

非恒同混沌系统的全状态广义同步

陈娟, 陆君安

(武汉大学 数学与统计学院, 湖北 武汉 430079)

摘要: 在已有的广义同步定义基础上, 提出了一种新的概念——非恒同混沌系统的全状态广义同步(FSGS), 给出了实现全状态广义同步的统一的控制器形式, 该控制器适用范围大, 结构相对简单, 并且是自适应的. 以Chua电路、Lorenz系统、Rössler系统和Liu系统为例, 数值实验验证了该方法的有效性, 该控制方法可以很快的实现两个混沌系统的全状态广义同步.

关键词: 混沌系统; 自适应控制; 广义同步; 全状态

中图分类号: O415.5 **文献标识码:** A

Full state generalized synchronization of nonidentical chaotic systems

CHEN Juan, LU Jun-an

(School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan Hubei 430079, China)

Abstract: Based on the existing generalized synchronization, a new synchronization the full-state generalized synchronization (FSGS) is proposed for nonidentical chaotic systems. The controller with a unified structure is designed for this new synchronization. This simple and adaptive controller can be applied to a wide range of generalized synchronizations. Computer simulations are performed to illustrate the effectiveness of the proposed method for Chua circuit, Lorenz system, Rössler system and Liu system. This approach can realize a fast full-state generalized synchronization of two chaotic systems.

Key words: chaotic system; adaptive control; generalized synchronization; full-state

1 引言(Introduction)

近十多年来, 人们研究了很多实现混沌同步的方法. 混沌同步在各种不同的领域内如保密通信^[1~3]、nano-振子^[4]以及在理解神经计算^[5]和大脑认识的功能紊乱方面^[6]获得成功的应用, 但是这些方法建立在完全同步(CS)^[7]和相同步(PS)^[8]基础上的. 它们研究的是两个恒同系统之间的同步行为.

然而, 在现实条件下, 完全同步是很难实现的. 最近, 一个广义的概念——混沌广义同步(generalized synchronization of chaos)被引进并且得到广泛研究. 因为在物理世界里, 大部分的情况是系统是相异的, 或者由于参数的失配造成系统之间的差异^[9~11]. 从而广义同步比完全同步应用范围更广, 更一般. 混沌广义同步是指两个系统之间不一定是完全同步, 而是系统的变量之间存在一个确定的函数关

系, 所谓投影同步、相同步、反同步(AS)都是广义同步的特殊情况. Grosu等^[12]就专门研究了在参数失配的情况下如何实现混沌系统的反同步. Kocarev和Parlitz^[13]按照混沌的广义同步方式构造的保密通信密钥序列, 有较高的抗破译强度, 因此研究混沌广义同步更具有实际意义. 混沌广义同步概念首先是由Rulkov等提出的^[14], Kocarev和Parlitz^[15]给出一些例子证明了只要响应系统是稳定的, 那么广义同步可以发生在任意两个系统之间. Lu和Xi^[16]提出了一般的方法来构造响应系统, 从而实现线性广义同步. 但是对于非恒同系统之间的同步和广义同步目前研究仍然不够, 如研究非恒同系统之间的完全同步^[17], 非恒同系统之间的单变量的广义同步^[18]等.

Meng和Wang^[19]采用驱动响应概念和非线性控

制理论实现了不同维混沌系统的广义同步,但是设计的控制器形式比较复杂. 本文基于跟踪控制^[20]和自适应控制方法,提出一种混沌全状态广义同步(FSGS),也就是在非恒同系统对应的各个变量之间实现所需要的不同的函数关系,而且给出了实现非恒同系统全状态广义同步的统一的控制器形式. 和以往研究的要求函数是线性的不同,这里的函数关系可以是任意给定的,线性非线性都可以,只要满足可微的条件. 数值实验进一步验证该方法的有效性.

2 全状态广义同步(Full state generalized synchronization)

考虑以下两个不同的系统

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

$$\dot{y} = g(y). \quad (2)$$

其中: $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ 满足Lipschitz条件, 即存在 $M > 0$, 使得对于任意 $x, y \in \mathbb{R}^n$, 有

$$\|f(x) - f(y)\| \leq M\|x - y\|. \quad (3)$$

系统(1)的控制方程为

$$\dot{x} = f(x) + u. \quad (4)$$

定理 1 若给定可微的向量函数 $h(y(t)) = [h_1(y_1(t)), h_2(y_2(t)), \dots, h_n(y_n(t))]^T$, f 满足条件(3). 如果取向量控制器

$$u(t) = \frac{dh(y(t))}{dt} - f(h(y(t))) - Ke.$$

其中:

$$e(t) = [x_1 - h_1(y_1(t)), x_2 - h_2(y_2(t)) \dots, x_n - h_n(y_n(t))]^T,$$

$$K = \text{diag}\{k_1, k_2, \dots, k_n\},$$

k_i 满足 $\dot{k}_i = p_i e_i^2$, $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为正的常数, 则系统(2)和系统(4)全状态广义同步(FSGS), 即对于任意初始条件, (2)和(4)的解 $y(t), x(t)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - h(y(t))\| = 0.$$

证 误差方程为

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \dot{x} - \frac{dh(y(t))}{dt} = \\ &= f(x) + u - \frac{dh(y(t))}{dt} = \\ &= f(x) + \frac{dh(y(t))}{dt} - f(h(y(t))) - Ke - \frac{dh(y(t))}{dt} = \\ &= f(x) - f(h(y(t))) - Ke. \end{aligned}$$

选择Lyapunov函数

$$V(e, k_i) = \frac{1}{2} e^T e + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2p_i} (k_i - k_i^*)^2,$$

此时 V 正定. 则

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= e^T (f(x) - f(h(y(t)))) - Ke + \sum_{i=1}^n (k_i - k_i^*) e_i^2 \leq \\ &= e^T (f(x) - f(h(y(t)))) - \sum_{i=1}^n k_i^* e_i^2 \leq \\ &= - \sum_{i=1}^n (k_i^* - M) e_i^2 = e^T (MI_n - K^*) e. \end{aligned}$$

I_n 是 n 阶单位矩阵, $K^* = \text{diag}\{k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*\}$, 只要 $k_i^* > M (i = 1, 2, \dots, n)$, 使得 $K^* - MI_n$ 正定, 从而 $K^* - MI_n$ 的最小特征值 $\lambda_{\min}(K^* - MI_n) > 0$. 但由于 $V = V(e, k_i)$, 所以 $\dot{V}(t)$ 非负. 再由于

$$\begin{aligned} \lambda_{\min}(K^* - MI_n) \int_0^t e^T(\tau) e(\tau) d\tau &\leq \\ \int_0^t e^T(\tau) (K^* - MI_n) e(\tau) d\tau &\leq \\ V(0) - V(t) &\leq V(0), \end{aligned}$$

则由Barbalat's定理^[21]知道当 $t \rightarrow \infty$ 时, $\|e\| \rightarrow 0$, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - h(y(t))\| = 0$. 证毕.

3 数值实验(Numerical simulation)

下面将利用几种典型的混沌系统(如Chua电路、Lorenz系统、Rössler系统和Liu系统)分别仿真3阶混沌系统之间的全状态广义同步来说明上述的方法. 两个实验中, 均选取受控系统中的 $p_1 = p_2 = p_3 = 10$.

3.1 Chua电路与Lorenz系统的广义同步(Generalized synchronization of Chua circuit and Lorenz system)

将Chua电路作为受控系统, Chua电路的方程为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha(x_1 - x_2 - f(x_1)), \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = -\beta x_2. \end{cases}$$

其中: $f(x_1) = bx_1 + 0.5(a - b)[|x_1 + 1| - |x_1 - 1|]$, α, β, a, b 是系统参数且满足 $a < b < 0$. 当参数 $(\alpha, \beta, a, b) = (9, 100/7, -8/7, -5/7)$, 上述系统是混沌的.

加入控制器后的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha(x_1 - x_2 - f(x_1)) + \frac{dh_1(y_1(t))}{dt} + \\ &\quad \alpha(h_1(y_1(t)) - h_2(y_2(t)) - f(h_1(y_1(t)))) - \\ &\quad k_1(x_1 - h_1(y_1(t))), \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 + \frac{dh_2(y_2(t))}{dt} - (h_1(y_1(t)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & h_2(y_2(t)) + h_3(y_3(t)) - k_2(x_2 - h_2(y_2(t))), \\ \dot{x}_3 = & -\beta x_2 + \frac{dh_3(y_3(t))}{dt} + \beta h_2(y_2(t)) - \\ & k_3(x_3 - h_3(y_3(t))), \\ \dot{k}_1 = & p_1(x_1 - h_1(y_1(t)))^2, \\ \dot{k}_2 = & p_2(x_2 - h_2(y_2(t)))^2, \\ \dot{k}_3 = & p_3(x_3 - h_3(y_3(t)))^2. \end{aligned}$$

Lorenz系统的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & -10(y_1 - y_2), \\ \dot{y}_2 = & 28y_1 - y_1y_3 - y_2, \\ \dot{y}_3 = & y_1y_2 - \frac{8}{3}y_3. \end{aligned}$$

取 $h(y(t)) = [y_1 + 2, \sin y_2, \cos y_3]^T$.

Chua电路与Lorenz系统的全状态广义同步模拟结果见图1可以看出, 随着时间的增加, 两系统的同步误差很快趋于零, Chua 电路与Lorenz系统很快实现全状态广义同步.

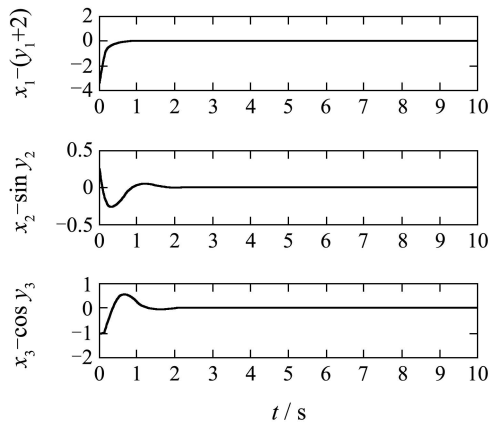


图1 Chua电路与Lorenz系统的广义同步

Fig. 1 Generalized synchronization error of Chua circuit and Lorenz system

3.2 Rössler系统与Liu系统的广义同步 (Generalized synchronization of Rössler system and Liu system)

将Rössler系统作为受控系统, Rössler系统为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -(x_2 + x_3), \\ \dot{x}_2 = & x_1 + ax_2, \\ \dot{x}_3 = & b + x_3(x_1 - c). \end{aligned}$$

其中 a, b, c 为系统参数. 当参数 $(a, b, c) = (0.2, 0.2, 5)$, Rössler系统呈混沌状态.

加入控制器后的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 = & -(x_2 + x_3) + \frac{dh_1(y_1(t))}{dt} + (h_2(y_2(t)) + \\ & h_3(y_3(t)) - k_1(x_1 - h_1(y_1(t))), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & x_1 + ax_2 + \frac{dh_2(y_2(t))}{dt} - (h_1(y_1(t)) + \\ & ah_2(y_2(t))) - k_2(x_2 - h_2(y_2(t))), \\ \dot{x}_3 = & b + x_3(x_1 - c) + \frac{dh_3(y_3(t))}{dt} - \\ & (b + h_3(y_3(t))(h_1(y_1(t)) - c)) - \\ & k_3(x_3 - h_3(y_3(t))), \\ \dot{k}_1 = & p_1(x_1 - h_1(y_1(t)))^2, \\ \dot{k}_2 = & p_2(x_2 - h_2(y_2(t)))^2, \\ \dot{k}_3 = & p_3(x_3 - h_3(y_3(t)))^2. \end{aligned}$$

Liu系统^[22]的状态方程为

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = & 10(y_2 - y_1), \\ \dot{y}_2 = & 40y_1 - y_1y_3, \\ \dot{y}_3 = & -2.5y_3 + y_1^2. \end{aligned}$$

取 $h(y(t)) = [2y_1, y_2^2, \sin y_3]^T$.

Rössler系统与Liu系统的全状态广义同步模拟结果见图2, 可以得到类似图1的结论: 通过对受控系统施加控制器, 两个异结构系统很快实现了全状态广义同步.

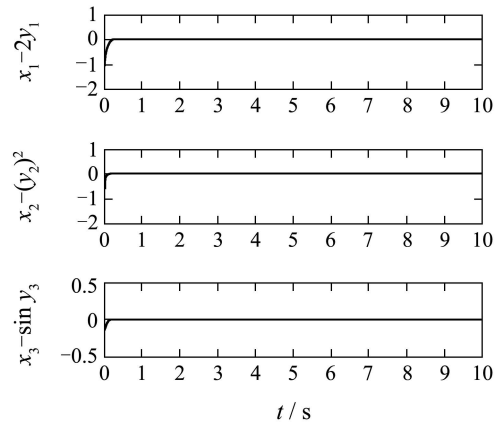


图2 Rössler系统与Liu系统的广义同步

Fig. 2 Generalized synchronization error of Rössler system and Liu system

注1 从这两个仿真例子可以看出, 选取的可微向量函数 $h(y(t))$ 是任意的. 这里选取了线性函数, 正弦函数, 余弦函数和幂函数, 充分说明了函数的任意性和广泛性. 并且, 从图中我们也可以很容易的看出, 实现广义同步所需时间短, 速度快. 使用的控制器形式简单, 易于实现.

4 结论 (Conclusion)

本文提出一种非恒同混沌系统的全状态广义同步(FSGS)问题, 基于追踪控制方法, 提出一种实现混沌全状态广义同步方法, 给出了统一的控制器形式, 只要受控系统右端动力学满足Lipschitz有界. 数值试验验证该方法的有效性, 此方法对不同的系统具

有统一的形式,适用范围大,控制器结构简单.

参考文献(References):

- [1] LU J A, WU X Q, LÜ J H. Synchronization of a unified system and the application in secure communication[J]. *Physics Letters A*, 2002, 305(6): 365 – 370.
- [2] ARGYRIS A, SYVRIDIS D, LARGER L, et al. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibre-optic links[J]. *Nature(London)*, 2005, 438(7006): 343 – 346.
- [3] 吴晓群, 陆君安, 谢进. 用采样数据反馈控制统一混沌系统到平衡点[J]. *控制理论与应用*, 2003, 20(6): 889 – 893.
(WU Xiaqun, LU Jun'an, XIE Jin. Control unified chaotic system to equilibrium points using sampled data feedback[J]. *Control Theory & Applications*, 2003, 20(6): 889 – 893.)
- [4] MOHANTY P. Nano-oscillators get it together[J]. *Nature(London)*, 2005, 437(7057): 325–326.
- [5] HOPPENSTEADT F C, IZHIKEVICH E. *Oscillatory neurocomputers with dynamic connectivity*: US, 6957204[P]. October, 2005.
- [6] UHLHAAS P J, SINGER W. Neural synchrony in brain disorders: relevance for cognitive dysfunctions and pathophysiology[J]. *Neuron*, 2006, 52(1): 155 – 168.
- [7] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1990, 64(8): 821 – 824.
- [8] PIKOVSKY A, ROSEBLUM M, KURTHS J. *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences*[M]. Cambridge, England: Cambridge University Press, 2001.
- [9] VENKATARAMANI S C, HUNT B R, OTT E, et al. Transitions to Bubbling of chaotic systems[J]. *Physical Review Letters*, 1996, 77(27): 5361 – 5364.
- [10] ASTAKHOV V, HASLER M, KAPITANIAK T, et al. Effect of parameter mismatch on the mechanism of chaos synchronization loss in coupled systems[J]. *Physical Review E*, 1998, 58(5): 5620 – 5628.
- [11] VIANA R L, GREBOGI C, PINTO S, et al. Bubbling bifurcation: Loss of synchronization and shadowing breakdown in complex systems[J]. *Physical D*, 2005, 206(1-2): 94 – 108.
- [12] GROSU I, PADMANABAN E, ROY P K, et al. Designing coupling for synchronization and amplification of chaos[J]. *Physical Review Letters*, 2008, 100(23): 234102.
- [13] KOCAREV L, PARLITZ U. General approach for chaotic synchronization with applications to communication[J]. *Physical Review Letters*, 1995, 74(25): 5028 – 5031.
- [14] RULKOV N F, SUSHCHIK M F, TSIMRING L S, et al. Generalized synchronization of chaos in directionally coupled chaotic systems[J]. *Physical Review E*, 1995, 51(2): 980 – 994.
- [15] KOCAREV L, PARLITZ U. Generalized synchronization, predictability, and equivalence of unidirectionally coupled dynamical systems[J]. *Physical Review Letters*, 1996, 76(11): 1816 – 1819.
- [16] LU J G, XI Y G. Linear generalized synchronization of continuous-time chaotic systems[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2003, 17(5): 825 – 831.
- [17] 宁娣, 陆君安. 一个临界系统与Lorenz系统和Chen系统的异结构同步[J]. *物理学报*, 2005, 54(10): 4590 – 4595.
(NING Di, LU Jun'an. Synchronization of a critical chaotic system with Lorenz system and Chen system[J]. *Acta Physico-Chimica Sinica*, 2005, 54(10): 4590 – 4595.)
- [18] 赵德勤, 刘曾荣. 基于追踪控制的混沌系统广义同步[J]. *重庆邮电大学学报*, 2007, 19(6): 759 – 761.
(ZHAO Deqin, LIU Zengrong. Generalized synchronization of chaotic system based on tracking control[J]. *Journal of Chongqing University of Posts and Telecommunications(Natural Science)*, 2007, 19(6): 759 – 761.)
- [19] MENG J, WANG X Y. Generalized synchronization via nonlinear control[J]. *Chaos*, 2008, 18(2): 023108.
- [20] LU J A, TAO C H, LV J H, et al. Parameter identification and tracking of a unified system[J]. *Chinese Physics Letters*, 2002, 19(5): 632 – 635.
- [21] HASSAN K K. *Nonlinear Systems*[M]. Second Edition. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 1996: 192.
- [22] LIU C, LIU T, LIU L, et al. A new chaotic attractor[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2004, 22(5): 1031 – 1038.

作者简介:

陈娟 (1983—), 女, 博士研究生, 从事混沌控制与同步及复杂动力网络方面的研究, E-mail: juanchen1220@yahoo.com.cn;

陆君安 (1945—), 男, 教授, 博士生导师, 从事混沌控制与同步及复杂动力网络方面的研究, E-mail: jalu@whu.edu.cn.