

多个线性时滞系统的关联稳定与协调控制

邓小飞^{1,2}, 年晓红¹, 潘 欢¹

(1. 中南大学 信息科学与工程学院, 湖南 长沙 410075; 2. 吉首大学 物理科学与信息工程学院, 湖南 吉首 416000)

摘要: 研究线性时滞系统的时滞无关联稳定性和协调控制问题. 利用双线性矩阵不等式(BMI), 给出了两个系统关联稳定和协调镇定的充分条件, 将关联和协调控制器的设计问题转化为具有BMI约束的非凸优化问题, 并给出了求解这类问题的交替算法. 最后, 通过一个数值例子来说明本文结果的有效性. 研究结果表明, 不稳定的时滞系统可以通过设计关联或协调控制构成稳定的组合系统.

关键词: 时滞; 协调控制; 稳定性; 交替算法; 双线性矩阵不等式

中图分类号: TP13 **文献标识码:** A

Interconnected stability and cooperative control of linear time-delay systems

DENG Xiao-fei^{1,2}, NIAN Xiao-hong¹, PAN Huan¹

(1. School of Information Science and Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410075, China;

2. College of physics science and information engineering, Jishou University, Jishou Hunan 416000, China)

Abstract: The interconnected stability and cooperative control for linear time-delay systems are investigated using the bilinear matrix inequality(BMI). Sufficient conditions for interconnected stability and cooperative stabilization for two subsystems are given. The design of interconnected and cooperative controllers is converted into a non-convex optimization problem with BMI constraints. Some alternate algorithms for solving these problems are proposed. Numerical examples are provided to illustrate the effectiveness of the proposed methods. Results show that unstable subsystems can be configured into a stable composite system through proper interconnection and by using the cooperative controllers.

Key words: time-delay; cooperative control; stability; alternate algorithm; BMI

1 引言(Introduction)

近年来, 随着现代科学技术的飞速发展, 在通信系统、电力系统、化工系统、交通运输系统等系统中出现了大量需要多个子系统间进行协调合作才能实现的工程控制问题. 多个系统之间的协调控制问题引起国内外学者的广泛关注^[1~5]. 文献[1~3]研究了两个线性定常系统的协调控制问题. 文献[4]研究了两个离散线性定常系统的协调控制问题. 文献[5]研究了Lurie型非线性系统的协调控制问题. 这些研究表明, 不稳定的系统可通过适当的关联或协调控制构成稳定的组合系统.

在实际系统中, 普遍存在着时间滞后现象, 同时时滞又是导致系统不稳定的一个重要因素. 因而研究时滞系统的控制问题具有非常重要的理论意义和应用价值. 时滞系统的研究也是控制理论研究的热点方向^[6,7]. 近年来, 时滞大系统的研究引起了许多

学者的广泛关注^[8,9]. 然而, 多个具有时滞的线性系统之间的协调控制问题的研究还未见相关报道.

20世纪90年代以来, 线性矩阵不等式(LMI)和双线性矩阵不等式(BMI)算法^[10~13]的引入简化了大系统的稳定性分析和控制器的设计. 本文基于BMI方法, 研究了两个线性时滞系统的关联稳定和协调控制问题. 基本思想是应用Lyapunov函数方法设计两个子系统之间的关联或协调控制构成稳定的组合系统, 给出两个子系统关联稳定和协调镇定的充分条件, 将关联或协调控制器的设计问题转化为具有BMI约束的非凸优化问题, 并应用BMI方法及MATLAB工具箱来求解. 本文给出的时滞系统时滞无关的稳定性条件.

2 问题描述(Problem statement)

本文的结果可以很容易地推广到多个系统的情况, 为了叙述方便, 本文只研究具有两个系统的关联

稳定和协调控制问题. 考虑如下两个相互独立的线性时滞系统:

$$\dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + C_1 x_1(t - \tau) + B_{12} u_{12}(t), \quad (1)$$

$$\dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + C_2 x_2(t - \tau) + B_{21} u_{21}(t), \quad (2)$$

其中: $x_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$, $x_2(t) \in \mathbb{R}^{n_2}$ 是状态变量, $u_{12} \in \mathbb{R}^{m_1}$, $u_{21} \in \mathbb{R}^{m_2}$ 为控制输入, $A_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $A_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$, $B_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times m_1}$, $B_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times m_2}$, $C_1 \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, $C_2 \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$ 是系统的系数矩阵, τ 是大于零的时滞常量.

首先, 研究系统(1)(2)当 $u_{12} \equiv 0$, $u_{21} \equiv 0$ 时的可关联稳定问题, 即是否存在关联矩阵 $A_{12} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{n_2 \times n_1}$ 以及如何设计关联矩阵 A_{12} , A_{21} 使得组合系统(3)渐近稳定.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t - \tau) \\ x_2(t - \tau) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

同时, 还要讨论在二次型性能指标(4)下的关联矩阵 A_{12} , A_{21} 的优化设计问题:

$$J(A_{21}, A_{12}, x_0) = \int_{t_0}^{\infty} x^T(t)(Q + A_d^T A_d)x(t)dt. \quad (4)$$

其中

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12}^T & Q_{22} \end{bmatrix}$$

是已知的半正定矩阵, $A_d = \text{diag}\{A_{21}, A_{12}\}$.

其次, 本文还将讨论系统(1)(2)的协调镇定问题, 即是否存在如下状态反馈协调控制器(协调控制):

$$u_{12}(t) = K_{12}x_2(t), \quad u_{21}(t) = K_{21}x_1(t). \quad (5)$$

以及如何设计控制器增益矩阵 K_{12} , K_{21} , 使得组合系统(6)渐近稳定.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_{12}K_{12} \\ B_{21}K_{21} & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t - \tau) \\ x_2(t - \tau) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

同时, 还将讨论在二次型性能指标(7)下, 协调控制器的优化设计问题:

$$J(u_{21}, u_{12}, x_0) = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u_{12}^T R_{12} u_{12} + u_{21}^T R_{21} u_{21})dt. \quad (7)$$

其中: $R_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times m_1}$, $R_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times m_2}$ 为已知的正定矩阵, $K_{12} \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_2}$, $K_{21} \in \mathbb{R}^{m_2 \times n_1}$ 是要设计的未知常数矩阵.

定义 1 如果存在矩阵 A_{12} , A_{21} 使得组合系统(3)渐近稳定, 则称系统(1)和(2)(或矩阵 A_{12} , A_{21}) 可关联稳定.

定义 2 如果存在协调控制器(5)使得闭环组合系统(6)渐近稳定, 则称系统(1)和(2)可协调镇定.

3 两个线性时滞系统的关联稳定(Interconnected stability of two linear time-delay systems)

下面给出由两个系统可关联稳定的充分条件.

定理 1 线性时滞系统(1)(2)可关联稳定的充分条件是存在正定矩阵 P_{11} , P_{22} , S_{11} , S_{22} 及矩阵 P_{12} , S_{12} , A_{12} , A_{21} , 使得下列矩阵不等式成立:

$$P(P_{11}, P_{12}, P_{22}) \triangleq \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (8)$$

$$S(S_{11}, S_{12}, S_{22}) \triangleq \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix} > 0, \quad (9)$$

$$E(A_{12}, A_{21}, P_{11}, P_{12}, P_{22}, S_{11}, S_{12}, S_{22}) \triangleq \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} & P_{11}C_1 & P_{12}C_2 \\ \Sigma_{12}^T & \Sigma_{22} & P_{12}^T C_1 & P_{22}^T C_2 \\ C_1^T P_{11} & C_1^T P_{12} & -S_{11} & -S_{12} \\ C_2^T P_{12} & C_2^T P_{22} & -S_{12}^T & -S_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (10)$$

其中:

$$\Sigma_{11} = A_1^T P_{11} + P_{11} A_1 + A_{21}^T P_{12}^T + P_{12} A_{21} + S_{11},$$

$$\Sigma_{12} = A_1^T P_{12} + P_{12} A_2 + A_{21}^T P_{22} + P_{11} A_{12} + S_{12},$$

$$\Sigma_{22} = A_2^T P_{22} + P_{22} A_2 + A_{12}^T P_{12} + P_{12}^T A_{12} + S_{22}.$$

证 为方便叙述, 记:

$$x(t) = [x_1^T(t) \quad x_2^T(t)]^T, \quad C = \text{diag}\{C_1, C_2\},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} \\ A_{21} & A_2 \end{bmatrix}.$$

于是, 组合系统(3)可简写为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Cx(t - \tau). \quad (11)$$

构造如下的Lyapunov函数:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(\gamma)Sx(\gamma)d\gamma,$$

其中:

$$P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12}^T & P_{22} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^T & S_{22} \end{bmatrix}.$$

对 $V(x(t))$ 沿系统(11)的轨线求导, 有

$$\frac{dV}{dt} = x^T(t)(A^T P + PA + S)x(t) + x^T(t)PCx(t - \tau) +$$

$$x^T(t-\tau)C^TPx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TP+PA+S & PC \\ C^TP & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}.$$

由Lyapunov稳定性理论, 若存在正定矩阵 P, S , 使得不等式

$$\begin{bmatrix} A^TP+PA+S & PC \\ C^TP & -S \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

成立, 则系统(11)渐近稳定. 通过简单的计算, 不等式(12)的分块形式可写为式(10). 证毕.

不等式(8)和(9)是LMIs, 而不等式(10)是BMI. 不等式(8)(9)和(10)的可行解可通过求解如下优化问题得到:

问题 1

$$\begin{aligned} \min \quad & t, \\ \text{s.t.} \quad & -P(P_{11} \ P_{12} \ P_{22}) < tI, \\ & -S(S_{11} \ S_{12} \ S_{22}) < tI, \\ & E(P_{11} \ P_{12} \ P_{22} \ S_{11} \ S_{12} \ S_{22} \ A_{12} \ A_{21}) < tI. \end{aligned}$$

下面考虑关于关联矩阵 A_{12}, A_{21} 的优化设计问题.

定理 2 若LMIs(8)(9)和BMI

$$F(P_{11}, P_{12}, P_{22}, S_{11}, S_{12}, S_{22}, A_{12}, A_{21}) \triangleq \begin{bmatrix} \Omega_{11} & \Omega_{12} & P_{11}C_1 & P_{12}C_2 & A_{21}^T & 0 \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} & P_{12}^TC_1 & P_{22}C_2 & 0 & A_{12}^T \\ C_1^TP_{11} & C_1^TP_{12} & -S_{11} & -S_{12} & 0 & 0 \\ C_2^TP_{12} & C_2^TP_{22} & -S_{12}^T & -S_{22} & 0 & 0 \\ A_{21} & 0 & 0 & 0 & -I & 0 \\ 0 & A_{12} & 0 & 0 & 0 & -I \end{bmatrix} < 0 \quad (13)$$

成立, 则系统(1)(2)可关联稳定, 且性能指标(4)满足如下不等式:

$$J(A_{12}, A_{21}) \leq x_0^TPx_0 + \int_{-\tau}^0 x^T(\gamma)Sx(\gamma)d\gamma,$$

其中:

$$\begin{aligned} \Omega_{11} &= Q_{11} + A_1^TP_{11} + P_{11}A_1 + A_{21}^TP_{12}^T + \\ &\quad P_{12}A_{21} + S_{11}, \\ \Omega_{12} &= Q_{12} + A_1^TP_{12} + P_{12}A_2 + A_{21}^TP_{22} + \\ &\quad P_{11}A_{12} + S_{12}, \\ \Omega_{22} &= Q_{22} + A_2^TP_{22} + P_{22}A_2 + A_{12}^TP_{12} + \\ &\quad P_{12}^TA_{12} + S_{22}. \end{aligned}$$

证 对下面的Lyapunov函数:

$$V(x(t)) = x^T(t)Px(t) + \int_{t-\tau}^t x^T(\gamma)Sx(\gamma)d\gamma,$$

沿系统(11)的轨线求导, 得

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= x^T(t)[A^TP+PA+S]x(t) + x^T(t)PCx(t-\tau) + \\ &\quad x^T(t-\tau)C^TPx(t) - x^T(t-\tau)Sx(t-\tau) = \\ &\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^TP+PA+S & PC \\ C^TP & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Psi - Q - A_d^TA_d & PC \\ C^TP & -S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Omega_{11} + A_{21}^TA_{21} & \Omega_{12} \\ \Omega_{12}^T & \Omega_{22} + A_{12}^TA_{12} \end{bmatrix}.$$

由Schur补定理可知式(13)成立等价于

$$\begin{bmatrix} \Psi & PC \\ C^TP & -S \end{bmatrix} < 0.$$

因此, 当不等式(13)成立时,

$$\frac{dV}{dt} < -x^T(t)(Q + A_d^TA_d)x(t) < 0. \quad (14)$$

由Lyapunov稳定性理论可知系统(11)是渐近稳定的. 进一步, 对(14)两边关于时间 t 从0到 T 积分, 并利用初始条件 $x(0) = x_0$, 可得

$$\begin{aligned} &x^T(T)Px(T) + \int_{T-\tau}^T x^T(\gamma)Sx(\gamma)d\gamma - \\ &x_0^TPx_0 - \int_{-\tau}^0 x^T(\gamma)Sx(\gamma)d\gamma < \\ &- \int_0^T x^T(t)(Q + A_d^TA_d)x(t)dt. \end{aligned}$$

由于系统(11)是渐近稳定的, 所以当 $T \rightarrow \infty$ 时,

$$x^T(T)Px(T) \rightarrow 0, \quad \int_{T-\tau}^T x^T(\gamma)Sx(\gamma)d\gamma \rightarrow 0.$$

因此

$$\begin{aligned} J(A_{12}, A_{21}, x_0) &= \int_0^\infty x^T(t)(Q + A_d^TA_d)x(t)dt \leq \\ &x_0^TPx_0 + \int_{-\tau}^0 x^T(\gamma)Sx(\gamma)d\gamma. \end{aligned}$$

证毕.

由定理2, 可以通过求解如下问题来对关联矩阵 A_{12}, A_{21} 进行优化设计:

$$\begin{aligned} \text{问题 2} \quad &\min_{P, S, A_{12}, A_{21}} \|P + S\|, \\ \text{s.t.} \quad &\text{式(8)(9)(13)}. \end{aligned}$$

优化问题2的解可由求解如下问题得到:

$$\begin{aligned} &\min_{P, S, A_{12}, A_{21}} \lambda_1, \\ \text{s.t.} \quad &\text{式(8)(9)(13)}, \quad \|P + S\| < \lambda_1. \end{aligned}$$

由于不等式 $\|P + S\| < \lambda_1$ 等价于

$$\begin{bmatrix} 0 & P+S \\ P+S & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \lambda_1 I & 0 \\ 0 & \lambda_1 I \end{bmatrix}. \quad (15)$$

因此, 优化问题2可转化为如下的标准广义特征值问题(GEVP).

问题 3 $\min_{P, S, A_{12}, A_{21}} \lambda_1,$
s.t. 式(8)(9)(13)(15).

进一步, 考虑到不等式 $Q + A_d^T A_d < \lambda_2 I$ 等价于

$$\begin{bmatrix} Q & A_d^T \\ A_d & -I \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \lambda_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (16)$$

因此问题2又可转化为下面的标准广义特征值问题(GEVP).

问题 4 $\min_{P, S, A_{12}, A_{21}} \lambda_2,$
s.t. 式(8)(9)(13),
 $\begin{bmatrix} Q & A_d^T \\ A_d & -I \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y < \lambda_2 I.$

问题4是BMI约束下的非凸优化问题, 后面将会讨论关于此类问题的可行解和局部优化解的求解算法.

4 协调控制器的优化设计(Optimal design of cooperative controllers)

下面考虑线性时滞系统的协调镇定问题.

定理 3 线性时滞系统(1)(2)可协调镇定的充分条件是存在正定矩阵 $P_{11}, P_{22}, S_{11}, S_{22}$, 及矩阵 $P_{12}, S_{12}, K_{12}, K_{21}$, 使得LMIs(8)(9)和BMI(17)成立:

$$H(P_{11}, P_{12}, P_{22}, S_{11}, S_{12}, S_{22}, K_{12}, K_{21}) \triangleq \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & P_{11}C_1 & P_{12}C_2 \\ \Gamma_{12}^T & \Gamma_{22} & P_{12}^T C_1 & P_{22}C_2 \\ C_1^T P_{11} & C_1^T P_{12} & -S_{11} & -S_{12} \\ C_2^T P_{12} & C_2^T P_{22} & -S_{12}^T & -S_{22} \end{bmatrix} < 0, \quad (17)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= A_1^T P_{11} + P_{11} A_1 + K_{21}^T B_{21}^T P_{12}^T + \\ &\quad P_{12} B_{21} K_{21} + S_{11}, \\ \Gamma_{12} &= A_1^T P_{12} + P_{12} A_2 + K_{21}^T B_{21}^T P_{22} + \\ &\quad P_{11} B_{12} K_{12} + S_{12}, \\ \Gamma_{22} &= A_2^T P_{22} + P_{22} A_2 + K_{12}^T B_{12}^T P_{12} + \\ &\quad P_{12}^T B_{12} K_{12} + S_{22}. \end{aligned}$$

证 用 $B_{12} K_{12}, B_{21} K_{21}$ 分别代替定理1中的 A_{12}, A_{21} 可得不等式(17). 证明过程与定理1相同, 这里略.

由定理3可知, LMIs(8)(9)和BMI(17)的可行解给出了协调控制器的一种设计方法. LMIs(8)(9)和BMI(17)的可行解可通过求解下列优化问题得到.

问题 5

$$\begin{aligned} \min \quad & t, \\ \text{s.t.} \quad & -P(P_{11}, P_{12}, P_{22}) < tI, \\ & -S(S_{11}, S_{12}, S_{22}) < tI, \\ & H(P_{11}, P_{12}, P_{22}, S_{11}, S_{12}, S_{22}, K_{12}, K_{21}) < tI. \end{aligned}$$

对于协调控制器的优化设计问题, 有下面定理.

定理 4 若存在正定矩阵 $P_{11}, P_{22}, S_{11}, S_{22}$, 及矩阵 $P_{12}, S_{12}, K_{12}, K_{21}$, 使得LMIs(8)(9)和BMI(18)成立:

$$G(P_{11}, P_{12}, P_{22}, S_{11}, S_{12}, S_{22}, K_{12}, K_{21}) \triangleq \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & P_{11}C_1 & P_{12}C_2 & K_{21}^T & 0 \\ \Pi_{12}^T & \Pi_{22} & P_{12}^T C_1 & P_{22}C_2 & 0 & K_{12}^T \\ C_1^T P_{11} & C_1^T P_{12} & -S_{11} & -S_{12} & 0 & 0 \\ C_2^T P_{12} & C_2^T P_{22} & -S_{12}^T & -S_{22} & 0 & 0 \\ K_{21} & 0 & 0 & 0 & -R_{21}^{-1} & 0 \\ 0 & K_{12} & 0 & 0 & 0 & -R_{12}^{-1} \end{bmatrix} < 0, \quad (18)$$

其中:

$$\begin{aligned} \Pi_{11} &= Q_{11} + A_1^T P_{11} + P_{11} A_1 + K_{21}^T B_{21}^T P_{12}^T + \\ &\quad P_{12} B_{21} K_{21} + S_{11}, \\ \Pi_{12} &= Q_{12} + A_1^T P_{12} + P_{12} A_2 + K_{21}^T B_{21}^T P_{22} + \\ &\quad P_{11} B_{12} K_{12} + S_{12}, \\ \Pi_{22} &= Q_{22} + A_2^T P_{22} + P_{22} A_2 + K_{12}^T B_{12}^T P_{12} + \\ &\quad P_{12}^T B_{12} K_{12} + S_{22}, \\ R_{21} &= B_{21}^T + B_{21}, \quad R_{12} = B_{12}^T + B_{12}. \end{aligned}$$

则组合系统(6)可通过协调控制器(5)协调镇定且性能指标(7)满足式(19).

$$J(u_{12}, u_{21}) \leq x_0^T P x_0 + \int_{-\tau}^0 x^T(\gamma) S x(\gamma) d\gamma. \quad (19)$$

证 只需用 $B_{12} K_{12}, B_{21} K_{21}$ 分别代替定理2中的 A_{12}, A_{21} , 定理4即可得证. **证毕.**

由定理4知, 通过求解如下问题可进行协调控制器 u_{12} 和 u_{21} 的优化设计.

问题 6 $\min_{P, S, K_{12}, K_{21}} \|P + S\|,$
s.t. 式(8)(9)(18).

同样, 优化问题6的解可由求解如下问题得到:

$$\begin{aligned} \min_{P, S, K_{12}, K_{21}} \quad & \lambda_1, \\ \text{s.t.} \quad & \text{式(8)(9)(18)}, \|P + S\| < \lambda_1. \end{aligned}$$

并且不等式 $\|P + S\| < \lambda_1$ 等价于(15). 因此, 优化问题6同样可转化为下列的标准广义特征值问题(GEVP).

$$\begin{aligned} \text{问题 7} \quad & \min_{P, S, K_{12}, K_{21}} \lambda_1, \\ \text{s.t. 式(8)(9)(18).} \end{aligned}$$

此外, 考虑到不等式 $Q + K_d^T R_d K_d < \lambda_2 I$ 等价于

$$\begin{bmatrix} Q & K_d^T \\ K_d & -R_d^{-1} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} \lambda_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此, 问题6又可转化为下列标准广义特征值问题(GEVP).

$$\begin{aligned} \text{问题 8} \quad & \min_{P, S, K_{12}, K_{21}} \lambda_2, \\ \text{s.t. 式(8)(9)(18),} \\ & \begin{bmatrix} Q & K_d^T \\ K_d & -R_d^{-1} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Y & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Y < \lambda_2 I. \end{aligned}$$

问题6也是BMI约束下的非凸优化问题, 下面将讨论关于此类问题的可行解和局部优化解的求解算法.

5 BMI的优化算法(Optimization algorithm of BMI)

首先, 本文讨论求解问题1的算法, 这是关于LMI和BMI的可行性问题. 若问题1存在可行解, 则组合系统(3)是可关联稳定的, 且其可行解给出了设计组合系统(3)的关联控制器的一种方法.

由于矩阵不等式(10)是关于矩阵变量 $P_{ij}, S_{ij}(i, j=1, 2), A_{12}, A_{21}$ 的BMI. 若固定 $P_{ij}, S_{ij}(i, j=1, 2)$, 则BMI(10)可转化为关于矩阵变量 A_{12}, A_{21} 的LMI; 若固定矩阵变量 A_{12}, A_{21} , 则BMI(10)可转化为关于矩阵变量 $P_{ij}, S_{ij}(i, j=1, 2)$ 的LMI. 因此可通过MATLAB中的LMI工具箱来求解这些LMI问题的可行解. 下面给出求解问题1的求解算法.

算法 1

Step 1 给定初始值 $A_{12} = A_{12}^{(0)}, A_{21} = A_{21}^{(0)}, k = 0$.

Step 2 令 $k = k + 1$, 求解优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{P, S, A_{12}, A_{21}} t \\ \text{s.t. } & -P(P_{11}, P_{12}, P_{22}) < tI, \\ & -S(S_{11}, S_{12}, S_{22}) < tI, \\ & E(P_{11}, P_{12}, P_{22}, S_{11}, S_{12}, S_{22}, \\ & \quad A_{12}^{(k-1)}, A_{21}^{(k-1)}) < tI. \end{aligned}$$

得到矩阵 $P_{ij}, S_{ij}(i, j=1, 2)$, 并记:

$$P_{ij}^{(k)} = P_{ij}, S_{ij}^{(k)} = S_{ij}, i, j = 1, 2.$$

求解优化问题:

$$\begin{aligned} & \min_{A_{12}, A_{21}} t \\ \text{s.t. } & E(P_{ij}^{(k)}, S_{ij}^{(k)}, A_{12}, A_{21}) < tI, i, j = 1, 2, \end{aligned}$$

得解矩阵 A_{12}, A_{21} , 记:

$$A_{12}^{(k)} = A_{12}, A_{21}^{(k)} = A_{21}.$$

Step 3 若下列矩阵不等式组:

$$\begin{aligned} & P(P_{11}^{(k)}, P_{12}^{(k)}, P_{22}^{(k)}) > 0, \\ & S(S_{11}^{(k)}, S_{12}^{(k)}, S_{22}^{(k)}) > 0, \\ & E(P_{11}^{(k)}, P_{12}^{(k)}, P_{22}^{(k)}, S_{11}^{(k)}, S_{12}^{(k)}, S_{22}^{(k)}, A_{12}^{(k)}, A_{21}^{(k)}) < 0 \end{aligned}$$

成立或 k 大于最大循环次数, 转入Step 4; 否则转入Step 2.

Step 4 返回可行解 $A_{ij}^{(k)}$, 结束运行.

下面讨论关联矩阵的优化设计问题. 问题2是LMI和BMI约束下的标准GEVP问题, 求解过程分为两个步骤:

第1步 用算法1求取LMIs(8)(9)和BMI(13)的一组可行解 $(P^{(0)}, S^{(0)}, A_{12}^{(0)}, A_{21}^{(0)})$;

第2步 在求得不等式(8)(9)和(13)的可行解的基础上, 用下列的优化交替算法求取优化解. 算法设计如下:

算法2:

Step 1 给定初始值 $A_{12} = A_{12}^{(0)}, A_{21} = A_{21}^{(0)}, k = 0$.

Step 2 令 $k = k + 1, A_{21} = A_{21}^{(k-1)}, A_{12} = A_{12}^{(k-1)}$, 求解优化问题3, 得到矩阵 $P_{ij}, S_{ij}(i, j = 1, 2)$, 并记:

$$P_{ij}^{(k)} = P_{ij}, S_{ij}^{(k)} = S_{ij}, i, j = 1, 2.$$

求解问题4, 得到解矩阵 A_{12}, A_{21} , 记:

$$A_{12}^{(k)} = A_{12}, A_{21}^{(k)} = A_{21}.$$

Step 3 计算

$$\|P_{ij}^{(k)} + S_{ij}^{(k)} - P_{ij}^{(k-1)} - S_{ij}^{(k-1)}\|,$$

若

$$\|P^{(k)} + S^{(k)} - P^{(k-1)} - S^{(k-1)}\| < \varepsilon,$$

其中 ε 为容忍度系数, 或 k 大于最大循环次数, 转入Step 4; 否则转入Step 2.

Step 4 返回可行解 $A_{12}^{(k)}, A_{21}^{(k)}$, 结束运行.

问题6、问题7和问题8的求解算法, 只需要用

$B_{12}K_{12}$, $B_{21}K_{21}$ 代替算法1和算法2中的 A_{12} , A_{21} 即可, 所以这里不再重复.

6 数值例子(Numerical examples)

下面通过数值算例来说明本文所提出的算法的可行性和有效性.

例 考虑由系统(1)(2)构成的组合系统的可关联稳定性问题, 其中:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, B_{21} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}.$$

注意到, 若固定 A_{12} , A_{21} , 优化问题3转化为LMI约束下的标准GEVP问题; 若固定 P_{ij} , S_{ij} ($i, j = 1, 2$), 优化问题4同样也可以转化为LMI约束下的标准GEVP问题. 因而在理论上, 既可对 A_{12} 和 A_{21} 取初值, 也可以对 P_{11} , P_{12} , P_{22} , S_{11} , S_{12} , S_{22} 取初值, 都可以用迭代算法求可行解. 这里对 P_{ij} , S_{ij} ($i, j = 1, 2$) 给定初值:

$$P_{11}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{22}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, P_{12}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix},$$

$$S_{11}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_{22}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S_{12}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix}.$$

利用算法1可得一组可行解:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 2.1460 & -0.8683 \\ -1.1347 & 0.4632 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1.9717 & 1.0026 \\ 1.2691 & -0.6400 \end{bmatrix},$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 0.3311 & -0.0043 \\ -0.0221 & 0.0040 \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -0.0313 & 0.0207 \\ -0.0004 & -0.0205 \end{bmatrix}.$$

由算法2可得一组优化解:

$$K_{12} = \begin{bmatrix} 0.4010 & 0.3788 \\ -0.0663 & 0.0187 \end{bmatrix},$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} -0.0324 & 0.0625 \\ -0.0371 & -0.0158 \end{bmatrix}.$$

图1为两个系统的原始状态响应曲线, 图2为通过协调控制构成的组合系统的状态响应曲线. 由定理4, 性能指标(7)的上确界为

$$x_0^T P x_0 + \int_{-\tau}^0 x^T(\gamma) S x(\gamma) d\gamma.$$

由算法1和算法2, 可得

$$Z_f = 1.0482, Z_o = 0.9416,$$

其中: Z_f 表示性能指标在可行协调控制器下的上界; Z_o 表示优化后的协调控制器下的上界. 当容忍度系数 $\varepsilon = 0.002$ 时, 其性能指标变化曲线如图3所示.

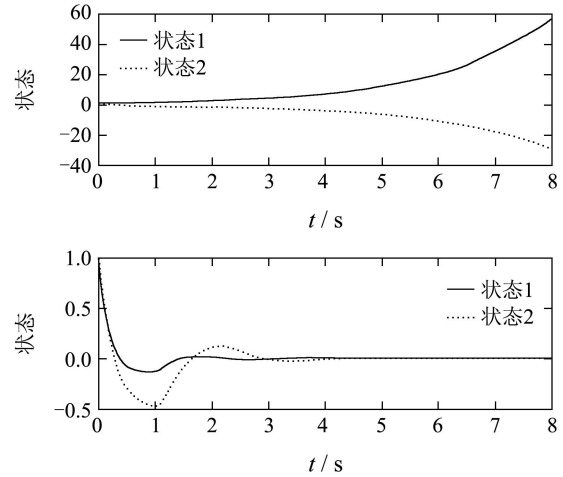


图 1 两个系统的原始状态响应曲线

Fig. 1 Initial state response curve for two systems

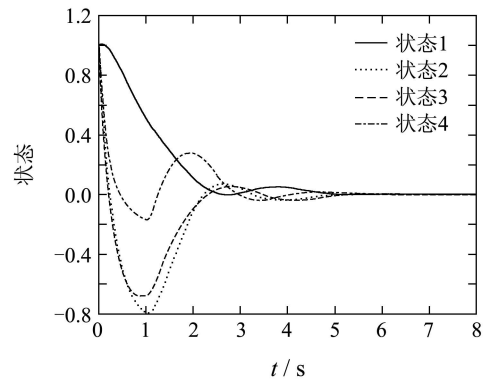


图 2 组合系统的状态响应曲线

Fig. 2 State response curve for the composite system

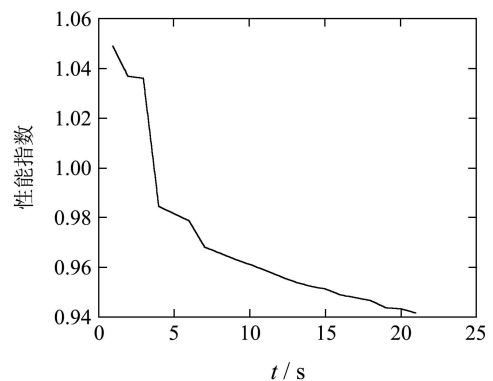


图 3 性能指标变化曲线

Fig. 3 Change curve for performance index

本例中, 第一个系统的系数矩阵 A_1 为不稳定矩阵, 但通过关联或协调控制构成稳定的组合系统. 众

所周知, 时滞大系统稳定和镇定的前提为子系统的状态矩阵为渐进稳定矩阵, 但在定理1~4中, 并没有要求矩阵 A_1 , A_2 为渐进稳定矩阵, 因而两个不稳定的时滞系统可以通过关联或协调控制来构成渐近稳定的组合时滞系统.

7 结论(Conclusions)

研究了具有时滞的组合系统的关联稳定和协调控制问题, 给出其关联稳定和协调镇定的充分条件, 将协调控制器的设计问题转化成为具有BMI约束的非凸优化问题, 并给出了基于双线性矩阵不等式方法的局部优化交替算法. 这种算法可以用MATLAB中的LMI工具箱求解. 研究结果表明, 不稳定的线性时滞系统可以通过适当的关联或协调控制构成稳定的组合系统.

参考文献(References):

- [1] DUAN Z S, HUANG L, WANG J Z, et al. Harmonic control between two systems[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2003, 29(1): 14 – 22.
- [2] DUAN Z S, HUANG L, WANG L, et al. Some application of small gain theorem to interconnected systems[J]. *Systems & Control Letters*, 2004, 52(3/4): 263 – 273.
- [3] DUAN Z S, WANG J Z, HUANG L. Some special decentralized control problems in continuous-time interconnected systems[J]. *Advance in Complex Systems*, 2006, 9(3): 277 – 286.
- [4] DUAN Z S, WANG J Z, HUANG L. Special decentralized control problems in discrete-time interconnected systems composed of two subsystems[J]. *Systems & Control Letters*, 2007, 56(3): 206 – 214.
- [5] 年晓红, 李鑫滨, 杨莹, 等. Lurie控制系统的关联绝对稳定性-双线性矩阵不等式方法[J]. *控制理论与应用*, 2005, 22(6): 999 – 1004. (NIAN Xiaohong, LI Xinbin, YANG Ying, et al. Bilinear matrix inequality approach to the absolute stability of interconnected Luire control systems[J]. *Control Theory & Applications*, 2005, 22(6): 999 – 1004.)
- [6] HALE J K, VERDUYN LUNEL S M. *Introduction of Functional Differential Equations*[M]. New York: Springer, 1993.
- [7] RICHARD J P. Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems[J]. *Automatica*, 2003, 39(10): 1667 – 1694.
- [8] XU B. On delay-independent stability of large-scale systems with time delay[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1995, 40(5): 930 – 933.
- [9] WU H S. Decentralized adaptive robust control for a class of large-scale systems including delayed state perturbations in the interconnections[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(10): 1745 – 1751.
- [10] TUAN H D, APKARIAN P. Low nonconvexity-rank bilinear matrix inequalities: algorithms and applications in robust cotroller and structure designs[J]. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2000, 45(1): 2111 – 2117.
- [11] ZHENG F, WANG Q G, LEE T H. A heuristic approach to solving a class of bilinear matrix inequality problems[J]. *Systems & Control Letters*, 2002, 47(2): 111 – 119.
- [12] NIAN X H. Suboptimal strategics of linear quadratic closed-loop differential games: a BMI approach[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2005, 31(2): 216 – 222.
- [13] NIAN X H, CAO L. BMI approach to the interconnected stability and cooperative control of linear systems[J]. *Acta Automatic Sinica*, 2008, 34(4): 438 – 444.

作者简介:

邓小飞 (1982—), 女, 助教, 目前研究方向为时滞系统稳定性分析和大系统理论, E-mail: xiaofei0228@163.com;

年晓红 (1965—), 男, 博士生导师, 教授, 主要研究方向为多智能体网络化控制与电力机车牵引传动控制, E-mail: xhnian@mail.csu.edu.cn;

潘欢 (1983—), 男, 博士研究生, 主要研究方向为时滞多智能体网络化控制和复杂网络系统, E-mail: ph0303@126.com.