

具有时变输入与状态时滞的Markov跳变系统鲁棒 H_∞ 控制

刘健辰, 章 兢

(湖南大学 电气与信息工程学院, 湖南 长沙 410082)

摘要: 研究一类同时具有时变输入和状态时滞的不确定Markov跳变系统的时滞相关鲁棒 H_∞ 控制问题. 采用新的Lyapunov-Krasovskii泛函, 基于积分不等式方法, 使所得结果具有较小的保守性. 避免对时变时滞变化率等的限制. 控制器可以通过锥补线性化方法求解. 数值算例显示所提出方法的有效性.

关键词: Markovian跳变系统; 时滞; 积分不等式方法; 锥补线性化

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Robust H-infinity control for Markovian jump systems with time-varying time-delay in input and state

LIU Jian-chen, ZHANG Jing

(College of Electrical and Information Engineering, Hunan University, Changsha Hunan 410082, China)

Abstract: The delay-dependent robust H-infinity control for a class of uncertain Markovian jump linear systems with time-varying time-delay in input and state is studied. Since we employ in the study the new Lyapunov-Krasovskii functional and the integral-inequality method, the obtained results are less conservative. The constraints on the changing rate of the time-delay in the existing literature are avoided in our results. The controller can be solved by the cone complementary linearization method. Numerical examples show the effectiveness of the proposed approach.

Key words: Markovian jump system; time-delay; integral-inequality method; cone complementary linearization

1 引言(Introduction)

近年来, 时滞Markov跳变系统的分析和设计问题引起了大量的关注^[1~7]. 其中, 时滞相关结果^[2~7]具有更小的保守性, 因此更具研究意义. 但是, 文献[2]使用了模型变换和交叉项定界技术, 文献[3~5]引入了一些松弛变量, 这使所得结果具有较大的保守性, 并增加了求解变量数目, 从而影响了求解效率. 另外需要注意的是, 文献[1~5]都是针对状态时滞的, 目前还较少研究具有输入时滞的情况. 无记忆控制器^[6]的设计和实现都比有记忆控制器^[7]简单得多, 但是文献[6]中要求系统的状态时滞与输入时滞完全相同, 且时滞变化率小于1, 这些要求一般是难以满足的, 从而大大缩小了该方法的适用范围.

本文基于积分不等式方法^[8]研究同时具有输入和状态时滞的不确定Markov跳变系统的鲁棒 H_∞ 控制问题. 其中, 系统的输入时滞和状态时滞均是时变的, 并且两者可以不同; 对于时变时滞变化率去除了小于1的限制.

2 问题描述(Problem statement)

考虑如下不确定Markov跳变系统:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = [A(r_t) + \Delta A(r_t, t)]x(t) + [A_d(r_t) + \Delta A_d(r_t, t)]x(t - d_1(t)) + [B(r_t) + \Delta B(r_t, t)]u(t) + [B_d(r_t) + \Delta B_d(r_t, t)]u(t - d_2(t)) + B_\omega(r_t)\omega(t), \\ z(t) = C(r_t)x(t) + C_d(r_t)x(t - d_1(t)) + D(r_t)u(t) + D_d(r_t)u(t - d_2(t)) + D_\omega(r_t)\omega(t), \\ x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\max\{h_1, h_2\}, 0]. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ 和 $z(t) \in \mathbb{R}^r$ 分别是系统的状态、控制输入和输出向量; $\omega(t) \in \mathbb{R}^q$ 为 $L_2[0, \infty)$ 上的扰动输入, $L_2[0, \infty)$ 代表平方可积向量函数空间. $\varphi(t)$ 为连续初始函数; $r_t = r(t)$ 为系统模态, 是取值于有限集合 $S = \{1, \dots, s\}$ 上的齐次Markov过程, 其转移概率为

$$P[r_{t+h} = j | r_t = i] = \begin{cases} \pi_{ij}h + O(h), & i \neq j, \\ 1 + \pi_{ii}h + O(h), & i = j. \end{cases}$$

其中 π_{ij} 是从模态 i 到模态 j 的转移速率, 当 $i \neq j$ 时,

$\pi_{ij} > 0$, 并有

$$\pi_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \pi_{ij}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{O(h)}{h} = 0.$$

$\Delta A(r_t, t)$ 等描述系统时变不确定性, 具有以下形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta A_d & \Delta B & \Delta B_d \end{bmatrix} = \\ H(r_t)F(t) \times [E_1(r_t) \ E_2(r_t) \ E_3(r_t) \ E_4(r_t)], \quad (2)$$

其中: $H(r_t)$ 和 $E_j(r_t)$ ($j = 1, 2, 3, 4$)为适当维数的常数矩阵, $F(t)$ 为未知时变矩阵, 且满足

$$F^T(t)F(t) \leq I, \forall t, \quad (3)$$

$d_1(t)$ 和 $d_2(t)$ 为时变有界时滞, 满足

$$\begin{aligned} 0 \leq d_1(t) \leq h_1, \quad 0 \leq d_2(t) \leq h_2, \\ \dot{d}_1(t) \leq \mu_1, \quad \dot{d}_2(t) \leq \mu_2. \end{aligned} \quad (4)$$

为了简化叙述, 将 $A(r_t = i)$ 记为 A_i , 其他矩阵类推.

定义 1^[9] 当 $u(t) = 0$ 时, 如果对于任意 $\varphi(t)$ 和 $r_0 \in S$ 有

$$E\left\{\int_0^\infty \|x(t, \varphi(t), r_0)\|^2 dt\right\} < \infty \quad (5)$$

成立, 则称标称系统(1)($F(t) = 0$)为均方渐近稳定的, 简称渐近稳定. 其中: $\|\cdot\|$ 表示向量的欧氏范数, $E\{\cdot\}$ 表示数学期望.

定义 2 给定标量 $\gamma > 0$, 如果存在无记忆状态反馈控制器

$$u(t) = K_i x(t) \quad (6)$$

使得对于任意 $x_0, r_0 \in S$ 和任意容许的系统不确定性(2), 闭环系统均渐近稳定且有

$$E\left\{\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt\right\} \leq \gamma^2 \left[\int_0^\infty \omega^T(t)\omega(t)dt\right], \quad (7)$$

则系统(1)称为鲁棒稳定且具 H_∞ 范数界, 对应的控制器称为鲁棒 H_∞ 控制器.

在得出本文主要结果之前, 首先给出如下引理.

引理 1^[8] 设向量函数 $\dot{x}(\cdot) : [-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ —阶连续可微, 则对于任意矩阵 $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^n$ 和 $0 \leq X = X^T \in \mathbb{R}^n$, 有如下积分不等式:

$$\begin{aligned} & - \int_{t-h}^t \dot{x}^T(s)X\dot{x}(s)ds \leq \\ & \eta^T(t) \begin{bmatrix} M_1^T + M_1 & -M_1^T + M_2 \\ * & -M_2^T - M_2 \end{bmatrix} \eta(t) + \\ & h\eta^T(t)[M_1 \ M_2]^T X^{-1}[M_1 \ M_2]\eta(t), \end{aligned} \quad (8)$$

其中 $\eta(t) = [x^T(t) \ x^T(t-h)]^T$.

引理 2^[10] 给定适当维数的矩阵 $Z^T = Z, E, \Delta$ 和 F , 且 Δ 满足 $\Delta^T \Delta \leq I$, 则

$$Z + E\Delta F + F^T \Delta^T E^T < 0$$

成立的充要条件是存在一个正数 $\varepsilon > 0$ 使得

$$Z + \varepsilon EE^T + \varepsilon^{-1} F^T F < 0$$

成立.

3 镇定和鲁棒镇定(Stabilization and robust stabilization)

首先, 考虑如下标称闭环系统的时滞相关渐近稳定条件:

$$\dot{x} = A_{Ki}x + A_{di}x(t-d_1) + B_{Ki}x(t-d_2), \quad (9)$$

其中:

$$A_{Ki} = A_i + B_i K_i, \quad B_{Ki} = B_{di} K_i.$$

定理 1 对于给定的 h_k 和 μ_k , 如果存在正定对称矩阵 $X_i, \bar{Q}_{ki}, \bar{S}_{ki}, \bar{R}_k$ 和矩阵 $Y_i, \bar{M}_{1ki}, \bar{M}_{2ki}$ ($k = 1, 2, i \in S$)使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{aligned} \Psi_i = & \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_i & \Psi_{12i} & \Psi_{13i} & h_1 \bar{\Gamma}_{2i}^T & h_2 \bar{\Gamma}_{3i}^T & h_1 \bar{\Gamma}_{4i}^T & h_2 \bar{\Gamma}_{5i}^T \\ * & \Psi_{22i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \Psi_{33i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & -h_1 J_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h_2 J_{2i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h_1 J_{1i} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -h_2 J_{2i} \end{bmatrix} < 0, \end{aligned} \quad (10)$$

其中:

$$\bar{\Xi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_{11i} & \bar{\Xi}_{12i} & \bar{\Xi}_{13i} & \bar{\Xi}_{14i} & \bar{\Xi}_{15i} & W_i^T \\ * & \bar{\Xi}_{22i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Xi}_{33i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Xi}_{44i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & \bar{\Xi}_{55i} & 0 \\ * & * & * & * & * & -U_i \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \bar{\Xi}_{11i} = & A_i X_i + B_i Y_i + X_i A_i^T + Y_i^T B_i^T + \pi_{ii} X_i + \\ & \sum_{k=1}^2 2(\bar{M}_{1ki}^T + \bar{M}_{1ki}) + \sum_{k=1}^2 \bar{Q}_{ki} + \sum_{k=1}^2 \bar{S}_{ki}, \end{aligned}$$

$$\bar{\Xi}_{12i} = A_{di} X_i - \bar{M}_{11i}^T + \bar{M}_{21i},$$

$$\bar{\Xi}_{22i} = -(1 - \mu_1) \bar{Q}_{1i} - \bar{M}_{21i}^T - \bar{M}_{21i},$$

$$\bar{\Xi}_{13i} = B_{di} Y_i - \bar{M}_{12i}^T + \bar{M}_{22i},$$

$$\bar{\Xi}_{33i} = -(1 - \mu_2) \bar{Q}_{2i} - \bar{M}_{22i}^T - \bar{M}_{22i},$$

$$\bar{\Xi}_{14i} = -\bar{M}_{11i}^T + \bar{M}_{21i}, \quad \bar{\Xi}_{15i} = -\bar{M}_{12i}^T + \bar{M}_{22i},$$

$$\bar{\Xi}_{44i} = -\bar{S}_{1i} - \bar{M}_{21i}^T - \bar{M}_{21i},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\Sigma}_{55i} &= -\bar{S}_{2i} - \bar{M}_{22i}^T - \bar{M}_{22i}, \\
\Psi_{12i} &= 2h_1 \bar{\Gamma}_{1i}^T, \Psi_{22i} = -2h_1 \bar{R}_1, \Psi_{13i} = 2h_2 \bar{\Gamma}_{1i}^T, \\
\Psi_{33i} &= -2h_2 \bar{R}_2, J_{ki} = X_i \bar{R}_k^{-1} X_i, \\
\bar{\Gamma}_{1i} &= [A_i X_i + B_i Y_i \quad A_{di} X_i \quad B_{di} Y_i \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\
\bar{\Gamma}_{2i} &= [\bar{M}_{11i} \quad \bar{M}_{21i} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\
\bar{\Gamma}_{3i} &= [\bar{M}_{12i} \quad 0 \quad \bar{M}_{22i} \quad 0 \quad 0 \quad 0], \\
\bar{\Gamma}_{4i} &= [\bar{M}_{11i} \quad 0 \quad 0 \quad \bar{M}_{21i} \quad 0 \quad 0], \\
\bar{\Gamma}_{5i} &= [\bar{M}_{12i} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \bar{M}_{22i} \quad 0], \\
W_i &= \\
[\sqrt{\pi_{i1}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\pi_{ii-1}} X_i \quad \sqrt{\pi_{ii+1}} X_i \quad \cdots \quad \sqrt{\pi_{is}} X_i], \\
U_i &= \text{diag}\{X_1 \quad \cdots \quad X_{i-1} \quad X_{i+1} \quad \cdots \quad X_s\},
\end{aligned}$$

则闭环系统(9)渐近稳定, 且镇定控制器增益 $K_i = Y_i X_i^{-1}$.

证 考虑如下Lyapunov-Krasovskii泛函:

$$\begin{aligned}
V(x_t, i) &= \\
x^T P_i x &+ \sum_{k=1}^2 \int_{t-d_k}^t x^T(s) Q_k x(s) ds + \\
\sum_{k=1}^2 \int_{t-h_k}^t x^T(s) S_k x(s) ds &+ \\
\sum_{k=1}^2 \int_{-h_k}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}^T(s) (2R_k) \dot{x}(s) ds d\theta. \quad (11)
\end{aligned}$$

假设在 t 时刻有 $r_t = i \in S$, 对 $V(x_t, i)$ 取弱无穷小算子 $\mathcal{L}[\cdot]$ ^[9], 则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[V(x_t, i)] &= \\
2x^T P_i \dot{x} &+ x^T \left(\sum_{j \in S} \pi_{ij} P_j \right) x + \sum_{k=1}^2 [x^T Q_k x - \\
(1 - d_k) x^T(t - d_k) Q_k x(t - d_k)] &+ \\
\sum_{k=1}^2 [x^T S_k x - x^T(t - h_k) S_k x(t - h_k)] &+ \\
\sum_{k=1}^2 [2h_k \dot{x}^T R_k \dot{x} - \int_{t-h_k}^t \dot{x}^T(s) (2R_k) \dot{x}(s) ds]. \quad (12)
\end{aligned}$$

根据引理1, 对于任意矩阵 $M_{1ki}, M_{2ki} (k = 1, 2, i \in S)$, 有

$$\begin{aligned}
& - \int_{t-h_k}^t \dot{x}^T(s) (2R_k) \dot{x}(s) ds \leq \\
& - \int_{t-d_k}^t \dot{x}^T(s) R_k \dot{x}(s) ds - \\
& \int_{t-h_k}^t \dot{x}^T(s) R_k \dot{x}(s) ds \leq \\
& \zeta_{1k}^T \begin{bmatrix} M_{1ki}^T + M_{1ki} & -M_{1ki}^T + M_{2ki} \\ * & -M_{2ki}^T - M_{2ki} \end{bmatrix} \zeta_{1k} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& h_k \zeta_{1k}^T \begin{bmatrix} M_{1ki}^T \\ M_{2ki}^T \end{bmatrix} R_k^{-1} [M_{1ki} \quad M_{2ki}] \zeta_{1k} + \\
& \zeta_{2k}^T \begin{bmatrix} M_{1ki}^T + M_{1ki} & -M_{1ki}^T + M_{2ki} \\ * & -M_{2ki}^T - M_{2ki} \end{bmatrix} \zeta_{2k} + \\
& h_k \zeta_{2k}^T \begin{bmatrix} M_{1ki}^T \\ M_{2ki}^T \end{bmatrix} R_k^{-1} [M_{1ki} \quad M_{2ki}] \zeta_{2k}, \quad (13)
\end{aligned}$$

其中:

$$\zeta_{1k} = [x^T \quad x^T(t - d_k)]^T, \quad \zeta_{2k} = [x^T \quad x^T(t - h_k)]^T.$$

利用式(13), 经过整理, 由定义1知, 如果 $L[V(x_t, i)] < 0 (\forall x(t) \neq 0)$ 成立, 则闭环系统(9)渐近稳定. 由于篇幅有限, 证明过程从略. 证毕.

注 1 定理1不需要假设矩阵对 (A_i, B_i) 或 $(A_i + A_{di}, B_i)$ 是否能控或能稳, 只要式(10)的可行解存在, 就可以找到使原系统渐近稳定的控制器.

注 2 定理1的证明中使用了不等式

$$- \int_{t-h_k}^t \dot{x}^T(s) R_k \dot{x}(s) ds \leq - \int_{t-d_k}^t \dot{x}^T(s) R_k \dot{x}(s) ds,$$

这样可避免式(10)的对角线上出现单独的 $-(1 - \mu_k) Q_k$ 项, 从而去除了 $\mu_k < 1$ 的限制, 但这将增加额外的保守性.

接下来, 由引理2, 可得如下的系统(1)鲁棒镇定时滞相关条件.

定理 2 对于给定的 h_k 和 μ_k , 如果存在正定对称矩阵 $X_i, \bar{Q}_{ki}, \bar{S}_{ki}, \bar{R}_k$ 和矩阵 $Y_i, \bar{M}_{1ki}, \bar{M}_{2ki}$, 以及标量 $\varepsilon_i > 0 (k = 1, 2, i \in S)$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \Psi_i & \varepsilon_i \bar{H}_i & \bar{E}_i^T \\ * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (14)$$

其中:

$$\begin{aligned}
\bar{H}_i &= [H_i^T \quad 0 \quad h_1 H_i^T \quad h_2 H_i^T \quad 0]^T, \\
\bar{E}_i &= [E_{1i} X_i + E_{3i} Y \quad E_{2i} X_i \quad E_{4i} Y_i \quad 0],
\end{aligned}$$

则闭环系统(1)鲁棒稳定, 且相应的鲁棒镇定控制器增益 $K_i = Y_i X_i^{-1}$.

4 鲁棒H_∞控制(Robust H_∞ control)

本节将进一步考虑鲁棒H_∞控制器设计问题.

定理 3 对于给定的 h_k, μ_k 和 $\gamma > 0$, 如果存在正定对称矩阵 $X_i, \bar{Q}_{ki}, \bar{S}_{ki}, \bar{R}_k$ 和矩阵 $Y_i, \bar{M}_{1ki}, \bar{M}_{2ki}$, 以及标量 $\varepsilon_i > 0 (k = 1, 2, i \in S)$, 使得如下矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \bar{\Psi}_i & \varepsilon_i \tilde{H}_i & \tilde{E}_i^T \\ * & -\varepsilon_i I & 0 \\ * & * & -\varepsilon_i I \end{bmatrix} < 0, \quad (15)$$

其中:

$$\bar{\Psi}_i = \begin{bmatrix} \bar{\Xi}_i & \bar{T}_i & \Psi_{12i} & \Psi_{13i} & h_1 \bar{\Gamma}_{2i}^T & h_2 \bar{\Gamma}_{3i}^T & h_1 \bar{\Gamma}_{4i}^T & h_2 \bar{\Gamma}_{5i}^T \\ * & \bar{\Psi}_{22i} & \bar{\Psi}_{23i} & \bar{\Psi}_{24i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \bar{\Psi}_{22i} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & \bar{\Psi}_{33i} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -h_1 J_{1i} & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & -h_2 J_{2i} & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * & * & -h_1 J_{1i} & 0 \\ * & * & * & * & * & * & * & -h_2 J_{2i} \end{bmatrix},$$

$$\bar{\Psi}_{22i} = D_{\omega i}^T D_{\omega i} - \gamma^2 I, \bar{\Psi}_{23i} = 2h_1 B_{\omega i}^T,$$

$$\bar{T}_i = [B_{\omega i}^T + D_{\omega i}^T (C_i X_i + D_i Y_i) \quad D_{\omega i}^T C_{di} X_i \quad D_{\omega i}^T D_{di} Y_i \quad 0]^T,$$

$$\bar{\Psi}_{24i} = 2h_2 B_{\omega i}^T,$$

$$\tilde{H}_i = [H_i^T \quad 0 \quad 2h_1 H_i^T \quad 2h_2 H_i^T \quad 0]^T,$$

$$\tilde{E}_i = [E_{1i} X_i + E_{3i} Y \quad E_{2i} X_i \quad E_{4i} Y_i \quad 0],$$

则闭环系统(1)鲁棒稳定且具 H_∞ 范数界, 相应的鲁棒 H_∞ 控制器增益 $K_i = Y_i X_i^{-1}$.

注 3 对于给定的扰动抑制水平 $\gamma > 0$, 通过求解式(15), 可以得到系统(1)的鲁棒 γ -次优 H_∞ 控制器. 进一步, 在约束条件: 式(15), $X_i > 0$, $\bar{Q}_{ki} > 0$, $\bar{S}_{ki} > 0$, $\bar{R}_{ki} > 0$ 和 $\varepsilon_i > 0$ 下, 最小化: γ^2 , 可以得到系统(1)的鲁棒最优 H_∞ 控制器, 相应的最小扰动抑制水平为 $\gamma_{\min}$.

由定理3, 很容易得到如下仅存状态时滞的标称Markov跳变系统的有界实引理(BRL).

推论 1 对于给定的 h_1 , μ_1 和 $\gamma > 0$, 如果存在正定对称矩阵 P_i , Q , S 和 R 使得如下LMIs:

$$\begin{bmatrix} \Theta_i & N_i & 2h_1 A_{1i}^T R & h_1 A_{2i}^T & h_1 A_{3i}^T \\ * & \bar{\Psi}_{i22} & 2h_1 B_{\omega i}^T R & 0 & 0 \\ * & * & -2h_1 R & 0 & 0 \\ * & * & * & -h_1 R & 0 \\ * & * & * & * & -h_1 R \end{bmatrix} < 0$$

成立, 则仅存状态时滞的无输入标称Markov跳变系统(1)渐近稳定且具 H_∞ 范数界 γ . 其中:

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} \Upsilon_i & P_i A_{di} - M_{1i}^T + M_{2i} & -M_{1i}^T + M_{2i} \\ * & -(1 - \mu_1)Q - M_{2i}^T - M_{2i} & 0 \\ * & * & -S - M_{2i}^T - M_{2i} \end{bmatrix},$$

$$N_i = [B_{\omega i}^T P_i + D_{\omega i}^T C_i \quad D_{\omega i}^T C_{di} \quad 0]^T,$$

$$\Upsilon_i = P_i A_i + A_i^T P_i + \left(\sum_{j \in S} \pi_{ij} P_j \right) +$$

$$2(M_{1i}^T + M_{1i}) + Q + S,$$

$$A_{1i} = [A_i \quad A_{di} \quad 0], \quad A_{2i} = [M_{1i} \quad M_{2i} \quad 0],$$

$$A_{3i} = [M_{1i} \quad 0 \quad M_{2i}].$$

注 4 本文采用方法的优点在于既可以引入较少的求解变量, 又可以使所得结果具有较小的保守性. 以推论1为例, 文献[5]和本文需要求解的变量个数分别为 $n(n+1)(2s+1)/2 + sn^2$ 和 $n(n+1)(s+3)/2$. 当 $n=2$, $s=2$ 时, 这两个数目将分别为23和15, 而随着 n 和 s 的增大, 本文计算效率的优势将更加明显. 而后文给出的数值算例, 也将表明本文的结果比文献[5]具有更小的保守性.

5 控制器迭代求解算法(Controller iteration solving algorithms)

在式(10)(14)和(15)中都含有非线性项 $X_i \bar{R}_k^{-1} X_i$, 这使得定理1、定理2和定理3都是非凸优化问题. 下面以定理1为例, 给出相应的基于锥补线性化^[11]的迭代求解算法. 而对于注3中的鲁棒最优 H_∞ 控制器设计问题, 需要在算法1中固定 h_1 和 h_2 , 最小化 γ^2 .

算法 1(固定 h_2 , 最大化 h_1)

Step 1 给定 h_2 , 设 $l=0$, $h_1^l=0$. 定义

$$V_{1i} = \{X_i, \tilde{X}_i, \bar{R}_{ki}, \tilde{R}_{ki}, J_{ki}, \tilde{J}_{ki}\},$$

$$V_{2i} = \{\bar{Q}_{ki}, \bar{S}_{ki}, Y_i, \bar{M}_{1ki}, \bar{M}_{2ki}\} (k=1, 2, i \in S),$$

求解满足约束(10)和

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_{ki} & \tilde{X}_i \\ \tilde{X}_i & \tilde{R}_{ki} \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} J_{ki} & I \\ I & \tilde{J}_{ki} \end{bmatrix} \geq 0, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} X_i & I \\ I & \tilde{X}_i \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} \bar{R}_{ki} & I \\ I & \tilde{R}_{ki} \end{bmatrix} \geq 0$$

的可行解 $\{V_{1i}^0, V_{2i}^0\}$. 其中, 约束(10)中的 J_{ki} 不要替换成 $X_i \bar{R}_k^{-1} X_i$.

Step 2 对 $\{V_{1i}, V_{2i}\}$ 最小化:

$$\text{tr}(X_i^l \tilde{X}_i + \tilde{X}_i^l X_i + \sum_{k=1}^2 J_{ki}^l \tilde{J}_{ki} + \tilde{J}_{ki}^l J_{ki} + \bar{R}_{ki}^l \tilde{R}_{ki} + \tilde{R}_{ki}^l \bar{R}_{ki}),$$

约束条件: 式(10)和(16). 令 $V_{1i}^{l+1} = V_{1i} (i \in S)$.

Step 3 如果Step 2的解满足式(9), 则 $h_1^{l+1} = h_1^l + \Delta h$, 并返回Step 1. 其中 Δh 为迭代步长.

Step 4 如果 $l \geq l_{\max}$, 则终止迭代, 其中 $l_{\max}$ 为最大迭代数; 否则, 令 $l = l + 1$, 返回Step 2.

6 数值算例(Numerical example)

例 1 考虑文献[5]中的例2, 参数见文献[5], 本文省略.

设 $\mu_1 = 0$, 对于给定的 $\gamma > 0$, 求解推论1可得保证系统渐近稳定的最大 h_1 . 对不同 γ 的比较结果见

表1. 由表1可见, 本文中的推论1比文献[2, 5]中的结果具有更小的保守性.

表1 对不同 γ 的最大 h_1
Table 1 Maximum h_1 for different γ

γ	0.5	1	1.5	2
文献[2]所得最大 h_1	0.1843	0.2019	0.2069	0.2092
文献[5]所得最大 h_1	0.4156	0.4739	0.4926	0.5022
本文所得最大 h_1	0.9804	1.5359	2.0067	2.4286

例2 考虑一个2-模态跳变系统(1), 参数如下:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}, A_{d1} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.5 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{d1} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}, A_{d2} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.5 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{d2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$E_{11} = [0 \ 0.01], E_{21} = [0 \ 0.01],$$

$$E_{31} = 0.01, E_{41} = 0.02, C_1 = [1 \ 2],$$

$$C_{d1} = [1 \ 2], D_1 = 1, D_{d1} = 1, D_{\omega 1} = 0,$$

$$E_{12} = [0.01 \ 0], E_{22} = [0.01 \ 0], E_{32} = 0.02,$$

$$E_{42} = 0.01, C_2 = [2 \ 1], C_{d2} = [2 \ 1],$$

$$D_2 = 2, D_{d2} = 1, D_{\omega 2} = 0.$$

$$\text{转移概率矩阵 } \Pi = \begin{bmatrix} -0.6 & 0.6 \\ 0.4 & -0.4 \end{bmatrix}.$$

首先考虑标称系统的镇定问题. 容易验证: 矩阵对 (A_i, B_i) 和 $(A_i + A_{di}, B_i)$ 都是不能稳的. 但是设

$$h_2 = 0.1, \mu_1 = \mu_2 = 1.1, l_{\max} = 100,$$

利用定理1和算法1可解得使系统镇定的最大 $h_1 = 1.35$ 以及相应的控制器增益:

$$K_1 = [-4.3091 \ 21.4516],$$

$$K_2 = [-4.0042 \ 19.7035].$$

设初始状态为

$$x_0 = (1, -1)^T, x(t) = 0 (\forall t < 0), r_0 = 1,$$

使用MATLAB/Simulink进行仿真, 可得标称闭环系统的模态与状态轨迹如图1(a)和(b)所示. 其中, 时变时滞设为

$$d_k(t) = h_k(\sin a_k t + 1)/2,$$

$$a_k = 2\mu_k/h_k (k = 1, 2),$$

这样可以保证时变时滞满足式(4).

从图1(b)可以看出, 得到的控制器能确保系统状态趋于零. 但是, 如果去掉时滞控制输入项 $B_{di}u(t - d_i(t))$, 闭环系统将不再稳定(如图1(c)所示). 由此可以明确看出: 由于输入时滞项引入了更多的系统状态信息, 达到了对系统更为有效的控制. 下面, 由定理3和算法1, 求得对不同 γ , 系统存在鲁棒 γ -次优 H_∞ 控制器的最大 h_1 (见表2).

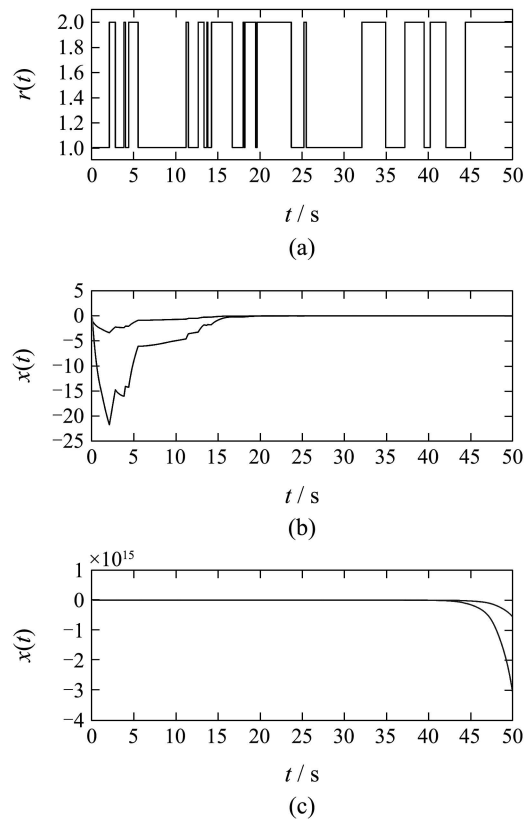


图1 模态和状态轨迹

Fig. 1 Trajectories of modes and states

表2 对不同 γ 的最大 h_1

Table 2 Maximum h_1 for different γ

γ	0.1	0.08	0.06	0.04	0.02	0.01
h_1	0.9	0.8	0.4	0.3	0.003	0.001

由表2可以看出, 随着 γ 的减小, 系统存在鲁棒 γ -次优 H_∞ 控制器的最大 h_1 也随之减小. 进而, 取 $h_1 = 0.3$, 求解注3和算法1得到 $\gamma_{\min} = 0.03$, 对应的

$$K_1 = [-7.8671 \ 45.8946],$$

$$K_2 = [-11.9622 \ 76.8205].$$

对比表2中的结果, 可见对于相同的 h_1 , 最优 H_∞ 控制器可以取得更小的 γ .

7 结论(Conclusion)

本文采用新的Lyapunov-Krasovskii泛函, 基于积分不等式方法, 研究了具有时变输入与状态时滞的不确定Markov跳变系统鲁棒 H_∞ 控制问题. 不使用模型变换和交叉项定界技术, 也不由零等式引入松弛变量, 数值算例表明所得结果具有较小的保守性.

参考文献(References):

- [1] XU S Y, CHEN T W, LAM J. Robust H_∞ filtering for uncertain Markovian jump systems with mode-dependent time delays[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2003, 48(5): 900 – 907.
- [2] BOUKAS E K, LIU Z K, LIU G X. Delay-dependent robust stability and H_∞ control of jump linear systems with time-delay[J]. *International Journal of Control*, 2001, 74(4): 329 – 340.
- [3] CAO Y Y, YAN W J, XUE A. Improved delay-dependent stability conditions and H_∞ control for jump time-delay systems[C] // *IEEE Conference on Decision and Control*. New York: IEEE, 2004: 4527 – 4532.
- [4] WU J, CHEN T W, WANG L. Delay-dependent robust stability and H_∞ control for jump linear systems with delays[J]. *Systems & Control Letters*, 2006, 55(11): 939 – 948.
- [5] XU S Y, JAMES L, MAO X R. Delay-dependent H_∞ control and filtering for uncertain Markovian jump systems with time-varying delays[J]. *IEEE Transactions Circuits & Systems I*, 2007, 54(9): 2070 – 2077.
- [6] KANG Y. Stochastic stabilization of Markovian jump systems with state and input delays[C] // *Proceedings of the 26th Chinese Control Conference*. Beijing: Beihang University Press, 2007: 716 – 720.
- [7] SUN M H, JAMES L, XU S Y, et al. Robust exponential stabilization for Markovian jump systems with mode-dependent input delay[J]. *Automatica*, 2007, 43(10): 1799 – 1807.
- [8] ZHANG X M, WU M, SHE J H, et al. Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays[J]. *Automatica*, 2005, 41(8): 1405 – 1412.
- [9] FENG X, LOPARO K A, JI Y, et al. Stochastic stability properties of jump linear systems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1992, 37(1): 38 – 53.
- [10] PETERSEN I R, HOLLOT C V. A riccati equation approach to the stabilization of uncertain linear systems[J]. *Automatica*, 1986, 22(4): 397 – 411.
- [11] GHAOUI E, OUSTRY L, AITRAMI M. A cone complementarity linearization algorithm for static output-feedback and related problems[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1997, 42(8): 1171 – 1176.

作者简介:

刘健辰 (1978—), 男, 博士研究生, 从事随机跳变系统鲁棒控制的研究, E-mail: liujian4587@sina.com;

章兢 (1957—), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统鲁棒和智能控制等的研究, E-mail: zhangj@hnu.cn.