 2, \dots$, 存在数 $M > 0$, 使得 $|f_k(t)| \leq M, \forall t \in [0, T]$ 以及所有的 k . 在 $[0, \infty)$ 上的函数的一致有界性是指, 对于 $f(t)$, $t \in [0, \infty)$, 存在数 $M > 0$, 使得 $|f(t)| \leq M, \forall t \in [0, \infty)$.

定理1 对于满足假设1,2的系统(1), 在初始定位条件 $x_k(0) = x_d(0), \forall k$ 成立时, 鲁棒迭代学习控制律(15)(16)可使得闭环系统中所有变量一致有界, 且当 $k \rightarrow \infty$ 时, 系统跟踪误差在 $[0, T]$ 上收敛于零, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0, t \in [0, T]$.

证 先分析闭环系统中所有变量的有界性. 取正定函数 $V_k(t) = \frac{1}{2}e_k^2(t)$. 对 $V_k(t)$ 求导, 并将式(2)及控制律(15)(16)代入, 可得

$$\dot{V}_k \leq -\frac{b}{b^*}e_k^2 + |e_k|bu^* + (1 - \zeta_k \frac{b}{b^*}|e_k|)(|\dot{x}_d| + \rho_k)|e_k|. \quad (20)$$

当 $|e_k| \geq \varepsilon$ 时,

$$1 - \zeta_k \frac{b}{b^*}|e_k| \leq \frac{b^*(\varepsilon - |e_k|)}{(|e_k| + \varepsilon)b^*} \leq 0, \quad (21)$$

故

$$\dot{V}_k \leq -\frac{b}{b^*}e_k^2 + |e_k|bu^* = -b|e_k|(\frac{1}{b^*}|e_k| - u^*), \quad (22)$$

这样, 当 $|e_k| \geq \max\{\varepsilon, b^*u^*\}$ 时, $\dot{V}_k \leq 0$. 可以看出, e_k 一致有界. 因为 $x_d(t)$ 是连续可导的期望轨迹, 故 x_k 一致有界. 进一步地, 由式(15)(16)及 $\text{sat}(u_{k-1}(t))$ 的有界性可推知, $u_{r,k}(t), u_k(t)$ 均一致有界.

为进行收敛性分析, 采用如下Lyapunov-like函数:

$$L_k(t) = e^{-\lambda t}e_k^2(t) + \int_0^t e^{-\lambda \tau} \delta \phi_k^2(\tau) d\tau, \quad (23)$$

这里 $\delta \phi_k(t) = b(t)(u_d(t) - u_k(t))$.

由 $L_k(t)$ 的定义知

$$\Delta L_k(t) = e^{-\lambda t}e_k^2(t) - e^{-\lambda t}e_{k-1}^2(t) + \int_0^t e^{-\lambda \tau} [\delta \phi_k^2(\tau) - \delta \phi_{k-1}^2(\tau)] d\tau. \quad (24)$$

对于式(24)右边第1项利用部分积分法

$$e^{-\lambda t}e_k^2(t) = -\lambda \int_0^t e^{-\lambda \tau} e_k^2(\tau) d\tau + \int_0^t 2e^{-\lambda \tau} e_k(\tau) \dot{e}_k(\tau) d\tau + e_k^2(0). \quad (25)$$

化简式(24)右边第3项, 并结合式(2)(14)和式(15)知

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\lambda \tau} [\delta \phi_k^2(\tau) - \delta \phi_{k-1}^2(\tau)] d\tau \leq \\ & \int_0^t e^{-\lambda \tau} \{ [b(\tau)u_d(\tau) - b(\tau)u_k(\tau)]^2 - \\ & [b(\tau)u_d(\tau) - b(\tau)\text{sat}(u_{k-1}(\tau))]^2 \} d\tau \leq \\ & - \int_0^t e^{-\lambda \tau} \beta_k \zeta_k d e_k^2(\tau) - \\ & \int_0^t 2e^{-\lambda \tau} e_k(\tau) \dot{e}_k(\tau) d\tau + \\ & 2l_{\Delta f} \int_0^t e^{-\lambda \tau} \frac{b(\tau)}{b^*} (\beta_k \zeta_k + 1) e_k^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (26)$$

由于 $\beta_k \geq 0, \zeta_k \geq 0$, 同时利用初始定位条件 $e_k(0) = 0$, 上式可以化为

$$\begin{aligned} & \int_0^t e^{-\lambda \tau} [\delta \phi_k^2(\tau) - \delta \phi_{k-1}^2(\tau)] d\tau \leq \\ & - \int_0^t 2e^{-\lambda \tau} e_k(\tau) \dot{e}_k(\tau) d\tau + \\ & 2l_{\Delta f} \int_0^t e^{-\lambda \tau} \frac{b(\tau)}{b^*} (\beta_k \zeta_k + 1) e_k^2(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (27)$$

记 c 为 $\beta_k \zeta_k$ 的上界, $\bar{b} = b_{\max}/b^*$. 将式(25)和式(27)代入式(24), 可得

$$\begin{aligned} \Delta L_k(t) & \leq -(\lambda - 2l_{\Delta f} - 2l_{\Delta f} \bar{b} c) \\ & \int_0^t e^{-\lambda \tau} e_k^2(\tau) d\tau - e^{-\lambda t} e_{k-1}^2(t), \end{aligned} \quad (28)$$

存在足够大的 λ , 使得 $\lambda \geq 2l_{\Delta f} + 2l_{\Delta f} \bar{b} c$ 成立, 则式(28)可写成

$$\Delta L_k(t) \leq -e^{-\lambda t} e_{k-1}^2(t) \leq -e^{-\lambda T} e_{k-1}^2(t). \quad (29)$$

对于 $t \in [0, T]$, 当 k 取值为 $k = 1, \dots, m$, 将 m 个不等式累加得

$$\sum_{k=1}^m \Delta L_k(t) = L_m(t) - L_0(t) \leq -e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{m-1} e_k^2(t). \quad (30)$$

由式(23)知, $L_m(t) \geq 0$. 因此

$$e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{m-1} e_k^2(t) \leq L_0(t) - L_m(t) \leq L_0(t). \quad (31)$$

当 $k = 0$ 时,

$$L_0(t) = e^{-\lambda t} e_0^2(t) + \int_0^t e^{-\lambda \tau} \delta \phi_0^2(\tau) d\tau,$$

由于 $L_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上是连续的, 故 $L_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上有界. 当 m 趋于无穷大时,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} e^{-\lambda T} \sum_{k=0}^{m-1} e_k^2(t) \leq L_0(t) < \infty, \quad (32)$$

由级数收敛性质知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, e_k 在 $[0, T]$ 上收敛于零. 证毕.

注1 若将式(18)换作

$$\zeta_k(x, t) = \frac{1}{|e_k(t)| + \varepsilon},$$

则

$$1 - \zeta_k \frac{b}{b^*} |e_k| = \frac{(b^* - b)|e_k| + b^* \varepsilon}{(|e_k| + \varepsilon)b^*} \leq \frac{\varepsilon}{|e_k| + \varepsilon}.$$

将其代入到式(21)中, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k \leq & -\frac{b}{b^*} e_k^2 + |e_k| b u^* + (|\dot{x}_d| + \rho_k) \frac{\varepsilon}{|e_k| + \varepsilon} |e_k| \leq \\ & -(|e_k| - \frac{b^* u^*}{2})^2 + \frac{(b^* u^*)^2}{4} + (|\dot{x}_d| + \rho_k) \varepsilon. \end{aligned} \quad (33)$$

因为 ρ_k 与 x_k 有关, 在 x_k 的有界性未得到证明之前, 无法推出 ρ_k 的有界性. 然而, 在式(18)中, 引入的 $\zeta_k(x, t)$ 却回避了这一问题的.

注 2 在构造形式上, 式(18)中引进的 ζ_k 较式(10)中的 $\zeta_k(x, t)$ 增加了一倍, 这说明控制律(15)(16)通过增大控制量来实现系统中所有变量的一致有界性.

4 鲁棒重复控制(Robust repetitive control)

考虑系统(1)在无限时间区间 $[0, \infty)$ 上周期运行, 其中 $\Delta f(x, t), b(t)$ 是关于时间周期为 T 的函数, 即 $\Delta f(x, t) = \Delta f(x, t - T), b(t) = b(t - T)$. 给定的期望轨迹 $x_d(t)$ 满足

$$\dot{x}_d(t) = \Delta f(x_d, t) + b(t)u_d(t), \quad t \in [0, \infty). \quad (34)$$

式中 $u_d(t)$ 也是以 T 为周期的函数. 可采用重复控制技术来解决这类系统的跟踪控制问题. 重复控制不同于迭代学习控制的地方在于重复控制无需像迭代学习控制那样, 在每次迭代开始时进行初始定位操作. 针对第2节讨论的鲁棒控制方法存在的不足之处, 可以考虑结合重复控制与鲁棒控制两种方法来解决周期轨迹的跟踪控制问题, 使两者取长补短.

为此, 采用如下鲁棒重复控制律:

$$u(t) = u_1(t) + u_r(t), \quad (35)$$

$$u_1(t) = \text{sat}(u_1(t - T)) + \alpha e(t), \quad (36)$$

$$u_r(t) = (\beta(x, t)\zeta(x, t) + 1 + l_{\Delta f}) \frac{1}{b^*} e(t), \quad (37)$$

$$\beta(x, t) = |\dot{x}_d(t)| + \rho(x, t), \quad (38)$$

$$\zeta(x, t) = \frac{2}{|e(t)| + \varepsilon}. \quad (39)$$

其中: $\varepsilon > 0$ 为一设计参数, $\alpha > 0$ 为学习增益. $u_1(t)$ 是周期学习部分; $u_r(t)$ 是鲁棒控制部分; 式(36)中 $\text{sat}(u_1(t - T))$ 表示对 $u_1(t - T)$ 进行限幅, 幅值为 u^* , 其具体表达式详见式(19).

定理 2 对于满足假设1,2的系统(1), 鲁棒重复控制律(35)~(37)可保证闭环系统中所有变量一致有界, 且当 $t \rightarrow \infty$ 时, 系统跟踪误差渐近收敛于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

证 为了证明闭环系统中所有变量的有界性, 取

正定函数 $V(t) = \frac{1}{2} e^2(t)$. 对 $V(t)$ 求导, 并将式(3)及控制律(35)~(37)代入, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -(\alpha b^* + 1) \frac{b}{b^*} e^2 + |e| b u^* + \\ & (1 - \zeta \frac{b}{b^*} |e|)(|\dot{x}_d| + \rho) |e|. \end{aligned} \quad (40)$$

当 $|e| \geq \varepsilon$ 时,

$$1 - \zeta \frac{b}{b^*} |e| \leq \frac{b^*(\varepsilon - |e|)}{(|e| + \varepsilon)b^*} \leq 0, \quad (41)$$

故

$$\dot{V} \leq -b|e|(\frac{\alpha b^* + 1}{b^*} |e| - u^*). \quad (42)$$

这样, 当 $|e| \geq \max\{\varepsilon, \frac{b^* u^*}{\alpha b^* + 1}\}$ 时, $\dot{V} \leq 0$. 故 e 是一致有界的, 因而 x 是一致有界的. 进一步地, 由式(35)~(37)可以推知 u_1, u_r, u 均一致有界.

下面进行收敛性分析. 考虑如下Lyapunov-like函数:

$$L(t) = \frac{1}{2} e^2(t) + \frac{1}{2\alpha} \int_{t-T}^t b(\tau) \delta u^2(\tau) d\tau, \quad (43)$$

这里 $\delta u(\tau) = u_d(\tau) - u_1(\tau)$.

对 $L(t)$ 求导, 可得

$$\dot{L}(t) = e(t)\dot{e}(t) + \frac{1}{2\alpha} [b(t)\delta u^2(t) - b(t-T)\delta u^2(t-T)]. \quad (44)$$

式(44)右边第1项满足

$$e\dot{e} \leq eb(u_d - u_1) - (\beta\zeta + 1) \frac{b}{b^*} e^2. \quad (45)$$

将式(36)代入式(44)右边第2项, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\alpha} [\delta u^2(t) - \delta u^2(t-T)] = \\ \frac{1}{2\alpha} b(t) \{ [u_d(t) - u_1(t)]^2 - \\ [u_d(t-T) - u_1(t-T)]^2 \} \leq \\ -b(t)[u_d(t) - u_1(t)]e(t). \end{aligned} \quad (46)$$

将式(45)和式(46)代入式(44), 由 β, ζ 均大于零, 可得

$$\dot{L}(t) \leq -(\beta\zeta + 1) \frac{b}{b^*} e^2(t) \leq -e^2(t). \quad (47)$$

这样, 得出 $e(t)$ 平方可积. 进一步地, 利用Barbalat引理知, $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$.

证毕.

注 3 若将式(39)换作 $\zeta(x, t) = \frac{1}{|e(t)| + \varepsilon}$, 并代入到式(40)中, 可得

$$\dot{V} \leq -(\alpha b^* + 1) \frac{b}{b^*} e^2 + |e| b u^* + (|\dot{x}_d| + \rho) |e| \quad (48)$$

注意 ρ 与 x 有关, 类似于注1, 在 x 的有界性未得到证明之前,

无法推出 ρ 的有界性.

5 仿真算例(Numerical simulation)

针对系统(1)进行数值仿真, 其中

$$\begin{cases} \Delta f(x, t) = 3\sin x \sin^2 t + \cos^2 x, \\ b(t) = 3 + \sin t, \\ \rho(x, t) = 3\sin^2 t + \cos^2 x. \end{cases} \quad (49)$$

分别采用鲁棒控制律(5)和(12)、鲁棒迭代学习控制律(15)(16)及鲁棒重复控制律(35)~(37)进行仿真. 根据假设1,2, 取 $b^* = 2$, $l_{\Delta f} = 5$. 其他参数 ε , u^* , α 分别取为1,3,2. 给定期望轨迹为 $x_d(t) = 1.5\sin^3 t$. 此外, 鲁棒迭代学习控制的作业区间取为 $[0, 2\pi]$, 鲁棒重复控制的周期取为 2π .

鲁棒控制的仿真结果如图1,2. 其中, 图1为第5个周期的给定的期望轨迹与实际输出轨迹, 图2表示第5个周期的跟踪误差. 结果表明, 鲁棒控制只能实现有界收敛, 跟踪误差范围大致为 $[-0.5, 1.2]$.

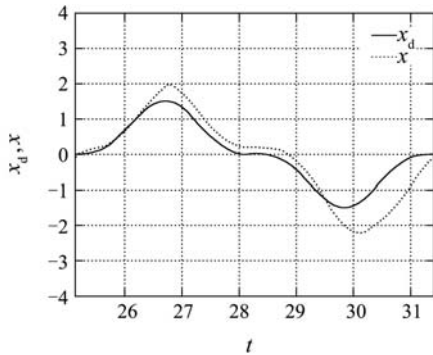


图1 鲁棒控制下第5个周期的实际输出轨迹

Fig. 1 The 5th period system output by robust control

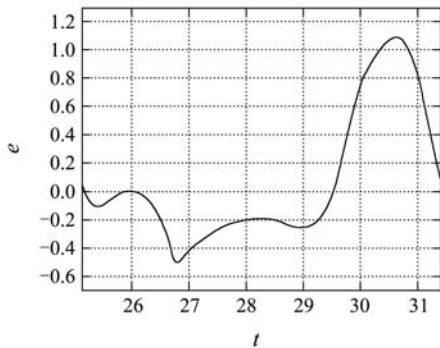


图2 鲁棒控制下第5个周期的跟踪误差

Fig. 2 The 5th period tracking error by robust control

鲁棒迭代学习控制的仿真结果如图3、图4. 其中, 图3表示第80个作业区间上的跟踪误差轨迹, 达到的跟踪误差小于 $\pm 6 \times 10^{-3}$. 结果表明, 随着迭代次数增加, 鲁棒迭代学习控制可实现系统轨迹完全跟踪期望轨迹; 尽管 ε 取值相同, 鲁棒迭代学习控制比单纯的鲁棒控制却能取得更好的跟踪精度.

记 $J_k = \max_{t \in [0, T]} |e_k(t)|$ 为迭代学习控制性能评价指标, 实际运行结果如图4所示.

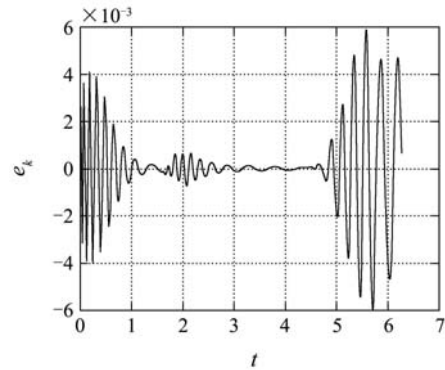


图3 $k = 80$ 时鲁棒迭代学习控制下的跟踪误差

Fig. 3 The 80th cycle tracking error by robust iterative learning control

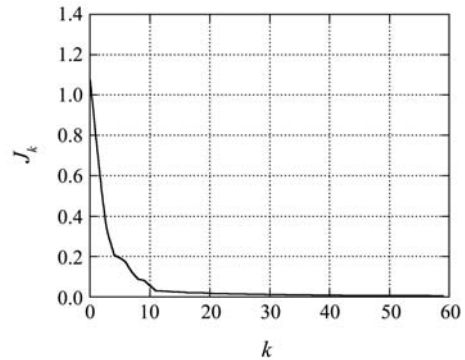


图4 鲁棒迭代学习控制下的 J_k 轨迹

Fig. 4 Performance index J_k by robust iterative learning control

鲁棒重复控制的仿真结果如图5、图6. 其中, 图5表示第50个周期的跟踪误差(小于 $\pm 2.5 \times 10^{-3}$). 结果表明, 随着周期数的增加, 鲁棒重复控制可实现系统跟踪误差渐近收敛. 尽管取相同的 ε 值, 相比单纯的鲁棒控制, 鲁棒重复控制可使系统的跟踪精度大大提高. 记 $J_k = \max_{t \in [kT, (k+1)T]} |e(t)|$ 为重复控制的性能评价指标, 实际运行结果如图6所示.

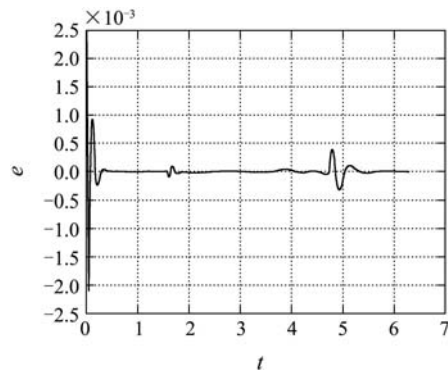
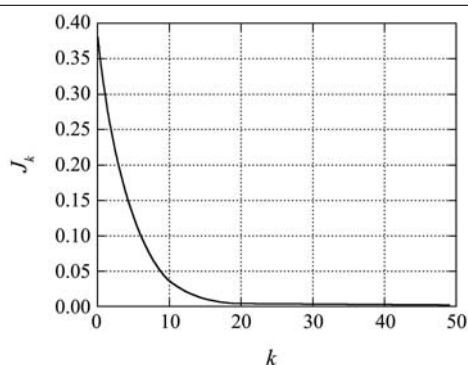


图5 $k = 50$ 时鲁棒重复控制下的跟踪误差

Fig. 5 The 50th cycle tracking error by robust repetitive control

图6 鲁棒重复控制下的 J_k 轨迹Fig. 6 Performance index J_k by robust repetitive control

6 结论(Conclusion)

针对不确定时变系统讨论了其在有限时间区间和无限时间区间两种情形下的跟踪控制问题, 分别给出了形式简单的鲁棒迭代学习控制算法和鲁棒重复控制算法. 理论分析与仿真结果表明, 当系统中存在不可重复不确定特性时, 两种算法都能够保证闭环系统中所有变量的有界性和学习收敛性, 实现了存在不可重复不确定特性的系统的零误差跟踪, 从而弥补了单一学习控制和鲁棒控制的不足之处.

参考文献(References):

- [1] GUTMAN S. Uncertain dynamic system—a lyapunov min-max approach[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1979, 24(3): 437 – 443.
- [2] CORLESS M J, LEITMAN G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic system[J].

IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(5): 1139 – 1143.

- [3] QU Z H. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties[J]. *Systems & Control Letters*, 1992, 18(3): 301 – 307.
- [4] ARIMOTO S. Learning control theory for robotic motion[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1990, 4(4): 543 – 564.
- [5] HARA S, YAMAMOTO Y, OMATA T, et al. Repetitive control system: a new type servo system for periodic exogenous signals[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(7): 659 – 668.
- [6] QU Z, ZHUANG H. Nonlinear learning control of robot manipulators without requiring acceleration measurement[J]. *International Journal of Adaptive Control and Signal Processing*, 1993, 7(2): 77 – 90.
- [7] XU J X. The frontiers of iterative learning control-Part II[J]. *Journal of Systems, Control and Information*, 2002, 45(5): 233 – 243.
- [8] TAN Y, XU J X. Learning based nonlinear internal model control[C] // *Proceedings of the 2003 American Control Conference*. Denver, CO, USA, NJ: IEEE, 2003: 3009 – 3013.
- [9] CHIEN C J, HSU C T, YAO C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 2004, 12(5): 724 – 732.
- [10] SUN M X, GE S S. Adaptive repetitive control for a class of nonlinearly parametrized systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(10): 1984 – 1688.

作者简介:

刘利 (1984—), 女, 研究生, 目前研究方向为学习控制;

孙明轩 (1961—), 男, 教授, 博士生导师, 研究方向为学习控制理论与应用, E-mail: mxsun@zjut.edu.cn.