

动态不确定非线性系统直接自适应模糊backstepping控制

贺向雷, 佟绍成

(辽宁工业大学 数理系, 辽宁 锦州 121001)

摘要: 对一类单输入单输出动态不确定非线性系统, 提出一种直接自适应模糊backstepping和小增益相结合的控制方法. 设计中, 首先用模糊逻辑系统逼近虚拟控制器; 其次把自适应模糊控制和backstepping控制设计技术相结合, 给出了直接自适应模糊控制设计方法. 最后基于Lyapunov函数和小增益方法证明了整个闭环系统的稳定性. 仿真实例进一步验证了所提方法的有效性.

关键词: 非线性系统; 动态不确定; 自适应模糊控制; backstepping 设计; 小增益定理

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Direct adaptive fuzzy backstepping control of nonlinear systems with dynamic uncertainties

HE Xiang-lei, TONG Shao-cheng

(Department of Mathematics and Physics, Liaoning University of Technology, Jinzhou Liaoning 121001 China)

Abstract: A direct adaptive fuzzy backstepping control approach and a small-gain theorem are proposed for the single-input/single-output(SISO) nonlinear system with dynamic uncertainties. In this design, fuzzy logic systems are first employed to approximate the virtual controllers, and then, a direct adaptive fuzzy control approach is developed by combining the adaptive fuzzy control with the backstepping control design technique. Finally, we prove the stability of the closed-loop system by using Lyapunov function and the small-gain theorem. Simulation studies are included to illustrate the effectiveness of the proposed approach.

Key words: nonlinear system; dynamic uncertainties; adaptive fuzzy control; backstepping design; small-gain theorem

1 引言(Introduction)

自从1993年, L. X. Wang博士提出了模糊非线性自适应控制以来, 自适应模糊控制方法作为处理不确定非线性系统的有效方法之一^[1], 已经取得了一些理论成果和实际效果. 十几年来, 国内外学者提出了许多自适应模糊控制方法和系统的控制性能等问题^[2,3], 这些方法和理论极大地促进了模糊控制领域发展. 然而, 它们都局限于满足匹配条件的非线性系统, 因此, 对那些不满足匹配条件的非线性系统, 现有的模糊非线性自适应控制方法和理论就难以应用.

随着非线性backstepping自适应设计技术的发展^[4], 许多学者把自适应模糊控制和backstepping自适应设计相结合, 提出了一些非线性自适应模糊backstepping控制方法^[5,6]. 自适应模糊backstepping控制方法显著的特点是: 它不要求非线性函数与不

确定参数具有线性关系, 而且解决了一般自适应模糊控制方法要求非线性系统必须满足匹配条件的限制, 所以, 它更适用于一般的非线性不确定系统, 特别是带有未建模动态或动态不确定非线性系统. 由于在控制工程应用中动态不确定经常出现, 许多学者对带有未建模动态或动态不确定非线性系统的设计提出了一些自适应控制方法^[7,8]. 然而, 在文献[7,8]所研究的模型中, 未知参数与已知光滑函数构成线性关系, 而不是未知非线性函数. 因此, 研究带有未建模动态且包含未知非线性函数的非线性系统自适应模糊backstepping控制问题在理论和应用中是非常必要的.

本文对一类单输入单输出动态不确定非线性系统, 在文献[7,9,10]小增益定理研究的基础上, 把自适应模糊控制、小增益定理和backstepping控制设计相结合, 提出了一种直接自适应模糊状态反馈控

制方法,其主要贡献在于通过设计自适应模糊控制器,利用小增益定理解决未建模动态问题,并基于Lyapunov函数方法证明了整个闭环系统的稳定性,且系统的输出收敛到原点的一个较小邻域内。

2 问题描述和模糊系统(Problem formulations and fuzzy systems)

考虑下面一类非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z} = q(z, x_1), \\ \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1) + \Delta_1(z, x), \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + f_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) + \Delta_{n-1}(z, x), \\ \dot{x}_n = u + f_n(x_1, \dots, x_n) + \Delta_n(z, x), \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 为系统的状态向量, u 和 y 分别是系统的输入和输出, z 是不可测的部分状态, $q(z, x_1)$ 是未建模动态, Δ_i 和 $q(z, x_1)$ 是不确定且满足Lipschitz条件的连续函数, $\underline{x}_i = (x_1, \dots, x_i) \in \mathbb{R}^n$, $f_i(\underline{x}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) 是未知连续光滑函数。

假设 1 对任意的 $1 \leq i \leq n$, 存在未知常数 p_i^* , 使得

$$|\Delta_i| \leq p_i^* \psi_{i1}(|(x_1, \dots, x_i)|) + p_i^* \psi_{i2}(|z|). \quad (2)$$

其中: ψ_{i1} 是已知有界的光滑函数, ψ_{i2} 是已知非负光滑函数, $\psi_{i1}(0) = \psi_{i2}(0) = 0$ 。

假设 2 未建模动态 z -子系统有ISpS(input-to-state practically stable)-Lyapunov函数 V_0 , 即存在一光滑正定函数 $V_0(z)$, 满足

$$\begin{cases} \alpha_1(|z|) \leq V_0(z) \leq \alpha_2(|z|), \\ \frac{\partial V_0}{\partial z} q(z, x_1) \leq -\alpha_0(|z|) + \gamma_0(|x_1|) + d_0. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_0$ 是 k_∞ 类函数, d_0 为非负常数。

采用单点模糊化、乘积推理规则及中心加权解模糊化所构成的模糊逻辑系统^[1]为

$$y(x) = \theta^T \varphi(x).$$

其中: $\theta \in \mathbb{R}^n$ 为参数向量, $\varphi(x)$ 为模糊基函数向量。

定理 1 $f(x)$ 为紧集 Ω 内连续函数, 则 $\forall \varepsilon > 0$ 存在上述模糊逻辑系统使得

$$\sup_{x \in \Omega} |f(x) - \theta^T \varphi(x)| \leq \varepsilon.$$

控制目标: 利用模糊逻辑系统构造backstepping

自适应鲁棒控制器和参数自适应律, 使得控制系统稳定且系统的输出 y 收敛到原点的一个较小邻域内。

3 直接自适应模糊状态反馈控制器设计(Direct adaptive fuzzy state feedback controller design)

依照文献[1]直接自适应模糊控制器定义, 利用backstepping设计方法, 给出一种直接自适应模糊backstepping鲁棒控制器设计的具体步骤:

第1步 考虑如下Lyapunov函数:

$$V_1 = \frac{1}{2} \eta(x_1^2) + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \tilde{\theta}_1 + \frac{1}{2\lambda_1} (\hat{p}_1 - p_1)^2. \quad (4)$$

其中: $\Gamma_1 = \Gamma_1^T > 0, \lambda_1 > 0$ 为设计参数, η 是光滑 k_∞ 类函数, $p_i \geq \max\{p_i^*, p_i^{*2}\}$ ($1 \leq i \leq n$) 为未知常数, $\hat{p}_i$ 是 p_i 的估计, $\tilde{p}_i = \hat{p}_i - p_i$, $\tilde{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_1^*$ 。所以

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= x_1 \eta'(x_1^2) \dot{x}_1 + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\lambda_1} \tilde{p}_1 \dot{\hat{p}}_1 = \\ &= x_1 \eta'(x_1^2) (x_2 + f_1 + \Delta_1) + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\lambda_1} \tilde{p}_1 \dot{\hat{p}}_1. \end{aligned} \quad (5)$$

由假设1及不等式 $2ab \leq a^2 + b^2$ 得, 存在一非负光滑函数 ϕ_{11} , 使得

$$\begin{aligned} x_1 \eta' \Delta_1 &\leq \\ |x_1 \eta'| (p_1^* \psi_{11}(|x_1|) + p_1^* \psi_{12}(|z|)) &= \\ |x_1 \eta'| p_1^* (\psi_{11}(|x_1|) - \psi_{11}(0)) + \\ p_1^* |x_1 \eta'| \psi_{12}(|z|) &\leq \\ p_1 (\phi_{11}(x_1) + \frac{1}{4}) (x_1 \eta')^2 + \psi_{12}^2(|z|). \end{aligned} \quad (6)$$

将式(6)代入式(5)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq x_1 \eta' [x_2 + p_1 (\phi_{11} + \frac{1}{4}) x_1 \eta' + f_1] + \\ &\quad \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\tilde{\theta}}_1 + \frac{1}{\lambda_1} \tilde{p}_1 \dot{\hat{p}}_1 + \psi_{12}^2(|z|). \end{aligned} \quad (7)$$

如果 f_1 是已知函数, 按照文献[4]选取稳定函数 π_1^* 为

$$\pi_1^* = -x_1 v_1(x_1^2) - f_1 - \hat{p}_1 (\phi_{11} + \frac{1}{4}) x_1 \eta'. \quad (8)$$

其中: v_1 为光滑不减函数且 $v_1(0) > 0$, 选择 $\eta(x_1^2)$, 使得 $\eta'(x_1^2)$ 为 R_+ 上的严格正函数。

由于 f_1 是未知函数, 所以用模糊逻辑系统逼近 π_1^* , 设模糊逻辑系统 π_1 为

$$\pi_1 = \hat{u}(x_1 | \theta_1) = \theta_1^T \varphi_1(x_1). \quad (9)$$

定义最优参数向量 θ_1^* 为

$$\theta_1^* = \arg \min_{\theta_1 \in \Omega} [\sup_{x_1 \in U} |\hat{u}(x_1 | \theta_1) - \pi_1^*(x_1)|], \quad (10)$$

其中 Ω 和 U 是关于 θ_1 和 x_1 的有界闭集^[1]. 模糊最小逼近误差定义为

$$\varepsilon_1(x_1) = \hat{u}(x_1 | \theta_1^*) - \pi_1^*(x_1). \quad (11)$$

假设 3 存在常数 $\varepsilon_{10} > 0$, 使得 $|\varepsilon_1(x_1)| \leq \varepsilon_{10}$.

令 x_2 为虚拟控制, 定义变量

$$\bar{x}_2 = x_2 - \pi_1.$$

将式(8)~(11)代入式(7)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & x_1 \eta' [\bar{x}_2 + \hat{u}(x_1 | \theta_1) - \hat{u}(x_1 | \theta_1^*) + \\ & \hat{u}(x_1 | \theta_1^*) - \pi_1^* + \pi_1^* + p_1(\phi_{11} + \frac{1}{4})x_1 \eta' + \\ & f_1] + \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} \dot{\theta}_1 + \frac{1}{\lambda_1} \tilde{p}_1 \dot{p}_1 + \psi_{12}^2(|z|) \leq \\ & -x_1^2 \eta'(v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) + x_1 \eta' \bar{x}_2 + \\ & \tilde{\theta}_1^T \Gamma_1^{-1} (\dot{\theta}_1 + \Gamma_1 x_1 \eta' \varphi_1) + \psi_{12}^2(|z|) + \\ & \frac{1}{\lambda_1} \tilde{p}_1 (\dot{p}_1 - \lambda_1(\phi_{11} + \frac{1}{4})(x_1 \eta')^2) + \frac{1}{4} \varepsilon_{10}^2. \end{aligned} \quad (12)$$

引入 σ -修正方法^[4], 取参数自适应律 $\hat{p}_1, \theta_1$ 为

$$\dot{\hat{p}}_1 = \lambda_1 (x_1 \eta')^2 (\phi_{11} + \frac{1}{4}) - \lambda_1 \sigma_p (\hat{p}_1 - p_{10}), \quad (13)$$

$$\dot{\theta}_1 = -\Gamma_1 x_1 \eta' \varphi_1(x_1) - \Gamma_1 \sigma_\theta (\theta_1 - \theta_{10}). \quad (14)$$

其中: $\sigma_p > 0, \sigma_\theta > 0$ 是设计的参数, p_{10}, θ_{10} 分别是 $\hat{p}_1$ 和 θ_1 的初始值.

定义 $\bar{x}_1 = x_1 \eta'(x_1^2)$, 将式(13)(14)代入式(12)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\eta' x_1^2 (v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) + \bar{x}_1 \bar{x}_2 + \\ & \frac{1}{4} \varepsilon_{10}^2 - \sigma_p \tilde{p}_1 (\hat{p}_1 - p_{10}) - \\ & \sigma_\theta \tilde{\theta}_1^T (\theta_1 - \theta_{10}) + \psi_{12}^2(|z|). \end{aligned} \quad (15)$$

易得如下不等式:

$$\begin{aligned} -\sigma_p \tilde{p}_1 (\hat{p}_1 - p_{10}) & \leq -\frac{\sigma_p}{2} \tilde{p}_1^2 + \frac{\sigma_p}{2} |p_1 - p_{10}|^2, \quad (16) \\ -\sigma_\theta \tilde{\theta}_1^T (\theta_1 - \theta_{10}) & \leq -\frac{\sigma_\theta}{2} \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \frac{\sigma_\theta}{2} |\theta_1^* - \theta_{10}|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

将不等式(16)与(17)代入式(15)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 \leq & -\eta' x_1^2 (v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) + \bar{x}_1 \bar{x}_2 - \\ & \frac{\sigma_p}{2} \tilde{p}_1^2 - \frac{\sigma_\theta}{2} \|\tilde{\theta}_1\|^2 + \psi_{12}^2(|z|) + d_1. \end{aligned} \quad (18)$$

其中

$$d_1 = \frac{\sigma_p}{2} |p_1 - p_{10}|^2 + \frac{\sigma_\theta}{2} |\theta_1^* - \theta_{10}|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{10}^2.$$

第 i 步 ($2 \leq i \leq n-1$) 定义变量 $\bar{x}_i = x_i - \pi_{i-1}$, 则有

$$\dot{\bar{x}}_i = \dot{x}_i - \dot{\pi}_{i-1} = x_{i+1} + f_i + \Delta_i - \dot{\pi}_{i-1}. \quad (19)$$

考虑如下Lyapunov函数:

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} \bar{x}_i^2 + \frac{1}{2} \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \tilde{\theta}_i + \frac{1}{2\lambda_i} \tilde{p}_i^2, \quad (20)$$

其中: $\Gamma_i^T = \Gamma_i > 0, \lambda_i > 0, \tilde{\theta}_i = \theta_i - \theta_i^*$.

根据式(19)和式(20)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i = & \dot{V}_{i-1} + \bar{x}_i (x_{i+1} + f_i + \Delta_i - \dot{\pi}_{i-1}) + \\ & \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\theta}_i + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{p}_i \dot{p}_i. \end{aligned} \quad (21)$$

类似第1步处理方法, 利用Taylor展开, 存在非负光滑函数 ϕ_{i1} 使得

$$\bar{x}_i \Delta_i \leq p_i \bar{x}_i (\bar{x}_i \phi_{i1} + \frac{\bar{x}_i}{4}) + \psi_{i2}^2(|z|). \quad (22)$$

将式(22)代入式(21), 由数学归纳法得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -\eta' x_1^2 (v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) - \sum_{j=2}^{i-1} (c_j - 1) \bar{x}_j^2 + \\ & \bar{x}_{i-1} \bar{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_\theta}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_p}{2} \tilde{p}_j^2 + \\ & \bar{x}_i [x_{i+1} + f_i - \dot{\pi}_{i-1} + p_i (\bar{x}_i \phi_{i1} + \frac{\bar{x}_i}{4})] + \\ & \frac{1}{\lambda_i} \tilde{p}_i \dot{p}_i + \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} \dot{\theta}_i + \sum_{j=1}^i \psi_{j2}^2(|z|) + d_{i-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} d_{i-1} = & d_{i-2} + \frac{\sigma_p}{2} |p_{i-1} - p_{(i-1)0}|^2 + \\ & \frac{1}{4} \varepsilon_{(i-1)0}^2 + \frac{\sigma_\theta}{2} |\theta_{i-1}^* - \theta_{(i-1)0}|^2. \end{aligned}$$

定义变量

$$\bar{x}_{i+1} = x_{i+1} - \pi_i,$$

如果 f_i 已知, 则选取稳定函数 π_i^* 为

$$\pi_i^* = -c_i \bar{x}_i - \bar{x}_{i-1} - f_i - \hat{p}_i (\phi_{i1} + \frac{1}{4}) \bar{x}_i + \dot{\pi}_i, \quad (24)$$

其中 $c_i > 0$ 是设计参数.

由于 f_i 未知, 所以用模糊逻辑系统逼近 π_i^* , 设模糊逻辑系统 π_i 为

$$\pi_i = \hat{u}(\underline{x}_i | \theta_i) = \theta_i^T \varphi_i(\underline{x}_i). \quad (25)$$

假设模糊逼近误差满足 $|\varepsilon_i(\underline{x}_i)| \leq \varepsilon_{i0}$, 其中 ε_{i0} 是已知的正常数, 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & -\eta' x_1^2 (v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) - \sum_{j=2}^i (c_j - 1) \bar{x}_j^2 + \\ & \bar{x}_i \bar{x}_{i+1} + \frac{1}{\lambda_i} \tilde{p}_i [\dot{p}_i - \lambda_i (\phi_{i1} + \frac{1}{4}) \bar{x}_i^2] + \\ & \tilde{\theta}_i^T \Gamma_i^{-1} (\dot{\theta}_i + \Gamma_i \bar{x}_i \varphi_i(\underline{x}_i)) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_p}{2} \tilde{p}_j^2 - \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{i-1} \frac{\sigma_\theta}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 + \sum_{j=1}^i \psi_{j2}^2(|z|) + d_{i-1} + \frac{1}{4} \varepsilon_{i0}^2. \quad (26)$$

选取自适应律 $\theta_i, \hat{p}_i$:

$$\dot{\hat{p}}_i = \lambda_i \bar{x}_i (\bar{x}_i \phi_{i1} + \frac{\bar{x}_i}{4}) - \lambda_i \sigma_p (\hat{p}_i - p_{i0}), \quad (27)$$

$$\dot{\theta}_i = -\Gamma_i \bar{x}_i \varphi_i(x_i) - \Gamma_i \sigma_\theta (\theta_i - \theta_{i0}), \quad (28)$$

其中 p_{i0}, θ_{i0} 分别是 $\hat{p}_i, \theta_i$ 的初始值.

将式(27)(28)代入式(26)得

$$\begin{aligned} \dot{V}_i &\leq -\eta' x_1^2 (v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) - \sum_{j=2}^i (c_j - 1) \bar{x}_j^2 + \\ &\quad \bar{x}_i \bar{x}_{i+1} - \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_\theta}{2} \|\tilde{\theta}_j\|^2 - \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_p}{2} \tilde{p}_j^2 + \\ &\quad \sum_{j=1}^i \psi_{j2}^2(|z|) + d_i. \end{aligned} \quad (29)$$

其中

$$d_i = d_{i-1} + \frac{\sigma_p}{2} |p_i - p_{i0}|^2 + \frac{\sigma_\theta}{2} |\theta_i^* - \theta_{i0}|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{i0}^2.$$

第n步 在第n步中, 选择Lyapunov函数为

$$V_n = V_{n-1} + \frac{1}{2} \bar{x}_n^2 + \frac{1}{2} \theta_n^T \Gamma_n^{-1} \tilde{\theta}_n + \frac{1}{2\lambda_n} (\hat{p}_n - p_{n0})^2.$$

由数学归纳法得

$$u = \hat{u}(x|\theta_n) = \theta_n^T \varphi_n(x), \quad (30)$$

$$\dot{\hat{p}}_n = \lambda_n \bar{x}_n (\bar{x}_n \phi_{n1} + \frac{\bar{x}_n}{4}) - \lambda_n \sigma_p (\hat{p}_n - p_{n0}), \quad (31)$$

$$\dot{\theta}_n = -\Gamma_n \bar{x}_n \varphi_n(x) - \Gamma_n \sigma_\theta (\theta_n - \theta_{n0}). \quad (32)$$

其中 p_{n0}, θ_{n0} 分别是 $\hat{p}_n, \theta_n$ 的初始值. 则

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\eta' x_1^2 (v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_p}{2} \tilde{p}_i^2 - \\ &\quad \sum_{i=2}^n (c_i - 1) \bar{x}_i^2 - \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_\theta}{2} \|\tilde{\theta}_i\|^2 + \\ &\quad \sum_{i=1}^n i \psi_{i2}^2(|z|) + d_n. \end{aligned} \quad (33)$$

其中

$$d_n = d_{n-1} + \frac{\sigma_p}{2} |p_n - p_{n0}|^2 + \frac{\sigma_\theta}{2} |\theta_n^* - \theta_{n0}|^2 + \frac{1}{4} \varepsilon_{n0}^2.$$

4 小增益稳定分析(Stability analysis by small gain theorem)

为使用小增益定理^[10], 选择函数 η, v_1 使得

$$\eta' x_1^2 (v_1(x_1^2) - \eta'(x_1^2)) \geq c_1 \eta(x_1^2). \quad (34)$$

由于 ψ_{i2} 为已知非负光滑函数且 $\psi_{i2}(0) = 0$, 所以存在光滑 k_∞ 类函数 β 使得

$$\sum_{i=1}^n \psi_{i2}^2(|z|) \leq \beta(|z|^2). \quad (35)$$

令

$$\begin{aligned} c_i - 1 &> 0, \quad i = 2, \dots, n, \quad d = d_n, \\ c &= \min\{2c_1, 2(c_i - 1), \frac{\sigma_\theta}{\lambda_{\max}(\Gamma_j^{-1})}, \sigma_p \lambda_j\}, \\ j &= 1, \dots, n, \end{aligned}$$

则式(33)可进一步表示为

$$\dot{V}_n \leq -cV_n + \beta(|z|^2) + d. \quad (36)$$

对任意 $0 < \varepsilon_1 < c$, 要使得式(36)满足如下不等式:

$$\begin{aligned} \dot{V}_n &\leq -\varepsilon_1 V_n + \varepsilon_1 V_n - cV_n + \beta(|z|^2) + d \leq \\ &\quad -\varepsilon_1 V_n. \end{aligned} \quad (37)$$

须 $\varepsilon_1 V_n - cV_n + \beta(|z|^2) + d \leq 0$, 即

$$V_n \geq \frac{\beta(|z|^2)}{c - \varepsilon_1} + \frac{d}{c - \varepsilon_1}. \quad (38)$$

因 $|z| \leq \alpha_1^{-1}(V_0(z))$, 所以当

$$V_n \geq \frac{\beta(\alpha_1^{-1}(V_0(z))^2)}{c - \varepsilon_1} + \frac{d}{c - \varepsilon_1} \quad (39)$$

时, 有

$$V_n \geq \max\left\{\frac{2\beta(\alpha_1^{-1}(V_0(z))^2)}{c - \varepsilon_1}, \frac{2d}{c - \varepsilon_1}\right\}, \quad (40)$$

式(37)成立.

为满足小增益定理条件^[10], 对任意 $\varepsilon_2 > 0$ 选择的 η 函数同时满足

$$\gamma^{-1} \circ \gamma_0(|x_1|) \leq \frac{1}{4} \eta(x_1^2) + \varepsilon_2 \leq \frac{1}{2} V_n + \varepsilon_2. \quad (41)$$

将式(41)代入式(3), 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_0}{\partial z} q(z, x_1) &\leq \\ &\quad -\alpha_0(|z|) + \gamma(\gamma^{-1} \circ \gamma_0(|x_1|)) + d_0 \leq \\ &\quad -\alpha_0(|z|) + \gamma(V_n) + \gamma(2\varepsilon_2) + d_0. \end{aligned} \quad (42)$$

对任意 $0 < \varepsilon_3 < 1, \varepsilon_4 > 0$, 当

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 V_0 &\geq \max\left\{\varepsilon_4 \alpha_2 \circ \alpha_0^{-1} \circ \frac{2\gamma(V_n)}{1 - \varepsilon_3}, \right. \\ &\quad \left. \varepsilon_4 \alpha_2 \circ \alpha_0^{-1} \circ \frac{2\gamma(2\varepsilon_2) + 2d_0}{1 - \varepsilon_3}\right\}, \end{aligned} \quad (43)$$

式(42)进一步表示为

$$\dot{V}_0 \leq -\varepsilon_3 \alpha_0(|z|) \leq -\varepsilon_3 \alpha_0 \circ \alpha_2^{-1}(V_0(z)). \quad (44)$$

因此, 在式(40)和式(43)条件下, 式(37)和式(44)成立, 满足小增益引理^[10]中的条件.

对任意 $s > 0$, 选择

$$\gamma(s) < \frac{1 - \varepsilon_3}{2} \alpha_0 \circ \alpha_2^{-1} \circ \alpha_1\left(\sqrt{\beta^{-1}\left(\frac{c - \varepsilon_1}{2} s\right)}\right), \quad (45)$$

$$\chi_1(s) = \frac{2\beta(\alpha_1^{-1}(\frac{1}{\varepsilon_4}s)^2)}{c - \varepsilon_1}, \quad (46)$$

$$\chi_2(s) = \varepsilon_4\alpha_2 \circ \alpha_0^{-1} \circ \frac{2\gamma(s)}{1 - \varepsilon_3}. \quad (47)$$

由式(45)~(47)得

$$\chi_1 \circ \chi_2(s) < s. \quad (48)$$

根据式(3)(40)(43)及小增益定理^[10], 可以推出对任何的 $i = 1, 2, \dots, n$, 信号 $x_i(t)$ 和 $u(t)$ 是全局一致最终有界的, 对于非线性系统(1), 在如上假设成立的条件下采用自适应模糊控制器(30)和参数自适应律, 可保证闭环系统中所有信号均有界, 并且输出收敛于原点的一个邻域内.

5 仿真实例(Simulation examples)

例 1 考虑如下的非线性系统^[7]:

$$\begin{cases} \dot{z} = -z + 0.125x_1^2, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) + \vartheta^T \zeta_1(x_1) + \Delta_1(z, x), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) + \vartheta^T \zeta_2(x_1, x_2) + \Delta_2(z, x), \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (49)$$

其中:

$$\begin{aligned} \vartheta &= [\vartheta_1 \ \vartheta_2]^T = [0.1 \ 0.5]^T, \\ \zeta_1(x_1) &= [e^{x_1} \ 0]^T, \ \zeta_2(x_1, x_2) = [0 \ x_1 x_2]^T, \\ \Delta_1(z, x) &= z^2, \ \Delta_2(z, x) = 2z^2, \end{aligned}$$

$\vartheta \in \mathbb{R}^l$ 为未知常参数向量, $\zeta_1(x_1)$, $\zeta_2(x_1, x_2)$ 为已知光滑函数, $f_1(x_1) = \vartheta^T \zeta_1(x_1)$, $f_2(x_1, x_2) = \vartheta^T \zeta_2(x_1, x_2)$.

为满足小增益定理和控制设计假设条件, 选取

$$\begin{aligned} \gamma(s) &= 0.0625s^{\frac{1}{4}}, \ \gamma_0(s) = 0.125s^4, \\ \eta(x_1^2) &= x_1^8 + 0.1x_1, \ v(x_1^2) = 2(8x_1^7 + 0.1), \\ \beta(s) &= 4s^2, \ c = 0.1, \ \varepsilon_1 = \varepsilon_3 = 0.0001, \\ \varepsilon_2 = \varepsilon_4 &= 0.1, \ \alpha_0(s) = s^2, \ \alpha_1(s) = 0.5s^2, \\ \alpha_2(s) &= 1.5s^2, \ d_0 = 0. \end{aligned}$$

如果 $\zeta_1(x_1)$, $\zeta_2(x_1, x_2)$ 为已知的光滑函数, 则采用文献[7]提出的方法控制系统(49).

在仿真中, 选取控制器和自适应律中的设计参数为

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= 0.2, \ \sigma_p = 0.1, \ \Gamma = 0.04, \\ \lambda &= 4, \ c_2 = 0.1, \ p_0 = 0.01. \end{aligned}$$

取初始条件为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.5, \ x_2(0) = 0.2, \\ \hat{p}(0) &= 0.5, \ z(0) = 0, \ \theta(0) = [0, 0]^T. \end{aligned}$$

则状态 $x_1(t)$ 和控制输入 $u(t)$ 的轨迹分别用图1,

图2中的虚线表示.

如果 $\zeta_1(x_1)$, $\zeta_2(x_1, x_2)$ 为未知的光滑函数, 则文献[7]提出的方法不能处理未知光滑函数项, 所以采用本文提出的方法控制系统(49).

选取模糊隶属函数为

$$\begin{aligned} \mu_{F_1^j}(x_1) &= \exp[-(x_1 + 0.1 \times j)^2/16], \\ \mu_{F_2^j}(x_2) &= \exp[-(x_1 + 0.1 \times j)^2/4] \cdot \\ &\quad \exp[-(x_2 + 0.1 \times j)^2/4], \\ j &= 1, \dots, 5. \end{aligned}$$

模糊径向基函数为

$$\begin{aligned} \varphi_{1j}(x_1) &= \frac{\exp[-(x_1 + 0.1 \times j)^2/16]}{\sum_{n=1}^5 \exp[-(x_1 + 0.1 \times n)^2/16]}, \\ \varphi_{2j}(x_1, x_2) &= \frac{\prod_{i=1}^2 \exp[-(x_i + 0.1 \times j)^2/4]}{\sum_{n=1}^5 (\prod_{i=1}^2 \exp[-(x_i + 0.1 \times n)^2/4])}. \end{aligned}$$

模糊逻辑系统表示为

$$\theta_1^T \varphi_1(x_1) = \sum_{j=1}^5 \theta_{1j}^T \varphi_{1j}(x_1), \quad (50)$$

$$\theta_2^T \varphi_2(x_1, x_2) = \sum_{j=1}^5 \theta_{2j}^T \varphi_{2j}(x_1, x_2). \quad (51)$$

选取控制器和自适应律中的设计参数为

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= 0.2, \ \sigma_p = 0.1, \ \Gamma_1 = \Gamma_2 = 10^2 \times I_5, \\ \theta_{10} = \theta_{20} &= [0, 0, 0, 0, 0]^T, \ \lambda_1 = 4, \ \lambda_2 = 4, \\ c_2 &= 0.2, \ p_{10} = 0.01, \ p_{20} = 0.03. \end{aligned}$$

取初始条件为

$$\begin{aligned} \theta_1(0) = \theta_2(0) &= [0, 0, 0, 0, 0]^T, \\ \hat{p}_1(0) = \hat{p}_2(0) &= 0.5. \end{aligned}$$

而 $x_1(0)$, $x_2(0)$ 和 $z(0)$ 的初始值与文献[7]的方法取值相同, 则状态 $x_1(t)$ 和控制输入 $u(t)$ 的轨迹分别用图1、图2中的实线表示.

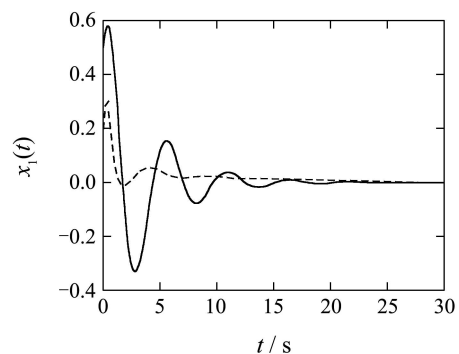
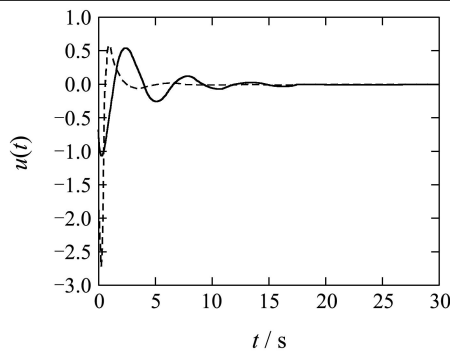


图 1 状态 x_1 的轨迹

Fig. 1 The trajectory of state x_1

图2 控制输入 u 的轨迹Fig. 2 The trajectory of control u

从图1和图2可以看出, 两种控制方法都使闭环系统稳定, 但由于文献[7]的方法要求 $\zeta_1(x_1)$ 和 $\zeta_2(x_1, x_2)$ 是已知的, 而本文要求 $\zeta_1(x_1)$ 和 $\zeta_2(x_1, x_2)$ 未知, 在使用模糊逻辑系统逼近 $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_1, x_2)$ 的过程中存在逼近误差, 因此文献[7]的方法中的 $x_1(t)$ 比本文的收敛速度要快。

例2 考虑如下的非线性系统:

$$\begin{cases} \dot{z} = -z + 0.125x_1^2, \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t) + x_1^2 + 0.5z^2, \\ \dot{x}_2(t) = u(t) + x_1x_2^2 + z^2, \\ y(t) = x_1(t). \end{cases} \quad (52)$$

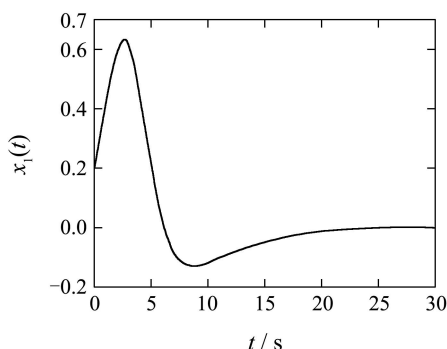
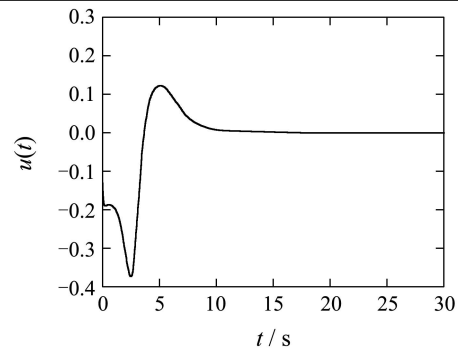
由于非线性系统(52)中含有未知的光滑函数 x_1^2 和 $x_1x_2^2$ 且它们不能表示成未知参数与已知光滑函数构成线性关系的形式, 所以文献[7]的方法不能解决此问题, 因此采用本文提出的方法, 用模糊逻辑系统逼近未知的光滑函数。

选取的模糊隶属函数、模糊径向基函数及满足小增益定理和控制设计的假设条件与例1相同。

取初始条件为

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 0.2, \quad x_2(0) = 0.2, \\ \theta_1(0) &= \theta_2(0) = [0, 0, 0, 0]^T, \\ \hat{p}_1(0) &= \hat{p}_2(0) = 0.5, \quad z(0) = 0, \end{aligned}$$

则仿真结果用图3和图4表示。

图3 状态 x_1 的轨迹Fig. 3 The trajectory of state x_1 图4 控制输入 u 的轨迹Fig. 4 The trajectory of control u

通过例1、例2说明本文的结果和所提出的自适应模糊控制设计方法扩展了文献[7]的结果和方法。

参考文献(References):

- [1] WANG L X. *Adaptive Fuzzy Systems and Control: Design and Stability Analysis*[M]. Engle-wood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1994.
- [2] CHEN B S, LEE C H, CHANG Y C. H_∞ tracking design of uncertain nonlinear SISO systems: adaptive fuzzy approach[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(1): 32 – 43.
- [3] SPOONER J T, PASSINO K M. Stable adaptive control of a class of nonlinear systems/neural network[J]. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 1996, 4(3): 339 – 359.
- [4] KRSTIC M, KANELAKOPOULOS I, KOKOTOVIC P. *Nonlinear and Adaptive Control Design*[M]. New York: Wiley, 1995.
- [5] YANG Y S, FENG G, RENG J S. A combined backstepping and small-gain approach to robust adaptive fuzzy control for strict-feedback nonlinear systems[J]. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part A: Systems and Humans*, 2004, 34(3): 406 – 420.
- [6] WANG M, CHEN B. Direct adaptive fuzzy tracking control for a class of perturbed strict-feedback nonlinear systems[J]. *Fuzzy Sets and Systems*, 2007, 158(24): 2655 – 2670.
- [7] JIANG Z P, HILL D, CHEN B. Robust adaptive control of systems with nonlinear unmodded dynamics[C] // *Proceeding of the 37th IEEE Conference on Decision and Control*. Florida, USA: IEEE, 1998, 12: 2855 – 2860.
- [8] JIANG Z P, PRALY L. Design of robust adaptive controllers for nonlinear systems with dynamic uncertainties[J]. *Automatica*, 1998, 34(7): 825 – 840.
- [9] JIANG Z P. A combined backstepping and small-gain approach to adaptive output feedback control[J]. *Automatica*, 1999, 35(6): 1131 – 1139.
- [10] JIANG Z P, MARELS I M Y, WANG Y. A Lyapunov formulation of the nonlinear small-gain theorem for interconnected ISS systems[J]. *Automatica*, 1996, 32(8): 1211 – 1215.

作者简介:

贺向雷 (1978—), 女, 硕士研究生, 目前研究方向为模糊系统理论与模糊自适应控制, E-mail: hxlyt@yahoo.cn;

佟绍成 (1960—), 男, 博士, 教授, 目前研究方向为模糊系统理论与模糊自适应控制, E-mail: jztsc@sohu.com.