第 26 卷第 10 期
2009 年 10 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 26 No. 10
Oct. 2009

文章编号: 1000−8152(2009)10−1126−04

一类非线性微分代数系统的能控性子分布

王文涛, 李　媛

(沈阳工业大学理学院, 辽宁 沈阳 110870)

摘要: 能控性子分布在系统的能控性分解中起着重要作用. 针对一类非线性微分代数系统, 利用M导数方法, 提出了能控性子分布的概念. 给出了一个计算包含在某些分布内的最大能控性子分布的算法, 同时讨论了该算法的一些性质. 最后, 给出一个例子说明如何利用本文给出的算法计算此类微分代数系统的包含在某给定分布内的最大能控性子分布.

关键词: 微分代数系统; M导数; 能控性子分布; 算法

中图分类号: TP271　　　**文献标识码**: A

Controllability distributions of a class of nonlinear differential-algebraic systems

WANG Wen-tao, LI Yuan

(College of Science, Shenyang University of Technology, Shenyang Liaoning 110870, China)

Abstract: The controllability distributions play an important role in controllability decompositions of the systems. By means of M-derivative methods, the concept of controllability distributions is introduced for a class of nonlinear differential-algebraic systems. An algorithm for calculating the maximal controllability distributions contained in some distributions is developed, and some properties on this algorithm are discussed. Finally, an example of calculating the maximal controllability distributions contained in some distributions is provided to illustrate the results.

Key words: differential-algebraic systems; M-derivative; controllability distributions; algorithm

1　引言(Introduction)

在线性系统理论中, 能控性子空间在系统的能控性分解过程中起着重要作用. 在非线性系统理论中, 能控性子空间被能控性子分布代替, 而且在非线性系统的结构分解过程中, 能控性子分布起着与能控性子空间在线性系统理论中类似的作用[1].

20世纪70年代, 在经济系统、机器人系统和电力系统等实际系统中, 一类称为微分代数系统(广义系统, 奇异系统)被发现, 并受到众多学者的关注[2~4]. 近15年, 非线性微分代数系统的研究取得一些进展, 主要包括完全线性化、输入输出解耦、干扰解耦和输出跟踪等[4~6]. 最近, 针对一类约束为线性的仿射非线性微分代数系统, 受控不变分布及能控性子分布的概念被提出, 一些性质及应用也被考虑[7], 但是, 对于更具有一般性的约束为非线性的微分代数系统的研究甚少, 而且有一类约束为非线性的微分代数系统在电力系统的控制模型中有广泛应用背景[8~10], 故研究此类系统的问题更具有实际意义.

本文针对一类非线性微分代数系统, 利用M导数方法, 给出能控性子分布的概念, 探讨此类系统的包含在某给定分布内的最大能控性子分布的算法及其性质, 并通过一个例子, 说明如何利用该算法计算此类微分代数系统的包含在某给定分布内的最大能控性子分布.

2　系统的描述和定义(Description of systems and definitions)

考虑一类非线性微分代数系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,z) + \sum\limits_{i=1}^{m} g_i(x,z)u_i, \\ 0 = p(x,z). \end{cases} \tag{1}$$

其中: $x \in \mathbb{R}^n$为状态向量, $z \in \mathbb{R}^s$为约束向量, $u \in \mathbb{R}^m$为输入向量; $f(x,z), g_i(x,z), i = 1,2,\cdots,m : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^n$为光滑的$n$维向量场, $p(x,z) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$为光滑的$s$维向量场.

系统(1)在(x_0, z_0)处满足相容初始条件, 即$p(x_0,$

收稿日期: 2008−09−28; 收修改稿日期: 2009−01−09.
基金项目: 辽宁省教育基金资助项目(20060621).

$z_0)=0$, 并满足在某连通开集$\Omega\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^s$上

$$\mathrm{rank}(\frac{\partial p}{\partial z})=s,\ \forall (x,z)\in\Omega.$$

系统(1)可以简记为

$$\begin{cases}\dot x=f(x,z)+g(x,z)u,\\ 0=p(x,z).\end{cases}\tag{2}$$

设$M_f(\lambda(x,z))$表示函数$\lambda(x,z)$关于向量场f的M导数, 定义为[9]

$$M_f\lambda=E(\lambda)f.$$

其中

$$E(\lambda)=\frac{\partial\lambda}{\partial x}-\frac{\partial\lambda}{\partial z}(\frac{\partial p}{\partial z})^{-1}\frac{\partial p}{\partial x}.$$

高阶M导数定义为

$$M_f^k\lambda=M_f(M_f^{k-1}\lambda),\ k>1.$$

其中$M_f^0\lambda=\lambda$.

设 $f(x,z)$ 和 $g(x,z)$是n维向量场, M 括号定义为[9]

$$\mathrm{mad}_f g=[f,g]_m=E(g)\cdot f-E(f)\cdot g.$$

对于非线性微分代数系统(2), 考虑状态反馈

$$u=\alpha(x,z)+\beta(x,z)v,\tag{3}$$

其中$\beta(x,z)$为区域Ω内的非奇异矩阵. 对系统(2)实施反馈(3), 系统(2)转化为

$$\begin{cases}\dot x=f(x,z)+g(x,z)\alpha(x,z)+g(x,z)\beta(x,z)v,\\ 0=p(x,z).\end{cases}\tag{4}$$

记

$$\begin{aligned}&\tilde f(x,z)=f(x,z)+g(x,z)\alpha(x,z),\\ &\tilde g(x,z)=g(x,z)\beta(x,z).\end{aligned}\tag{5}$$

定义 1　如果存在反馈律(α,β)及子集$\Lambda\subset 1,2,\cdots,m$, 使得

$$R=\langle\tilde f,\tilde g_1,\tilde g_2,\cdots,\tilde g_m|\tilde g^\Lambda\rangle,$$

即, R为包含$\tilde g^\Lambda$且关于$\tilde f,\tilde g_1,\tilde g_2,\cdots,\tilde g_m$ 不变的最小分布, 则称R为非线性微分代数系统(2)的一个M能控性子分布. 如果反馈律(α,β)只定义于点(x_0,z_0)的某邻域Ω^0内, 则称R为该系统在Ω上的一个局部M能控性子分布.

3　能控性子分布算法(Algorithm of controllability distributions)

在控制问题中, 一般要讨论包含在某一分布Δ内的最大M能控性子分布. 设分布Δ给定, 给出以下算法:

$$\begin{cases}\Delta_0=\Delta\cap G,\\ \Delta_k=\\ \Delta\cap([f,\Delta_{k-1}]_m+\sum\limits_{j=1}^m[g_j,\Delta_{k-1}]_m+G),\\ k\geqslant 1,\end{cases}\tag{6}$$

其中$G=\mathrm{span}\{g_1,g_2,\cdots,g_m\}$. 由算法(6)可得

引理 1　Δ_i是一个单调增加的分布序列. 如果存在整数k^*使得$\Delta_{k^*+1}=\Delta_{k^*}$, 则对于一切$k\geqslant k^*$, 有$\Delta_k=\Delta_{k^*}$.

下面将证明, 在一定条件下, 由算法(6)给出的分布Δ_{k^*}就是系统(2)的包含在Δ内的最大局部M能控性子分布. 为此, 需要一些引理.

引理 2　算法(6)所产生的分布序列与反馈无关. 即$\tilde f,\tilde g_j(j=1,2,\cdots,m)$是任意一组反馈$(\alpha,\beta)$依式(5)给出, 令

$$\begin{cases}\tilde\Delta_0=\Delta\cap G,\\ \tilde\Delta_k=\Delta\cap([\tilde f,\tilde\Delta_{k-1}]_m+\sum\limits_{j=1}^m[\tilde g_j,\tilde\Delta_{k-1}]_m+G),\\ \qquad k\geqslant 1,\end{cases}$$

则$\tilde\Delta_k=\Delta_k, k=0,1,2,\cdots$.

证　先证明$\tilde\Delta_k\subset\Delta_k, k=0,1,2,\cdots$. 当$k=0$时, 显然成立. 设$\tilde\Delta_k\subset\Delta_k$, 于是

$$\begin{aligned}&\tilde\Delta_{k+1}\subset\Delta\cap([\tilde f,\Delta_k]_m+\sum_{j=1}^m[\tilde g_j,\Delta_k]_m+G)=\\ &\Delta\cap([f+g\alpha,\Delta_k]_m+\sum_{j=1}^m[(g\beta)_j,\Delta_k]_m+G).\end{aligned}$$

设$\tau\in\Delta_k$为Δ_k中任一向量, 由M导数的性质, 有

$$\begin{aligned}&[f+g\alpha,\tau]_m=\\ &[f,\tau]_m+\sum_{j=1}^m([g_j,\tau]_m\alpha_j-(M_\tau\alpha_j)g_j),\\ &[(g\beta)_j,\tau]_m=\sum_{l=1}^m([g_l,\tau]_m\beta_{lj}-(M_\tau\beta_{lj})g_l),\end{aligned}$$

因此, 得

$$\begin{aligned}&\tilde\Delta_{k+1}\subset\\ &\Delta\cap([f,\Delta_k]_m+\sum_{j=1}^m[g_j,\Delta_k]_m+G)=\Delta_{k+1}.\end{aligned}$$

又由于β可逆, 可得$f=\tilde f-\tilde g\beta^{-1}\alpha$和$g=\tilde g\beta^{-1}$, 由此可证明反包含关系$\tilde\Delta_k\supset\Delta_k$, 因此, $\tilde\Delta_k=\Delta_k$.

建立

$$S(\Delta)=\Delta_0+\Delta_1+\cdots+\Delta_k+\cdots,$$

若存在整数k^*使得$\Delta_{k^*+1}=\Delta_{k^*}$, 则说$S(\Delta)$是可有限计算的. 若$S(\Delta)$是可有限计算的, 则$S(\Delta)=\Delta_{k^*}$.

引理 3　设Δ是一个对合分布, Δ与$\Delta\cap G$非奇

异, 并且$S(\mathit{\Delta})$可有限计算, 则$\mathit{\Delta}$为系统(2)的局部M能控性子分布当且仅当

1) $\mathit{\Delta}$是系统(2)的M能控性不变分布;

2) $S(\mathit{\Delta})=\mathit{\Delta}$.

证 必要性. 设$\mathit{\Delta}$是系统(2)的局部M能控性子分布, 则$\mathit{\Delta}$也是系统(2)的M能控性不变分布, 因此, 只需要证明(2)即可.

由于 $\mathit{\Delta}$ 是局部 M 能控性子分布, 故存在反馈(α,β)使得

$$\mathit{\Delta}=\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_m|\tilde{g}^{\mathit{\Lambda}}\rangle. \tag{7}$$

构造一个新的分布

$$\begin{cases}\bar{\mathit{\Delta}}_0=\mathit{\Delta}\cap G,\\ \bar{\mathit{\Delta}}_k=[\tilde{f},\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+\sum\limits_{j=1}^{m}[\tilde{g}_j,\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1},\\ \qquad k\geqslant 1.\end{cases} \tag{8}$$

下面证明$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset\mathit{\Delta},\ k=0,1,2,\cdots$.

$k=0$时显然成立. 设$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset\mathit{\Delta}$, 由式(7)可知, $\mathit{\Delta}$是关于向量场$\tilde{f},\tilde{g}_j,j=1,2,\cdots,m$的不变分布, 因此

$$[\tilde{f},\bar{\mathit{\Delta}}_k]_m\subset[\tilde{f},\mathit{\Delta}_k]_m,$$
$$[\tilde{g}_j,\bar{\mathit{\Delta}}_k]_m\subset[\tilde{g}_j,\mathit{\Delta}_k]_m,\ j=1,2,\cdots,m.$$

由式(7)得$\bar{\mathit{\Delta}}_{k+1}\subset\mathit{\Delta}$.

由引理2知道, 算法(6)与反馈无关, 故可利用上述反馈(α,β)构造算法(6), 即

$$\begin{cases}\mathit{\Delta}_0=\mathit{\Delta}\cap G\\ \mathit{\Delta}_k=\mathit{\Delta}\cap([\tilde{f},\mathit{\Delta}_{k-1}]_m+\sum\limits_{j=1}^{m}[\tilde{g}_j,\mathit{\Delta}_{k-1}]_m+G),\\ \qquad k\geqslant 1,\end{cases}$$

因此得$\bar{\mathit{\Delta}}_k=\mathit{\Delta}\cap\bar{\mathit{\Delta}}_k=\mathit{\Delta}_k$. 再由引理1得, 存在整数$k^*$使得$\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*+1}=\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}$. 这样, 由定义式(8), 得

$$[\tilde{f},\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}]_m\subset\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*+1}=\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*},$$
$$[\tilde{g}_j,\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}]_m\subset\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*+1}=\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*},\ j=1,2,\cdots,m,$$

因此$\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}\supset\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_m|\mathit{\Delta}\cap G\rangle$. 但由定义明显有

$$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_m|\mathit{\Delta}\cap G\rangle,\ k=0,1,\cdots.$$

于是有

$$\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}=\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_m|\mathit{\Delta}\cap G\rangle.$$

由于$\tilde{g}^{\mathit{\Lambda}}\subset\mathit{\Delta}\cap G$, 可得$\mathit{\Delta}\subset\mathit{\Delta}_{k^*}$. 显然又有$\mathit{\Delta}\supset\mathit{\Delta}_{k^*}$, 因此得$\mathit{\Delta}_{k^*}=\mathit{\Delta}$.

充分性. 由于$\mathit{\Delta}$是系统(2)的M能控性不变分布, 故存在反馈(α,β)使得$\tilde{f}=f+g\alpha,\ \tilde{g}=g\beta$满足

$$[\tilde{f},\mathit{\Delta}]_m\subset\mathit{\Delta},\ [\tilde{g}_j,\mathit{\Delta}]_m\subset\mathit{\Delta},\ j=1,2,\cdots,m.$$

设$\bar{g}_1,\bar{g}_2,\cdots,\bar{g}_l$为张成$\mathit{\Delta}\cap G$的基向量场, 则可在$\tilde{g}_1,\tilde{g}_2,\cdots,\tilde{g}_m$中选出$m-l$个向量场, 使得它们与$\bar{g}_1,\bar{g}_2,\cdots,\bar{g}_l$ 共同组成分布G的基向量场. 因为$\bar{g}_i\in\mathit{\Delta}$, 得

$$[\bar{g}_i,\mathit{\Delta}]_m\subset\mathit{\Delta},\ i=1,2,\cdots,l.$$

不失一般性, 设

$$\bar{g}_i=\tilde{g}_i,\ i=1,2,\cdots,l,$$

作分布序列

$$\begin{cases}\bar{\mathit{\Delta}}_0=\mathit{\Delta}\cap G,\\ \bar{\mathit{\Delta}}_k=[\tilde{f},\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+\sum\limits_{j=1}^{m}[\tilde{g}_j,\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1},\\ \qquad k\geqslant 1.\end{cases}$$

与必要性的证明类似, 可证明$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset\mathit{\Delta}$, 由此得$\bar{\mathit{\Delta}}=\mathit{\Delta}_k$. 因此, 存在$k^*$使得 $\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*+1}=\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}$. 由$\bar{\mathit{\Delta}}_k$的构造可得

$$\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}=\langle\tilde{f},\tilde{g}_1,\cdots,\tilde{g}_m|\mathit{\Delta}\cap G\rangle.$$

因此

$$\mathit{\Delta}_k=\mathit{\Delta}_{k^*}=\bar{\mathit{\Delta}}_{k^*}.$$

定理 1 设$\mathit{\Delta}$是系统(2)的一个M能控性不变分布且对合, $\mathit{\Delta}$与$\mathit{\Delta}\cap G$非奇异, 并且$S(\mathit{\Delta})$可有限计算, 则$S(\mathit{\Delta})$为系统(2)包含在$\mathit{\Delta}$中的最大M能控性子分布.

证 由引理3的证明知道, $\mathit{\Delta}_{k^*}$是系统(2)包含在$\mathit{\Delta}$中的一个M能控性子分布, 因此, 只需证明$\mathit{\Delta}_{k^*}$是系统(2)包含在$\mathit{\Delta}$中的最大M能控性子分布. 设存在反馈$\bar{f}=f+g\alpha,\ \bar{g}=g\beta$, 使得

$$D=\langle\bar{f},\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_m|D\cap G\rangle.$$

构造分布序列

$$\begin{cases}\bar{\mathit{\Delta}}_0=D\cap G,\\ \bar{\mathit{\Delta}}_k=[\tilde{f},\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+\sum\limits_{j=1}^{m}[\tilde{g}_j,\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1},\\ \qquad k\geqslant 1.\end{cases} \tag{9}$$

由此可得$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset D\subset\mathit{\Delta}$, 因此

$$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset\mathit{\Delta}\cap([\tilde{f},\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+\sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_j,\bar{\mathit{\Delta}}_{k-1}]_m+G).$$

由此可得

$$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset\mathit{\Delta}_k,\ k=0,1,\cdots. \tag{10}$$

当$k=0$时, 式(10)显然成立, 设$\bar{\mathit{\Delta}}_k\subset\mathit{\Delta}_k$, 可得

$$\bar{\mathit{\Delta}}_{k+1}\subset\mathit{\Delta}\cap([\tilde{f},\mathit{\Delta}_k]_m+\sum_{j=1}^{m}[\tilde{g}_j,\mathit{\Delta}_k]_m+G)=\mathit{\Delta}_{k+1}.$$

根据式(9)及式(10)可以得到

$$D=\langle\bar{f},\bar{g}_1,\cdots,\bar{g}_m|\bar{g}^{\mathit{\Lambda}}\rangle=$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \bar{\Delta}_k = \sum_{j=1}^{\infty} \Delta_k = \sum_{j=1}^{k^*} \Delta_k = \Delta_{k^*}.$$

即$S(\Delta)$为系统(2)包含在Δ中的最大M能控性子分布.

4 一个例子(An example)

考虑代数约束维数$s=1$、输入维数$m=2$、定义在$\mathbb{R}^5$的非线性微分代数系统, 具体结构元素为

$$f(x,z)=[x_2^2 \;\; 0 \;\; x_1x_4 \;\; z \;\; x_2]^{\mathrm{T}}, \tag{11a}$$

$$g_1(x,z)=[0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; z \;\; x_5]^{\mathrm{T}}, \tag{11b}$$

$$g_2(x,z)=[0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; z]^{\mathrm{T}}, \tag{11c}$$

$$p(x,z)=x_1+x_2+x_4+x_5+z. \tag{11d}$$

为了方便, 取$\Delta = \mathrm{span}\left\{\begin{matrix}[0\;\;1\;\;0\;\;0\;\;0]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;1\;\;0\;\;0]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;0\;\;1\;\;0]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;1]^{\mathrm{T}}\end{matrix}\right\}$.

根据算法(6):

$$\Delta_0=\Delta\cap G=G=\mathrm{span}\left\{\begin{matrix}[0\;\;0\;\;1\;\;z\;\;x_5]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;0\;\;1\;\;z]^{\mathrm{T}}\end{matrix}\right\}.$$

直接计算, 得

$$[f,\Delta_0]_m=\mathrm{span}\left\{\begin{matrix}[0\;0\;\;-x_1z\;\;-x_2^2-x_2+x_5\;\;x_2]^{\mathrm{T}}\\ [0\;0\;\;-x_1\;\;-x_2^2-x_1+1\;\;0]^{\mathrm{T}}\end{matrix}\right\},$$

$$[g_1,\Delta_0]_m=[g_1,g_2]_m=\mathrm{span}\{[0\;\;0\;\;0\;\;-z-1\;\;z]^{\mathrm{T}}\},$$

$$[g_2,\Delta_0]_m=[g_2,g_1]_m=-[g_1,g_2]_m=\mathrm{span}\{[0\;\;0\;\;0\;\;z+1\;\;-z]^{\mathrm{T}}\},$$

因此得

$$\Delta_1=\mathrm{span}\left\{\begin{matrix}[0\;\;0\;\;1\;\;z\;\;x_5]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;0\;\;1\;\;z]^{\mathrm{T}}\\ [0\;0\;\;-x_1z\;\;-x_2^2-x_2+x_5\;\;x_2]^{\mathrm{T}}\\ [0\;0\;\;-x_1\;\;-x_2^2-x_1+1\;\;0]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;0\;\;z+1\;\;-z]^{\mathrm{T}}\end{matrix}\right\}.$$

继续实施算法(6), 得

$$\Delta_2=\Delta_1,$$

因此, 作为Δ_2的生成元可得

$$\Delta_2=\mathrm{span}\left\{\begin{matrix}[0\;\;0\;\;1\;\;0\;\;0]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;0\;\;1\;\;0]^{\mathrm{T}}\\ [0\;\;0\;\;0\;\;0\;\;1]^{\mathrm{T}}\end{matrix}\right\},$$

即Δ_2为非线性微分代数系统(11)包含在分布Δ内的最大M能控性子分布.

5 结论(Conclusion)

通过本文的讨论, 利用M 导数方法, 能控性子分布的概念可以推广到一类非线性微分代数系统. 并且本文给出的非线性微分代数系统M能控性子分布的概念是非线性系统对应概念的直接推广, 特别是当利用约束方程消除约束将此类微分代数系统转化为一般非线性系统时, 本文所提出的M能控性子分布与非线性系统的能控性子分布是一致的.

参考文献(References):

[1] ISIDORI A. *Nonlinear Control Systems*[M]. Third Edition. Berlin, Germany: Springer-Verlag, 1995.

[2] LUENBERGER D G. Dynamics equations in descriptor form[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1977, 22(3): 312 – 321.

[3] YOU L S, CHEN B S. Tracking control designs for both holonomic and non-holonomic contrained hanical systems[J]. *International Journal of Control*, 1993, 58(4): 587 – 612.

[4] KRISHNAN H, MCCLAMROCH N H. Tracking in nonlinear differential-algebraic systems with applications to constrained robot systems[J]. *Automatica*, 1994, 30(12): 1885 – 1897.

[5] LIU X P. Local disturbance decoupling of nonlinear singular systems[J]. *International Journal of Control*, 1998, 70(5): 685 – 702.

[6] LIU X P. Asymptotic output tracking of nonlinear differential-algebraic systems[J]. *Automatica*, 1998, 34(3): 393 – 397.

[7] 王文涛, 孔芝. 仿射非线性奇异系统的受控分布[J]. 控制理论与应用, 2007, 24(6): 929 – 933.
(WANG Wentao, KONG Zhi. Controlled distributions of nonlinear singular systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2007, 24(6): 929 – 933.)

[8] HILL D J, MAREELS I M Y. Stability theory for differential/algebraic systems with application to power systems[J]. *IEEE Transactions on Control Automatic and Systems*, 1990, 37(11): 1416 – 1423.

[9] 王杰, 陈陈. 电力系统中微分代数模型的非线性控制[J]. 中国电机工程学报, 2001, 21(8): 15 – 18.
(WANG Jie, CHEN Chen. Nonlinear control of differential algebraic model in power systems[J]. *Chinese Society for Electrical Engineering*, 2001, 21(8): 15 – 18.)

[10] 徐光虎, 王杰, 陈陈, 等. 基于微分代数模型的AC/DC系统非线性控制器的设计[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(7): 52 – 57.
(XU Guanghu, WANG Jie, CHEN Chen, et al. Design nonlinear controller for AC/DC power systems based on differential algebraic models[J]. *Chinese Society for Electrical Engineering*, 2005, 25(7): 52 – 57.)

作者简介:

王文涛 (1956—), 男, 教授, 博士, 主要研究方向为微分几何、非线性控制系统, E-mail: wwtlxy@163.com;

李　媛 (1974—), 女, 讲师, 主要研究方向为广义系统、网络控制, E-mail: liyuanlxy@163.com.