第 27 卷第 1 期
2010 年 1 月

控 制 理 论 与 应 用
Control Theory & Applications

Vol. 27 No. 1
Jan. 2010

文章编号: 1000−8152(2010)01−0053−06

比例再保险问题的奇异型最优控制模型

袁继红

(北京交通大学 理学院, 北京 100044)

摘要: 在带有股利分配的比例再保险模型的基础上, 加入了债务和破产补偿因素, 建立了比例再保险问题中一类新的奇异型最优随机控制模型.利用随机分析的方法详尽分析了股利分配、债务和破产补偿因素对保险公司准备金的具体影响, 按收益率和偿债率的大小关系得出了不同情形下的最优控制策略及相应的最大收益的显式表达式.

关键词: 比例再保险; 准备金; 奇异型随机控制; 最优控制策略

中图分类号: F830.59　　**文献标识码**: A

Singular optimal control models of proportional reinsurance problem

YUAN Ji-hong

(School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China)

Abstract: Two factors, a constant payment of corporate debts and compensatory payment on the insurance company's bankruptcy, are introduced into a proportional reinsurance model with dividend payment, which generates a new class of singular optimal stochastic control models on proportional reinsurance. Effects of the three factors on the company's reserve fund are analyzed by virtue of the methods of stochastic analysis. Moreover, optimal control policies and the corresponding maximal yields in different cases are obtained in explicit forms according to the different relations between the income rate and the debts paid per year.

Key words: proportional reinsurance; reserve fund; singular stochastic control; optimal control policy

1 引言(Introduction)

所谓比例再保险[1,2], 是指保险公司在签订再保险合同时, 把自己保费收入中的一定比例转让给再保险公司以谋求共同承担风险. 为确保保险公司对投保者的及时、足额赔偿能力, 保险公司从其保费收入中提存一定的准备金. 经典的比例再保险模型由Tomasz等人提出[3], 在此后的近10年中, 基于此模型, 涌现了一系列的研究成果(如: 文献[4 ∼13]等). 其中最引人注目的当属最初于1997年由Højgaard和Taksar提出的带有股利分配过程的比例再保险模型的随机最优控制问题[6], 准备金R_t的变化过程为: $\mathrm{d}R_t = \mu a(t)\mathrm{d}t + \sigma a(t)\mathrm{d}W_t - \mathrm{d}U_t$.

本文将在其基础上增加考虑保险公司的债务和破产补偿因素, 这样, 在拓展既有模型的同时, 也更接近于现实, 从而使得研究更具实际应用价值.

2 系统模型与控制目标(System model and control objective)

设$(\Omega, F, P; F_t)$为一完备概率空间, $W_t, t \geqslant 0$为其上的一维标准布朗运动, $F_t, t \geqslant 0$为由之所生成的上升的自然σ-域族, 表示t时刻为止所获得的决策信息流.

假定某保险公司每年都要偿还固定的债务(如上交总公司的利润、债务摊销、兑付债券等), 年偿债额为$\delta > 0$, 该公司在t时刻的股利分配累积量为U_t, 称为股利分配过程. 设该公司的准备金R_t的初值为$x \geqslant 0$, 则R_t服从下列随机微分方程[3]:

$$\mathrm{d}R_t = \mu a(t)\mathrm{d}t + \sigma a(t)\mathrm{d}W_t - \delta\mathrm{d}t - \mathrm{d}U_t,$$
$$R_0 = x \geqslant 0.$$

其中: $\mu > \delta; \sigma > 0; a(t), t \geqslant 0$为$(F_t)$循序可测过程, 表示该保险公司对保费收入的自留比例, $0 \leqslant a(t) \leqslant 1$; $U_t, t \geqslant 0$为非负、左连续、单调非降的(F_t)循序可测过程, 表示股利分配过程, $U_0 = 0$.

注意: 要求$\mu > \delta$的合理性在于: 如果$\mu \leqslant \delta$, 则最优经营策略是立即把所有的初始资本派发为股利, 并退出市场[8].

满足上述条件的每一过程对$(a(t), U_t), t \geqslant 0$, 称之为一个容许随机控制策略[14], 并记为$\pi = \{\pi_t, t \geqslant$

收稿日期: 2008−10−09; 收修改稿日期: 2009−04−27.
基金项目: 北京交通大学博士生科技创新基金资助项目(04118299).

$0\}$. 而所有这样的容许随机控制策略π的全体, 以Π表示.

以τ_π表示该保险公司的破产时间, 即

$$\tau_\pi = \inf\{t \geqslant 0 : R_t \leqslant 0\}.$$

对容许策略π, 定义收益函数如下:

$$J_\pi(x) = \mathrm{E}[\int_0^{\tau_\pi} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t + \mathrm{e}^{-\alpha\tau_\pi}h(R_{\tau_\pi})].$$

其中: $\alpha > 0$为折扣因子, h为$[0, +\infty)$上的有界、非负函数, 表示破产补偿数额.

记$v(x) = \sup\limits_{\pi\in\Pi} J_\pi(x)$, 并称函数$v$为最大收益函数.

目标: 找到一个最大收益函数v及最优随机控制策略$\pi^*\in\Pi$, 使得

$$J_{\pi*}(x) = \sup_{\pi\in\Pi} J_\pi(x). \tag{1}$$

3 研究结果及证明(Results and proofs)

对函数f, 定义算子L_λ, M和N如下:

$$L_\lambda f = \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2 f'' + (\mu\lambda - \delta)f' - \alpha f, \lambda \in [0, 1],$$

$$Mf = -\frac{\mu\, f'}{\sigma^2 f''}; Nf = \beta\frac{(f'\,)^2}{f''} + \delta f' + \alpha f,$$

其中$\beta = \dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}$.

设$r_1 > 0, r_2 < 0$, 且r_1, r_2满足关于r的方程$\dfrac{1}{2}\sigma^2 r^2 + (\mu - \delta)r - \alpha = 0$.

引理 1 对任何$K > 0, 0 \leqslant x \leqslant K$, 若函数$f_1$, f_2满足Lipschitz条件, 则下述随机微分方程存在唯一解:

1) $0 \leqslant R_t = x + \int_0^t f_1(R_s)\mathrm{d}s + \int_0^t f_2(R_s)\mathrm{d}W_s - U_t \leqslant K$, $t \geqslant 0$;

2) $U = \{U_t, t \geqslant 0\}$,当 $0 \leqslant x \leqslant K$时为连续过程;

3) $\int_0^{+\infty} I_{\{R_t<K\}}\mathrm{d}U_t = 0$, 其中$I_{\{\cdot\}}$为示性函数, 下同.

证 参见文献[15,16]. 下面分$\mu > 2\delta$和$\delta < \mu \leqslant 2\delta$两类情形讨论最优随机控制策略$\pi^*$及最大收益函数$v$.

3.1 $\mu > 2\delta$情形(Case when $\mu > 2\delta$)

引入记号:

$$v_0 = \frac{\mu}{\sigma^2}, u_0 = (\frac{r_1}{v_0 + r_1})^{\frac{r_1}{r_1 - r_2}} \cdot (\frac{r_2}{v_0 + r_2})^{-\frac{r_2}{r_1 - r_2}},$$

$$H = \frac{\mu - 2\delta}{2\alpha}u_0.$$

易知: $\mu > 2\delta$时, $u_0 > 1$.

引理 2 存在$A_1 > 0$及函数v_1, 满足:

1) $Nv_1(y) = 0, y \geqslant 0$;

2) $v_1(0) = 0; v_1(A_1) = H; v_1'(A_1) = u_0; v_1''(A_1) = -u_0 v_0$;

3) $v_1'(y) > 1, y < A_1; v_1''(y) < 0, y \in \mathbb{R}$.

证 见后面的附录部分.

引理 3 设A_1如引理2所述, 则存在$A_2 > A_1$及函数v_2, 满足:

1) $L_1 v_2(y) = 0, y \in \mathbb{R}$;

2) $v_2(A_1) = H; v_2'(A_1) = u_0; v_2''(A_1) = -u_0 v_0$;

3) $v_2(A_2) = \dfrac{\mu - \delta}{\alpha}; v_2'(A_2) = 1; v_2''(A_2) = 0$;

4) $v_2'(y) > 1, y < A_2; v_2''(y) < 0, y < A_2$; $v_2'''(y) > 0, y \in \mathbb{R}$.

证 见后面的附录部分.

下面分$h(0) \in [0, H)$, $h(0) \in [H, \dfrac{\mu - \delta}{\alpha})$和$h(0) \in [\dfrac{\mu - \delta}{\alpha}, +\infty)$3种情况讨论$\mu > 2\delta$时最优随机控制策略$\pi^*$及最大收益函数$v$.

① $h(0) \in [0, H)$.

定理 1 当$h(0) \in [0, H)$时, 必存在函数v及最优随机控制策略$\pi^*\in\Pi$, 使得式(1)成立, 而v为最大收益函数.

证 当$h(0) \in [0, H)$时, 由引理2知: 存在唯一非负数$B_1 < A_1$, 使得$v_1(B_1) = h(0)$.

定义v_3, w及v如下:

$$v_3(y) = y + \frac{\mu - \delta}{\alpha} - A_2, y \in \mathbb{R},$$

$$w(y) = \begin{cases} v_1(y), & y \in (-\infty, A_1); \\ v_2(y), & y \in [A_1, A_2); \\ v_3(y), & y \in [A_2, +\infty). \end{cases}$$

$$v(y) = w(y + B_1), y \in \mathbb{R}.$$

则由引理2和引理3, 知

$$v(y) \geqslant v(0) = h(0), y \geqslant 0;$$
$$1 < v'(y) \leqslant \tilde{Y}(0), y \in [0, A_1 - B_1);$$
$$1 < v'(y) \leqslant u_0, y \in [A_1 - B_1, A_2 - B_1);$$
$$v'(y) = 1, y \geqslant A_2 - B_1;$$
$$v''(y) \leqslant 0, y \in \mathbb{R}.$$

当$y \in [B_1, A_1)$时, 由Y(定义见引理2的证明)的性质及A_1的定义, 知: 必存在唯一的$u > 0$, 使得: $y = Y(u)$, 且$u_0 < u$.

故由v_1定义知: $L_\lambda v_1(y)$的驻点为

$$Mv_1(y)=\frac{\alpha+\beta-v_0\delta}{\alpha+\beta}(\frac{u_0}{u})^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}+\frac{v_0\delta}{\alpha+\beta}<1.$$

从而结合引理2之3), 知

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}L_\lambda v(y)=0, y\in[0,A_1-B_1).$$

当$y\in[A_1,A_2)$时, 由引理3, 知: $L_\lambda v_2(y)$的驻点为$Mv_2(y)\geqslant 1, y\in[A_1,A_2)$.

从而结合引理3之1), 知

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}L_\lambda v(y)=0, y\in[A_1-B_1,A_2-B_1).$$

当$y\geqslant A_2$时,

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}L_\lambda v_3(y)=-\alpha(y-A_2)\leqslant 0.$$

从而有

$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant 1}L_\lambda v(y)\leqslant 0, y\geqslant A_2-B_1.$$

对任意固定的$T>0$, 应用公式Itô[17], 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\alpha(T\wedge\tau_\pi)}v(R_{T\wedge\tau_\pi})-v(x)=\\&\int_0^{T\wedge\tau_\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t}L_{a(t)}v(R_t)\mathrm{d}t+\\&\int_0^{T\wedge\tau_\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sigma a(t)v'(R_t)\mathrm{d}W_t-\\&\int_0^{T\wedge\tau_\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t}v'(R_t)\mathrm{d}U_t+\\&\sum_{0\leqslant t<T\wedge\tau_\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t}[v(R_{t+})-v(R_t)-v'(R_t)(R_{t+}-R_t)].\end{aligned}\tag{2}$$

由Y(定义见引理2的证明)的连续性及v_1的定义, 依据随机积分的性质, 知

$$\mathrm{E}\int_0^t\mathrm{e}^{-\alpha s}\sigma a(s)v'(R_s)\mathrm{d}W_s=0, t\geqslant 0.$$

从而由式(2), 可得

$$v(x)\geqslant\mathrm{E}\int_0^{T\wedge\tau_\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t+\mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\alpha(T\wedge\tau_\pi)}h(0)].\tag{3}$$

1) 当$\tau_\pi<+\infty$时, $R_{\tau_\pi}=0$, 在式(3)两边同时令$T\to+\infty$, 即得:

$$v(x)\geqslant\mathrm{E}[\int_0^{\tau_\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t+\mathrm{e}^{-\alpha\tau_\pi}h(R_{\tau_\pi})]=J_\pi(x).$$

2) 当$\tau_\pi=+\infty$时, 式(3)即为:

$$v(x)\geqslant\mathrm{E}\int_0^T\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t+\mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\alpha T}h(0)].$$

因h在$[0,+\infty)$上有界, 同1)可得

$$\begin{aligned}v(x)\geqslant&\mathrm{E}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t=\\&\mathrm{E}[\int_0^{\tau_\pi}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t+\mathrm{e}^{-\alpha\tau_\pi}h(R_{\tau_\pi})]=J_\pi(x).\end{aligned}$$

综合1)和2), 即得

$$v(x)\geqslant J_\pi(x), x\geqslant 0, \pi\in\varPi.\tag{4}$$

至此可知: 欲证明本定理结论只需再证明: 存在最优随机控制策略$\pi^*\in\varPi$, 使得

$$J_{\pi^*}(x)=v(x), x\geqslant 0.\tag{5}$$

下面分2种情况来证明上述结论:

1) 若$0\leqslant x\leqslant A_2-B_1$, 令

$$\begin{aligned}a^*(t)=&Mv(R_t^*)I_{\{0\leqslant R_t^*<A_1-B_1\}}+\\&I_{\{R_t^*\geqslant A_1-B_1\}}, t\geqslant 0,\end{aligned}$$

则由引理1, 知: 存在连续过程U_t^*, $t\geqslant 0$, 使得: $0\leqslant R_t^*\leqslant A_2-B_1, t\geqslant 0$.

定义控制策略$\pi^*=\{\pi_t^*, t\geqslant 0\}$为: $\pi_t^*=(a^*(t),U_t^*), t\geqslant 0$, 则有$\pi^*\in\varPi$.

对任意固定的$T>0$应用公式Itô, 得:

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\alpha(T\wedge\tau_{\pi^*})}v(R^*_{T\wedge\tau_{\pi^*}})-v(x)=\\&\int_0^{T\wedge\tau_{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\alpha t}L_{a^*(t)}v(R_t^*)\mathrm{d}t+\\&\int_0^{T\wedge\tau_{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\sigma a^*(t)v'(R_t^*)\mathrm{d}W_t-\\&\int_0^{T\wedge\tau_{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\alpha t}v'(R_t^*)\mathrm{d}U_t^*.\end{aligned}\tag{6}$$

又由引理1~3知: $L_{a^*(t)}v(R_t^*)=0$, 而且

$$\int_0^{T\wedge\tau_{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\alpha t}v'(R_t^*)\mathrm{d}U_t^*=\int_0^{T\wedge\tau_{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t^*.$$

故依据引理2和引理3, 与上面的推证类似, 由式(6)可得: $v(x)=J_{\pi^*}(x)$.

2) 若$x\geqslant A_2-B_1$, 则对$t\geqslant 0$, 令

$$\begin{aligned}&a^*(t)=Mv(R_t^*)I_{\{0\leqslant R_t^*<A_1-B_1\}}+I_{\{R_t^*\geqslant A_1-B_1\}},\\&U_t^*=U_t^*(A_2-B_1)+[x-(A_2-B_1)]I_{\{t>0\}}.\end{aligned}$$

定义控制策略$\pi^*=\{\pi_t^*, t\geqslant 0\}$为: $\pi_t^*=(a^*(t),U_t^*), t\geqslant 0$, 则有$\pi^*\in\varPi$. 此时的控制策略是: R_t^*在0时刻发生跳变, 跳至A_2-B_1点, 然后再参照上述1)的证明过程, 原来的初值x现以初值A_2-B_1代替, 以此来构造最优随机控制策略中的$U_t^*(A_2-B_1)$. 显然有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[\int_0^{\tau_{\pi^*}}\mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}U_t^*+\mathrm{e}^{-\alpha\tau_{\pi^*}}h(R^*_{\tau_{\pi^*}})]=\\&x-A_2+B_1+\frac{\mu-\delta}{\alpha}=v(x).\end{aligned}$$

综合上述两种情况1)和2), 可知: 不论受控状态过程R_t的初值$x\geqslant 0$如何取值, 式(5)总成立.

从而由式(4)和式(5)可知: 本定理结论成立.

证毕.

② $h(0)\in[H,\dfrac{\mu-\delta}{\alpha})$.

定理 2 当$h(0)\in[H,\dfrac{\mu-\delta}{\alpha})$时, 必存在函

数v及最优随机控制策略$\pi^* \in \Pi$, 使得式(1)成立, 而v为最大收益函数.

证 当$h(0) \in [H, \dfrac{\mu-\delta}{\alpha})$时, 由引理3知: 在$[A_1, A_2)$中存在唯一的正数$B_2$, 使得$v_2(B_2) = h(0)$.

定义w及v如下:

$$w(y) = \begin{cases} v_2(y), y \in (-\infty, A_2), \\ v_3(y), y \in [A_2, +\infty). \end{cases}$$

$$v(x) = w(x + B_2), x \geqslant 0.$$

则由定理1的证明过程, 可知:

$$v(y) \geqslant v(0) = h(0), y \geqslant 0,$$
$$v'(A_2 - B_2) = 1,$$
$$1 < v'(y) \leqslant u_0, y \in [0, A_2 - B_2),$$
$$v'(y) = 1, y \geqslant A_2 - B_2,$$
$$v''(y) < 0, y \in [0, A_2 - B_2),$$
$$v''(y) = 0, y \geqslant A_2 - B_2,$$
$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant1} L_\lambda v(y) = 0, y \in [0, A_2 - B_2),$$
$$\max_{0\leqslant\lambda\leqslant1} L_\lambda v(y) \leqslant 0, y \geqslant A_2 - B_2.$$

与定理1的证明类似, 可得式(4).

至此可知: 欲证明本定理结论只需再证明: 存在最优随机控制策略$\pi^* \in \Pi$, 使得式(5)成立.

下面分2种情况来证明上述结论:

a) 若$0 \leqslant x \leqslant A_2 - B_2$, 令$a^*(t) = 1, t \geqslant 0$, 则由引理1, 知: 存在连续过程$U_t^*, t \geqslant 0$, 使得: $0 \leqslant R_t^* \leqslant A_2 - B_2, t \geqslant 0$.

定义控制策略$\pi^* = \{\pi_t^*, t \geqslant 0\}$为: $\pi_t^* = (a^*(t), U_t^*), t \geqslant 0$, 则有$\pi^* \in \Pi$, 且类似于定理1可证: π^*为最优随机控制策略, 而v为相应的最大收益函数.

b) 若$x \geqslant A_2 - B_2$, 则令$a^*(t) = 1$,

$$U_t^* = U_t^*(A_2 - B_2) + [x - (A_2 - B_2)] I_{\{t>0\}}, t \geqslant 0,$$

定义控制策略$\pi^* = \{\pi_t^*, t \geqslant 0\}$为: $\pi_t^* = (a^*(t), U_t^*), t \geqslant 0$, 则有$\pi^* \in \Pi$. 此时的控制策略是: R_t^*在0时刻发生跳变, 跳至$A_2 - B_2$点, 然后再参照上述a)的证明过程, 原来的初值x现以初值$A_2 - B_2$代替, 以此来构造最优随机控制策略中的$U_t^*(A_2 - B_2)$. 显然π^*为最优随机控制策略, 而v为相应的最大收益函数. 证毕.

③ $h(0) \in [\dfrac{\mu-\delta}{\alpha}, +\infty)$.

定理 3 当$h(0) \in [\dfrac{\mu-\delta}{\alpha}, +\infty)$时, 必存在函数$v$及最优随机控制策略$\pi^* \in \Pi$, 使得式(1)成立, 而$v$为最大收益函数.

证 定义控制策略$\pi^* = \{\pi_t^*, t \geqslant 0\}$为: $\pi_t^* = (a^*(t), U_t^*), t \geqslant 0$, 其中: $a^*(t) = 1, U_t^* = xI_{\{t>0\}}, t \geqslant 0$, 则有$\pi^* \in \Pi$.

令$v(y) = y + h(0)$, 则有:

$$v(0) = h(0); v(y) \geqslant h(0), y \geqslant 0;$$
$$v'(y) = 1, y \in \mathbb{R};$$
$$v''(y) = 0, y \in \mathbb{R}; L_1 v(y) \leqslant 0, y \geqslant 0.$$

故$\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant1} L_\lambda v(y) \leqslant 0, y \geqslant 0$.

与定理1的证明类似, 可得:

$$v(x) \geqslant J_\pi(x), x \geqslant 0, \pi \in \Pi. \tag{7}$$

另一方面, 有:

$$\mathrm{E}[\int_0^{\tau_{\pi^*}} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d}U_t^* + \mathrm{e}^{-\alpha\tau_{\pi^*}} h(R^*_{\tau_{\pi^*}})] = x + h(0) = v(x), x \geqslant 0. \tag{8}$$

由式(7)和式(8)知本定理结论成立.

3.2 $\delta < \mu \leqslant 2\delta$情形(Case when $\delta < \mu \leqslant 2\delta$)

① $h(0) \in [0, \dfrac{\mu-\delta}{\alpha})$.

引理 4 当$h(0) \in [0, \dfrac{\mu-\delta}{\alpha})$时, 必存在唯一的$A_0 > 0$及函数$v$, 满足:

1) $\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant1} L_\lambda v(y) = 0, y \in [0, A_0)$;

2) $\max\limits_{0\leqslant\lambda\leqslant1} L_\lambda v(y) \leqslant 0, y \geqslant A_0$;

3) $v(0) = h(0); v'(A_0) = 1; v''(A_0) = 0; v''(y) \leqslant 0, y \geqslant 0$.

证 见后面的附录部分.

定理 4 若$h(0) \in [\dfrac{\mu-\delta}{\alpha}, +\infty)$, 则必存在最优控制策略$\pi^* \in \Pi$, 使得式(1)成立, 引理4证明中定义的$v$为相应的最大收益函数.

证 由引理4知: 当$h(0) \in [\dfrac{\mu-\delta}{\alpha}, +\infty)$时, 有

$$v(y) \geqslant h(0), y \geqslant 0;$$
$$v''(y) < 0, y \in [0, A_0);$$
$$v'(y) \geqslant 1, y \geqslant 0.$$

类似于定理1, 可证

$$v(x) \geqslant J_\pi(x), x \geqslant 0, \pi \in \Pi. \tag{9}$$

至此可知: 欲证明本定理结论只需再证明: 存在最优随机控制策略$\pi^* \in \Pi$, 使得:

$$J_{\pi^*}(x) = v(x), x \geqslant 0. \tag{10}$$

下面分2种情况来证明上述结论:

a) 若$0 \leqslant x \leqslant A_0$, 则令$a^*(t)=1, t \geqslant 0$, 由引理1, 可知: 存在连续过程$U^*=\{U_t^*, t \geqslant 0\}$, 使得: $0 \leqslant R_t^* \leqslant A_0, t \geqslant 0$.

令$\pi_t^*=(a^*(t), U_t^*), t \geqslant 0$, 则$\pi^*=\{\pi_t^*, t \geqslant 0\} \in \varPi$, 且与定理1类似可得:

$$v(x)=\mathrm{E}[\int_0^{\tau_{\pi^*}} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d} U_t^*+\mathrm{e}^{-\alpha \tau_{\pi^*}} h(R_{\tau_{\pi^*}}^*)].$$

b) 若$x>A_0$, 则定义$\pi^*=\{\pi_t^*, t \geqslant 0\}$为: $\pi_t^*=(a^*(t), U_t^*), t \geqslant 0$, 其中:

$$a^*(t)=1, U_t^*=U_t^*(A_0)+(x-A_0) I_{\{t>0\}}, t \geqslant 0.$$

即: 在0时刻跳变至A_0, 再参照a)的证明过程, 原初值x现以初值A_0代替, 以此来构造最优控制策略中的$U_t^*(A_0)$. 显然$\pi^* \in \varPi$, 且

$$\mathrm{E}[\int_0^{\tau_{\pi^*}} \mathrm{e}^{-\alpha t} \mathrm{d} U_t^*+\mathrm{e}^{-\alpha \tau_{\pi^*}} h(R_{\tau_{\pi^*}}^*)]= x-A_0+\frac{\mu-\delta}{\alpha}=v(x).$$

综合上述2种情况a)和b), 可知: 不论R_t的初值$x \geqslant 0$如何取值, 式(10)总成立.

由式(9)和式(10)知: 本定理结论成立.

② $h(0) \in [\frac{\mu-\delta}{\alpha},+\infty)$.

定理 5　当$h(0) \in [\frac{\mu-\delta}{\alpha},+\infty)$时, 必存在函数$v$及最优随机控制策略$\pi^* \in \varPi$, 使得式(1)成立, 而$v$为最大收益函数.

证　同定理3的证明.

4 结论(Conclusions)

本文在带有股利分配过程的比例再保险模型的基础上, 补充考虑了保险公司的债务问题和破产补偿因素, 构造了一类包括股利分配过程、偿债过程和破产补偿的新的比例再保险模型, 并利用随机分析中的奇异型最优控制理论, 详尽分析了股利分配、债务和破产补偿因素对保险公司准备金的具体影响, 针对不同的参数得出了不同情形下随机最优控制策略及相应的最大收益函数.

具体说来, 就是: 当收益率μ超过偿债率δ的两倍时, 分别针对$h(0) \in [0, H)$, $h(0) \in [H, \frac{\mu-\delta}{\alpha})$和$h(0) \in [\frac{\mu-\delta}{\alpha},+\infty)$3种情况给出了最优随机控制策略$\pi^*$及最大收益函数$v$; 当收益率$\mu$高于偿债率$\delta$但不超过其两倍时, 则分别针对$h(0) \in [\frac{\mu-\delta}{\alpha},+\infty)$和$h(0) \in [\frac{\mu-\delta}{\alpha},+\infty)$2种情况给出了最优随机控制策略$\pi^*$及最大收益函数$v$.

参考文献(References):

[1] 荣喜民, 张世英. 再保险定价的研究[J]. 系统工程学报, 2001, 16(6): 471 – 474.
(RONG Ximin, ZHANG Shiying. Research on reinsurance pricing[J]. *Journal of Systems Engineering*, 2001, 16(6): 471 – 474.)

[2] SONDERMANN D. Reinsurance in arbitrage-free markets[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1991, 10(3): 191 – 202.

[3] TOMASZ R, HANSPETER S, VOLKER S, et al. *Stochastic Processes for Insurance and Finance*[M]. New York: John Wiley & Sons Ltd, 1998: 14 – 17.

[4] BROWNE S．Optimal investment polices for a firm with a random risk process: exponential utility and minimizing the probability of ruin[J]. *Mathematics of Operations Research*, 1995, 20(4): 937 – 958.

[5] PAULSEN J, GJESSING H K. Optimal choice of dividend barriers for a risk process with stochastic return of investment[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1997, 20(3): 215 – 223.

[6] HØJGAARD B, TAKSAR M. Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models[J]. *Scandinavian Actuarial Journal*, 1998, 2(2): 166 – 180.

[7] HØJGAARD B, TAKSAR M. Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models with transaction costs[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1998, 22(1): 41 – 51.

[8] TAKSAR M I, ZHOU X Y. Optimal risk and dividend control for a company with a debt liability[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1998, 22(1): 105 – 122.

[9] TAKSAR M I. Optimal risk and dividend distribution control models for an insurance company[J]. *Mathematical Methods of Operations Research*, 2000, 51(1): 1 – 42.

[10] CHOULLI T, TAKSAR M, ZHOU X Y. Optimal risk control and dividend distribution for a financial corporation with policy constraints[C] //*Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*, New Jersey: IEEE Press, 2001: 4559 – 4564.

[11] HØJGAARD B, TAKSAR M. Optimal risk control for a large corporation in the presence of returns on investments[J]. *Finance and Stochastics*, 2001, 5(4): 527 – 547.

[12] 杨瑞成, 刘坤会. 考虑借贷过程的比例再保险最优控制模型[J]. 北方交通大学学报, 2003, 27(6): 59 – 62.
(YANG Ruicheng, LIU Kunhui. An optimal control of proportional reinsurance model with borrowing process[J]. *Journal of Northern Jiaotong University*, 2003, 27(6): 59 – 62.)

[13] IRGENS C, PAULSON J. Optimal control of risk exposure, reinsurance and investments for insurance portfolios[J]. *Insurance: Mathematics and Economics*, 2004, 35(1): 21 – 51.

[14] ZHANG L. Optimal financing and dividend control of a corporation with transaction costs[J]. *Control Theory & Applications*, 2004, 21(6): 895 – 900.

[15] LIU K H. The existence and uniqueness of solution for a class of stochastic functional equations on stochastic processes space[J]. *Acta Mathematica Scientia*, 2001, 21(3): 391 – 400.

[16] SHREVE S E, LEHOCZKY J P, GAVER D P. Optimal consumption for general diffusions with absorbing and reflecting barriers[J]. *SIAM on Control and Optimization*, 1984, 22(1): 55 – 75.

[17] KARATZAS I, SHREVE S E. *Brownian Motion and Stochastic Calculus*[M]. 2nd ed.. New York: Springer-Verlag, 1991.

附录 引理2,3,4的证明(Appendix Proofs of the lemmas 2, 3 and 4)

引理2的证明: 令

$$C_1' = \frac{\beta(\frac{\alpha+\beta}{v_0} - \delta)u_0^{\frac{\alpha+\beta}{\beta}}}{(\alpha+\beta)^2},$$

$$C_2' = \frac{\beta\delta}{(\alpha+\beta)^2}\ln C_1' - \frac{\alpha\delta}{(\alpha+\beta)^2} + \frac{\beta\delta}{(\alpha+\beta)^2}\ln\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\delta},$$

$$Y(u) = C_1'u^{-\frac{\alpha+\beta}{\beta}} + C_2' - \frac{\delta}{\alpha+\beta}\ln u,$$

则Y在$(0,+\infty)$上严格单调递减, 从$+\infty$严格递减到$-\infty$, 且有

$$\beta u^2 Y''(u) + (\alpha+2\beta)uY'(u) + \delta = 0, u > 0. \tag{1a}$$

故Y的反函数必存在, 且对任意$\tilde{y} \in \mathbb{R}$, 存在唯一的$u(\tilde{y})$, 使得: $\tilde{y} = Y(u(\tilde{y}))$.

设Y的反函数为$\tilde{Y}$, 令$v_1(y) \triangleq \int_0^y \tilde{Y}(z)\mathrm{d}z, y \in \mathbb{R}$; $F(u) = \beta u^2 Y'(u) + \delta u, u > 0$, 则有

$$\begin{cases} v_1(0) = 0, \\ v_1'(y) = \tilde{Y}(y), y \in \mathbb{R}, \\ v_1'(Y(u)) = u, u > 0, \\ v_1''(Y(u)) = \dfrac{1}{Y'(u)} < 0, u > 0, \\ F(u) \to -\infty (u \to 0), \\ F(u) \to +\infty (u \to +\infty), \\ F'(u) > 0, u > 0. \end{cases} \tag{2a}$$

故有:

$$\begin{cases} v_1''(\tilde{y}) = v_1''(Y(u(\tilde{y}))) < 0, \\ Nv_1(Y(u)) = \beta u^2 Y'(u) + \alpha v_1(Y(u)) + \delta u. \end{cases} \tag{3a}$$

必存在唯一的$\bar{u} > 0$, 使得

$$F(\bar{u}) = \beta \bar{u}^2 Y'(\bar{u}) + \delta \bar{u} = 0. \tag{4a}$$

且由式(1a), 可知

$$Nv_1(Y)\text{在}(0,+\infty)\text{上恒为常数}. \tag{5a}$$

$$Y(\bar{u}) = 0. \tag{5b}$$

由式(2a)、式(4a)及式(5b), 可得

$$Nv_1(Y(\bar{u})) = 0. \tag{6a}$$

由式(5a)和式(6a)知: $Nv_1(Y(u)) = 0, u > 0$.
当然就有: $Nv_1(Y(u(\tilde{y}))) = 0$. 即

$$Nv_1(\tilde{y}) = 0, \tilde{y} \in \mathbb{R}.$$

令$A_1 = Y(u_0)$, 则有

$$v_1'(A_1) = u_0. \tag{7a}$$

由式(3a), 可得

$$v_1'(y) > v_1'(A_1) = u_0 > 1. \tag{8a}$$

其中:

$$\begin{cases} A_1 = \dfrac{\mu - 2\delta}{2(\alpha+\beta)} + \dfrac{\beta\delta}{(\alpha+\beta)^2}\ln\dfrac{\frac{\mu}{2}(\alpha+\beta) - \beta\delta}{\alpha\delta} > 0, \\ v_1''(A_1) = \dfrac{1}{Y'(u_0)} = -u_0 v_0. \end{cases} \tag{9a}$$

由式(7a)和式(9a), 依据本引理结论1) , 可得: $v_1(A_1) = H$. 从而结合式(2a)、(7a)和式(9a), 可知: 本引理结论2)成立.

由式(3a)和式(8a), 可知: 本引理的结论3)成立. 至此, 引理2证毕.

引理3的证明: 令

$$C_1'' = \frac{1 - \frac{\mu - 2\delta}{2\alpha}r_2}{r_1 - r_2}\mathrm{e}^{-r_1 A_1}u_0,$$

$$C_2'' = \frac{\frac{\mu-2\delta}{2\alpha}r_1 - 1}{r_1 - r_2}\mathrm{e}^{-r_2 A_1}u_0, v_2(y) = C_1''\mathrm{e}^{r_1 y} + C_2''\mathrm{e}^{r_2 y},$$

则: $C_1'' > 0, C_2'' < 0$, 结论中的1) 成立, 且v_2''在$\mathbb{R}$上严格单调递增.

令$A_2 = \dfrac{\ln\frac{r_2(v_0+r_1)}{r_1(v_0+r_2)}}{r_1 - r_2} + A_1$, 则有:

$$v_2''(y) < v_2''(A_2) = 0, y < A_2.$$

经计算知: 其它结论也成立. 证毕.

引理4的证明: 记$C_1 = \dfrac{r_2}{r_1(r_2 - r_1)}, C_2 = \dfrac{r_1}{r_2(r_1 - r_2)}$, 则方程$C_1\mathrm{e}^{-r_1 y} + C_2\mathrm{e}^{-r_2 y} = h(0)$在$(0, \dfrac{2}{r_1 - r_2}\ln|\dfrac{r_2}{r_1}|)$内有唯一实根, 记为$A_0$. 令

$$v(y) = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^{r_1(y - A_0)} + C_2\mathrm{e}^{r_2(y - A_0)}, y \in (-\infty, A_0), \\ y + \dfrac{\mu - \delta}{\alpha} - A_0, \quad y \in [A_0, +\infty). \end{cases}$$

则本引理结论中的2), 3)显然成立, 且有$v'(y) > 0, y \in [0, A_0)$.

故有: $v(y) \geqslant v(0) = h(0), y \in [0, A_0)$.

易知: $Mv(y) \geqslant 1, y \in [0, A_0)$. 故有:

$$\max_{0 \leqslant \lambda \leqslant 1} L_\lambda v(y) = 0, y \in [0, A_0).$$

即本引理结论中的1)成立. 证毕.

作者简介:

袁继红 (1971—), 男, 博士研究生, 工程师, 目前研究方向为随机控制、金融工程, E-mail: xiaoyuanlaoshi@163.com.