

# 判定非确定离散事件系统稳定性的多项式复杂度算法

舒少龙<sup>1</sup>, 刘 君<sup>2</sup>

(1. 同济大学 电子信息与工程学院, 上海 200092; 2. 青岛农业大学 信息学院, 山东 青岛 266109)

**摘要:** 本文讨论基于非确定自动机/形式语言模型的非确定离散事件系统稳定性的多项式算法. 在引入拟距离的概念之后, 根据拟距离形式化地定义了非确定离散事件系统稳定性. 以往判定非确定离散事件系统稳定性的算法基于系统的观测器实现, 该观测器在结构上具有指数复杂度, 因此本文分析系统结构和观测器结构之间的关系, 基于对系统状态对的讨论, 提出了判定系统稳定性的有效多项式搜索算法.

**关键词:** 非确定自动机/形式语言模型; 稳定性; 梯度搜索; 多项式复杂度

**中图分类号:** TP273      **文献标识码:** A

## Algorithms with polynomial complexity for determining the stability of nondeterministic discrete-event systems

SHU Shao-long<sup>1</sup>, LIU Jun<sup>2</sup>

(1. School of Electronics and Information Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. School of Information Science and Engineering, Qingdao Agriculture University, Qingdao Shandong 266109, China)

**Abstract:** The stability of discrete-event systems is studied based on nondeterministic automata/languages. The stability of nondeterministic discrete event systems is re-defined formally according to the definition of the quasi-distance between two states and state-subsets. An effective polynomial algorithm for determining the stability is proposed by investigating the state-pairs of the system.

**Key words:** non-deterministic automata/languages; stability; gradient search; polynomial complexity

### 1 引言(Introduction)

基于自动机/形式语言模型的离散事件系统分析方法<sup>[1~6]</sup>在柔性制造系统、通讯网络、智能交通系统等实际复杂人造系统中得到了广泛的应用. 其中离散事件系统的稳定性研究一直是研究热点. 许多学者曾从不同角度, 采用不同方法对离散事件系统的稳定性进行研究, 到目前为止得到了诸多结果. 文献[7~10]等从状态的角度考虑系统的稳定性. 文献[7]定义稳定性为系统随着事件的发生最终进入某个合法状态子集; 文献[8,9]定义稳定性为系统随着事件的发生周期地经过某个合法状态子集. 不难发现后者是前者条件放松的结论. 文献[10]从系统扰动的观点定义稳定性, 基于自动机/形式语言的离散事件系统状态反馈控制往往需要准确的状态信息, 因此稳定性定义系统在发生有限事件序列, 系统最后到达的状态能否确定的问题. 可以看到该结论是连续变量动态系统的稳定性概念在离散事件系统上的合理扩展. 另外, 文献[11]从语言的角度研究了稳

定性问题. 文献[12]将传统的Lyapunov稳定性理论应用于离散事件系统. 文献[13]在离散事件系统的研究中引入了马尔可夫链方法.

文献[14]进一步研究了非确定离散事件系统的稳定性问题. 基于系统的观测器, 提出了基于梯度的稳定性判定算法. 然而, 因为系统的观测状态跟原系统具有指数关系, 因此所构建的搜索树在最坏情况下具有指数复杂度. 本文期望能够找到一个具有多项式复杂度的稳定性算法.

### 2 非确定离散事件系统及其稳定性(Nondeterministic discrete event systems and stability)

非确定离散事件系统可用下面的非确定自动机模型表示<sup>[15]</sup>:

$$G = (Q, \Sigma, \delta). \quad (1)$$

其中:  $Q$ 为有限离散状态集,  $\Sigma$ 为有限离散事件集,  $\delta: Q \times \Sigma \rightarrow 2^Q$ 为系统转移函数, 其描述了系统的

动态运动过程. 与确定离散事件系统不同的是, 当系统处于某一状态 $q(q \in Q)$ 并发生某事件, 系统发生迁移后的状态不唯一, 而是状态集 $Q$ 的子集. 可以看到, 非确定离散事件系统自身带有不确定性. 事件的发生会导致系统在状态迁移时发生扰动. 定义任意事件序列 $s$ 的前缀事件序列集为 $\text{Pr}(s)$ .

为了后面论述的方便, 对系统转移函数作如下的扩展:

$$(\forall x \subseteq Q)(\exists q \in x)\delta(q, \sigma)! \Rightarrow \delta(x, \sigma)!.$$

并且此时,  $\delta(x, \sigma) = \bigcup_{(\forall q \in x)\delta(q, \sigma)!} \delta(q, \sigma)$ .

在给出系统的稳定性定义之前, 首先给出几个有关距离的定义:

**定义 1** 对于非确定离散事件系统 $G$ , 状态 $q_i$ ,  $q_j$ 和集合 $S_{<q_i, q_j>} = \{s : q_j \in \delta(q_i, s)\}$ , 定义

$$d_{<q_i, q_j>} = \min |s| (s \in S_{<q_i, q_j>}).$$

**定义 2** 对于非确定离散事件系统 $G$ , 状态 $q_i$ 和 $q_j$ 之间的拟距离定义为

$$d(q_i, q_j) = \sqrt{(d_{<q_i, q_j>})^2 + d_{<q_j, q_i>}^2}.$$

状态 $q_i$ 和 $q_j$ 之间的拟距离反映了两个状态之间路径长短.

**定义 3** 对于非确定离散事件系统的状态子集 $x_i \subseteq Q, x_j \subseteq Q$ , 其拟距离定义为

$$d(x_i, x_j) = \begin{cases} \max_{q_i \in x_i, q_j \in x_j} d(q_i, q_j), & \text{如果 } x_i, x_j \neq \phi, \\ \infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

状态子集 $x_i, x_j$ 之间的拟距离反映了两个子集中状态的异同程度.

**定义 4** 对状态子集 $x_i \subseteq Q, x_j \subseteq Q$ , 经过一个事件序列 $t$ 之后的拟距离为

$$d(x_i, x_j, t) = \min_{t' \in \text{Pr}(t)} d(\delta(x_i, t'), \delta(x_j, t')).$$

**定义 5** 对状态子集 $x_i \subseteq Q, x_j \subseteq Q$ , 其经过有限步之后的拟距离为

$$d^N(x_i, x_j) = \max_{|t|=N} d(x_i, x_j, t). \quad (2)$$

不同集合间的拟距离存在如下一些性质:

**定理 1** 对任意状态子集 $x_i \subseteq Q, x_j \subseteq Q$ :

$$(\exists q \in Q)x_i = x_j = \{q\} \iff d(x_i, x_j) = 0.$$

**证** 明显从 $(\exists q \in Q)x_i = x_j = \{q\}$ 可得 $d(x_i, x_j) = 0$ , 而从 $d(x_i, x_j) = 0$ 可知:  $(\forall q_i \in x_i, \forall q_j \in x_j)d(q_i, q_j) = 0$ , 因此可知 $q_i$ 和 $q_j$ 为同一个状态, 从而可知 $(\exists q \in Q)x_i = x_j = \{q\}$ 成立.

**证毕.**

**定理 2**

$$d^0(x_i, x_j) = d(x_i, x_j).$$

**证**  $d^0(x_i, x_j) = d(x_i, x_j, \epsilon) = d(x_i, x_j)$ .

**证毕.**

**定理 3**

$$d^{(N+1)}(x_i, x_j) \leq d^N(x_i, x_j).$$

**证** 笔者知

$$d^N(x_i, x_j) = \max_{|t|=N} d(x_i, x_j, t),$$

$$d^{(N+1)}(x_i, x_j) = \max_{|t|=(N+1)} d(x_i, x_j, t),$$

另可知

$$d(x_i, x_j, t') \leq (\forall t'' \in \text{Pr}(t'))d(x_i, x_j, t''),$$

不难得到上述结论.

**证毕.**

非确定离散事件系统的稳定性定义如下:

**定义 6** 离散事件系统 $G$ 如果满足

$$(\exists n \in N)\forall x_i, x_j \subseteq Q \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d^n(x_i, x_j) = 0, \quad (3)$$

则该离散事件系统是渐近稳定的.

上述定义描述了这样的事实: 对于任意无穷事件序列 $s$ , 如果系统发生了扰动或者迁移的不确定性给系统带来状态的不确定性, 系统不管初始状态如何, 系统的状态输出序列收敛. 因此其与文献[14]中的定义1等价.

**定义 7** 对于非确定离散事件系统 $G$ , 如果存在自然数 $n$ , 当 $|s| > n$ 时,  $(\forall x_i, x_j \subseteq Q)(\forall s \subseteq \Sigma^*) \delta(x_i, s) \neq \phi \wedge \delta(x_j, s) \neq \phi \Rightarrow d^{|s|}(\delta(x_i, s), \delta(x_j, s)) = 0$ , 称此系统具有有限步稳定性.

系统受到扰动时, 具有有限步稳定性的系统总可以在有限步之内消除误差. 不难得到有限步稳定性是一个比渐近稳定性条件要强的定义.

实际上, 对于它们有下面的结论:

**定理 4** 离散事件系统的渐近稳定性与有限步稳定性等价.

**证** 从上面的定义可知 $d_{<q_i, q_j>}$ 代表状态 $q_i$ 到状态 $q_j$ 的最小转换步数, 所以总是取整. 如果 $d_{<q_i, q_j>} \neq 0$ , 则有 $d_{<q_i, q_j>} \geq 1$ . 如果系统是渐近稳定的, 则其满足 $\lim_{|s| \rightarrow \infty} d(\delta(q_i, s), \delta(q_j, s)) = 0$ . 因为 $|Q|$ 是有限的, 因此总存在整数 $M$ , 当 $|s| \geq M$ 时,  $d(\delta(q_i, s), \delta(q_j, s)) < 1$ , 又因为如果 $d_{<q_i, q_j>} \neq 0$ , 则有 $d_{<q_i, q_j>} \geq 1$ . 因此当 $|s| \geq M$ 时, 总有 $d(\delta(q_i, s), \delta(q_j, s)) = 0$ , 即系统是有限步稳定的.

如果系统是有限步稳定的, 自然该系统是渐近稳定的. **证毕.**

因为稳定性定义与文献[14]中的定义1等价, 因此具有相同的稳定性充要条件. 定义观测器<sup>[14]</sup>如下:

$$G_{\text{obs}} = Ac(X, \Sigma, \delta, x_0), \quad (4)$$

可得到如下结论<sup>[14]</sup>:

**定理 5** 非确定离散事件系统  $G$  是稳定的, 当且仅当其观测器  $G_{\text{obs}}$  在状态  $X - X_m$  中不存在闭环路径.

### 3 多项式复杂度稳定性搜索算法(The algorithm with polynomial complexity)

首先定义搜索的最大状态集:

$$Y = \{y_0, y_0 = x_0 = Q\} \cup \{y, y \subset Q \wedge |y| \leq 2\}.$$

定义标记状态集为

$$Y_m = \{y, y \subset Q \wedge |y| = 1\}.$$

对于最大状态集中的任意状态, 其可达状态集为最大状态集的子集, 定义为

$$\xi(y, \sigma) = \begin{cases} \{\delta(x, \sigma)\}, & \text{如果 } |\delta(x, \sigma)| = 1, \\ \{y' : y' \subseteq \delta(x, \sigma)\}, & \text{如果 } |\delta(x, \sigma)| \geq 2, \\ \phi, & \text{否则.} \end{cases}$$

文献[14]中定义的梯度概念这里需要作进一步的扩展:

**定义 8** 任意转换  $(y, \sigma, y')$  的梯度为定义:

$$T(y, \sigma, y') = \frac{|\delta(y', \sigma)| - |\delta(y, \sigma)|}{|\delta(y, \sigma)|}. \quad (5)$$

$|\delta(y, \sigma)|$  的大小反映了系统呆在状态集  $Y - Y_m$  中的能力大小. 不同转换的梯度反映了估计状态  $y$  沿状态  $y'$  方向的状态大小变化情况.

现在可以给出具体的搜索算法:

**Step 1** 起始, 取  $y_0$  为当前搜索状态  $y_c$ , 设置路径状态集为  $Pa = \{\phi\}$ , 任意状态  $y$  的完成转换集为  $T_y$ , 初始设置为  $(\forall y) T_y = \phi$ . 任意状态  $y$  的所有转换集为

$$T = \{(y, \sigma, y') : (\forall \sigma \in \Sigma) (\forall y' \in Y) \xi(y, \sigma) \neq \phi \wedge y' \in \xi(y, \sigma)\}.$$

任意状态  $y$  的可选转换集为:  $T_y^f = T/T_y$ .

**Step 2** 如果当前搜索状态  $y_c$  满足

$$y_c \in Pa \wedge y_c \in Y - Y_m,$$

则搜索结束.

**Step 3** 如果当前搜索状态  $y_c$  满足

$$y_c \in Y_m \vee T_{y_c}^f = \phi,$$

则设置  $Pa \leftarrow Pa/y_c$ , 返回其父状态, 并将其父状态当作当前状态, 返回 Step 2. 如果没有父状态, 则搜索结束.

**Step 4** 计算当前状态的可选状态集  $T_{y_c}^f$  里每个转换的梯度, 然后按照梯度从大到小排序, 选取梯度最大转换  $(y_c, \sigma, y)$ . 设置  $Pa \leftarrow Pa \cup y_c$ ,  $T_y^f \leftarrow T_y^f / (y_c, \sigma, y)$ . 重新定义当前搜索状态  $y_c$  为:  $y_c = y$ . 返

回 Step 2.

根据该算法, 可得到如下的判定定理.

**定理 6** 对于非确定离散事件系统  $G$ , 如果上述搜索算法终止于 Step 2, 则系统是不稳定的; 否则搜索算法终止于 Step 3, 系统是稳定的.

**证** 系统肯定会终止于 Step 2 或者 Step 3. 因为对于每个转换, 该算法只会搜索一次.

先证明第 1 部分. 如果搜索终止于 Step 2, 设搜索完毕时, 该新的搜索状态为  $y$ , 因为其与某个父状态相同, 因此该父状态必经过某事件序列  $s$  到达该状态, 有  $y \in \delta(y, \sigma)$ , 形成一个状态回环:

$$C(y, s) = y \rightarrow^{\sigma_1} y_1 \rightarrow^{\sigma_2} y_2 \rightarrow \dots \rightarrow^{\sigma_{i-1}} y_{i-1} \rightarrow^{\sigma_i} y_i,$$

其中  $y_i = y$ . 因为从状态  $y$  出发,  $s$  可以一直发生, 故从  $y_0$  出发,  $s$  同样地可以一直发生, 因此

$$(\forall n \in N) (\forall v \in \text{Pr}(s)) \delta(y, s^n v) \subseteq \delta(y_0, s^n v).$$

从搜索算法可知状态回环中任意状态  $y_i$  满足  $|y_i| = 2$ , 故

$$(\forall n \in N) (\forall v \in \text{Pr}(s)) \delta(x_0, s^n v) \in X - X_m.$$

考虑到状态子集  $X - X_m$  是有限集合, 易知观测器状态子集  $X - X_m$  中存在状态回环, 根据定理 3 可知系统是不稳定的.

现在证明第 2 部分. 如果观测器状态子集  $X - X_m$  中存在状态回环, 易于验证  $Y - Y_m$  中存在从初始状态  $y_0$  可达的状态回环. 如果系统终止于 Step 3, 则说明没有发现可达状态回环. 进一步说明相应的观测器状态子集  $X - X_m$  中不存在状态回环, 因而系统是稳定的. 证毕.

上述算法中, 系统的搜索状态满足  $|y| \leq 2$ , 有

$$|Y| \leq n + 1 + n(n - 1)/2.$$

因此在空间上具有多项式复杂度  $O(n^2)$ . 对于任意搜索状态, 其可能存在的最大转换数目为

$$|\Sigma| * (n(n - 1)/2).$$

因此整个搜索算法在最坏情况下的最大计算量为

$$|\Sigma| * (n(n - 1)/2) * (n + 1 + n(n - 1)/2),$$

可知计算时间复杂度为  $O(|\Sigma| * n^4)$ .

### 4 应用实例(An example)

这是一个医疗诊断的例子. 由于具体的建模过程阐述较为复杂, 这里不再进行具体的建模解释, 有兴趣的读者可参考文献[14]. 相应的系统模型如图 1. 本文需要解决的问题为: 系统是否稳定? 采用第 4 节的搜索算法可得如图 2 所示搜索树. 该树上的节点状态  $\{q_2, q_4\}, \{q_4\}, \{q_5\}$  为的搜索终止节点状态, 其中

节点状态 $\{q_2, q_4\}$ 为跟其某父节点相同的终止节点状态, 其他节点状态为待搜索节点状态及其父状态. 如果系统存在跟其某父节点相同的终止节点状态, 则搜索完成, 且系统不稳定. 从该搜索树可知, 该系统是不稳定的. 该结论与文献[14]中根据观测器所得结论一致.

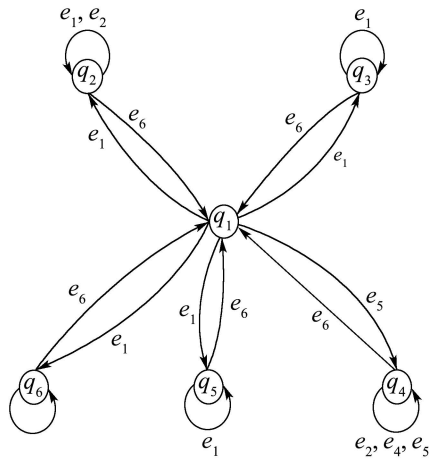


图1 非确定离散事件系统 $G$

Fig. 1 Nondeterministic discrete event system  $G$

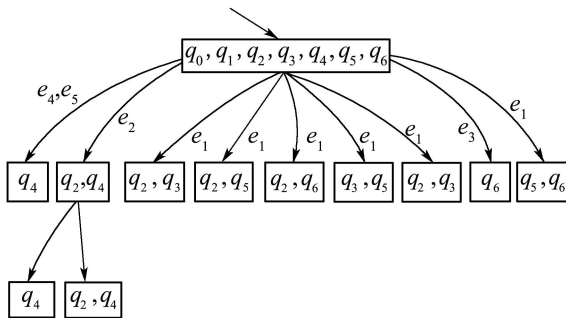


图2 图1所示非确定离散事件系统 $G$ 稳定性搜索树

Fig. 2 The searching tree based on the nondeterministic discrete event system  $G$  in Fig.1

## 5 结论(Conclusion)

本论文是在论文[14]研究的基础上进行的研究结果. 与论文[14]相比, 本文定义了系统不同状态, 不同状态子集的拟距离概念, 在此概念的基础上对非确定离散事件系统的渐近稳定性给出了形式化的定义. 并给出了系统有限步稳定性的定义及其与渐近稳定性的关系. 根据稳定性的充要条件, 提出了系统稳定性的有效多项式判定算法. 与论文[14]基于梯度的算法比较, 该算法具有普适性, 即从本质上可降低系统的计算复杂性, 因此对任何非确定离散事件系统适用.

## 参考文献(References):

- [1] RAMADGE P J, WONHAM W M. Supervisory control of a class of discrete event processes[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1987, 25(1): 206 – 230.
- [2] WONHAM W M, RAMADGE P J. On the supremal controllable sublanguages of a given language[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1987, 25(3): 637 – 659.
- [3] LAFORTUNE S, CHEN E. The infimal closed controllable superlanguage and its application in supervisory control[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(4): 398 – 405.
- [4] CHEN E, LAFORTUNE S. Dealing with blocking in supervisory control of discrete event systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(7): 724 – 735.
- [5] CIESLAK R, DESCLAUX C, FAWAZ A S, et al. Supervisory control of discrete event processes with partial observations[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1988, 33(3): 249 – 260.
- [6] LIN F, WONHAM W M. On observability of discrete event systems[J]. *Information Science*, 1988, 44(2): 173 – 198.
- [7] BRAVE Y. On stabilization of discrete event processes[C] // *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 1989: 2737 – 2743.
- [8] OZVEREN C M, WILSKY A S. Output stabilizability of discrete-event dynamic systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1991, 36(8): 925 – 935.
- [9] OZVEREN C M, WILSKY A S. Observability of discrete event dynamic systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1990, 35(7): 797 – 806.
- [10] 舒少龙, 林峰, 黄志强. 离散事件系统 $N$ 步稳定性分析[J]. *计算机工程与应用*, 2007, 43(7): 17 – 19.  
(SHU Shaolong, LIN Feng, HUANG Zhiqiang.  $N$ -stability of discrete event systems based on automata/Languages[J]. *Computer Engineering and Application*, 2007, 43(7): 17 – 19.)
- [11] KUMAR, GARG, MARCUS. Language stability and stabilizability of discrete event dynamical systems[J]. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 1993, 31(5): 1294 – 1320.
- [12] 俞新贞, 吴澄. 离散事件系统的稳定性[J]. *控制与决策*, 2001, 16(1): 55 – 57, 61.  
(YU Xinzhen, WU Cheng. Stability of discrete event systems[J]. *Control and decision*, 2001, 16(1): 55 – 57, 61.)
- [13] 胡奇英, 刘勇. 离散事件系统静态稳定性的马氏决策过程方法[J]. *应用数学学报*, 2001, 24(3): 377 – 383.  
(HU Qiying, LIU Yong. Markov decision processes methods for static stability of DES[J]. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 2001, 24(3): 377 – 383.)
- [14] 舒少龙, 林峰, 黄志强. 判定非确定离散事件系统稳定性的梯度搜索算法[J]. *控制与决策*, 2008, 23(3): 346 – 348.  
(SHU Shaolong, LIN Feng, HUANG Zhiqiang. Alogrithm analysis for stability of non-deterministic DES[J]. *Control and Decision*, 2008, 23(3): 346 – 348.)
- [15] HEYMANN M, LIN F. Discrete event control of nondeterministic systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1998, 43(1): 3 – 17.

## 作者简介:

舒少龙 (1980—), 男, 讲师, 博士, 任教于同济大学, 主要研究方向为离散事件动态系统和鲁棒控制, E-mail: shushaolong@hotmail.com;

刘君 (1981—), 女, 讲师, 硕士, 任教于青岛农业大学, 主要研究方向为离散事件动态系统和智能控制, E-mail: liujun@hotmail.com.